Valós analízis gyakorlat, 2008. december 5.

1. Igazoljuk, hogy $0 < x$, $x \neq 1$ esetén $\ln x < x - 1$.

2. Igazoljuk, hogy $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ és $\lim\limits_{x\to+0} x \cdot \ln x = 0$.

3.

$$\lim_{x\to+0} x^x = ? \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x} = ?$$

4. Igazoljuk, hogy ha $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ folytonos és tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, akkor f exponenciális függvény.

5. Igazoljuk, hogy $\ln(n + 1) < 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} \leq (\ln n) + 1$.

6. Igaz-e, hogy az $x \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$ függvény monoton az (K, ∞) félegyenesen, ha K elég nagy?

7. Igazoljuk, hogy az $1 < a < b$ számokra akkor és csak akkor teljesül, hogy $a^b = b^a$, ha létezik olyan $x > 0$, amire $a = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ és $b = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$.

8 (Nesbitt-egyenlőtlenség). Igazoljuk, hogy ha $a, b, c > 0$, akkor

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Házi feladatok

9. Igazoljuk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ és $K \in \mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_{x\to+0} x^\varepsilon \cdot \ln^K x = 0$ és $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln^K x}{x^\varepsilon} = 0$.

10.

$$\lim_{x\to+0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = ?$$

11. Igazoljuk, hogy ha $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ folytonos és tetszőleges $x, y > 0$ esetén $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$, akkor f hatványfüggvény.

12. Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b, c > 0$ és $a + b + c = 1$, akkor

$$\left(\frac{1}{a} + 1\right)\left(\frac{1}{b} + 1\right)\left(\frac{1}{c} + 1\right) \geq 8.$$