Valós analízis gyakorlat, 2008. november 28.

1. (a) Lehet-e másodfajú szakadási helyek torlódási pontja elsőfajú szakadási hely?
(b) Lehet-e elsőfajú szakadási helyek torlódási pontja másodfajú szakadási hely?

2. Igazoljuk az átviteli elvvel is, hogy ha f monoton növekvő az (a,b) intervallumon, akkor $\lim\limits_{a+0} f = \inf\limits_{(a,b)} f$ és $\lim\limits_{b-0} f = \sup\limits_{(a,b)} f$.

3. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény monoton nő és az értékkészlete sűrű $\mathbb{R}$-ben. Igazoljuk, hogy f mindenhol folytonos.

4. Igazoljuk, hogy ha egy függvény konvex, de nem szigorúan konvex, akkor van olyan intervallum, ahol lineáris.

5. Igaz-e, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, akkor $\max\left(\lim\limits_{-\infty} f, \lim\limits_{\infty} f\right) > -\infty$?

6. Igazoljuk, hogy ha f additív, akkor f^2 gyengén konvex.

7. Rendezzük a racionális számokat egy (q_n) sorozatba, és legyen tetszőleges k pozitív egészre

$$a_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad q_k < x; \\ 1 & \text{ha} \quad q_k = x; \\ 2 & \text{ha} \quad q_k > x. \end{cases}$$

Ezek után definiáljuk az f függvényt a következőképpen: legyen $f(x)$ tizedestört alakja $0, a_1(x)a_2(x)a_3(x)\ldots$.

Igazoljuk, hogy ez a függvény korlátos, szigorúan monoton növekvő, az irracionális számokban folytonos, a racionális számokban pedig sem jobbról, sem balról nem folytonos.

8. Bizonyítsuk be, hogy bármely $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény elsőfajú szakadási helyeinek halmaza megszámlálható.

Házi feladatok

9. (a) Lehet-e elsőfajú szakadási helyek torlódási pontja elsőfajú szakadási hely?
(b) Lehet-e másodfajú szakadási helyek torlódási pontja másodfajú szakadási hely?

10. Igaz-e, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konkáv és $\lim\limits_{-\infty} f$ véges, akkor f monoton csökkenő?

11. Igaz-e, hogy ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x-0) \le f(x) \le f(x+0)$, akkor f monoton növekvő?

12. Igaz-e, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex és $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$, akkor $\lim\limits_{\infty} f = \infty$?

13. Igazoljuk, hogy ha f gyengén konvex, akkor

$$f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \le \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}.$$

14. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $H \subset \mathbb{R}$ megszámlálható halmazhoz létezik olyan szigorúan monoton függvény, ami pontosan H pontjaiban szakad.