Valós analízis gyakorlat, 2008. november 24.

1. Egyenletesen folytonosak-e a következő függvények? Ellenőrizzük a definíciót, és mutassunk ε-hoz δ-t, illetve mutassunk olyan ε-t, amihez nem létezik δ.

$\sqrt{x}$ a $[0, \infty)$ intervallumon;
$1/x$ az $[1, 2]$ intervallumon;
x^2 a $[0, \infty)$ intervallumon;

2. Igazoljuk, hogy minden páratlan fokú, valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.

3. Igazoljuk, hogy ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos és $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$, akkor létezik olyan $c \in [a, b]$, amire $f(c) = \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

4. Igazoljuk, hogy ha I intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos és egy-egyértelmű, akkor szigorúan monoton.

5. Legyen $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$ folytonos. Bizonyítsuk be, hogy akkor és csak akkor f egyenletesen folytonos, ha $\lim\limits_{1-0} f$ létezik és véges.

6. Igazoljuk, hogy tetszőleges $H \subset \mathbb{R}$ halmaz akkor és csak akkor kompakt, ha korlátos és zárt.

7. Legyen $K \subset \mathbb{R}$. Igazoljuk, hogy ha minden $K \to \mathbb{R}$ folytonos függvénynek van legnagyobb értéke, akkor K kompakt.

8. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény "metszi az x-tengelyt" az $a \in \mathbb{R}$ pontban, ha az a minden környezetében felvesz pozitív és negatív értéket is. Igaz-e, hogy bármely, sehol sem sűrű zárt $Z \subset \mathbb{R}$ halmazhoz létezik olyan folytonos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, ami pontosan Z pontjaiban metszi az x-tengelyt?

Házi feladatok

9. Egyenletesen folytonosak-e a következő függvények? Ellenőrizzük a definíciót, és mutassunk ε-hoz δ-t, illetve mutassunk olyan ε-t, amihez nem létezik δ.

x^2 az $[-1, 1]$ intervallumon;
$|x|$ a teljes $\mathbb{R}$-en;
$1/x$ a $(0, 1)$ intervallumon.

10. Igazoljuk, hogy ha $f : [a, b] \to [a, b]$ folytonos, akkor létezik olyan $c \in [a, b]$, amire $f(c) = c$. Igaz marad-e az állítás $(a, b) \to (a, b)$ függvényekre?

11. Igazoljuk, hogy kompakt halmaz folytonos képe kompakt.

12. Legyen $K \subset \mathbb{R}$. Igazoljuk, hogy ha minden $K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény egyenletesen folytonos, akkor K kompakt.