Tájékoztató és részletes tételjegyzék az analízis vizsgához (sillabusz)

2008/2009, I. félév

Matematika BSC, I. évfolyam, emelt szint

A vizsga három részből áll.

- Beugró feladat: olyan feladat, amelynek megoldása mindenképpen elvárható, ha valaki megértette a tananyagot.
- A tételjegyzék két tételének vázlatos kidolgozása és szóbeli előadása.
- Válaszadás a vizsgáztató esetleges szóbeli kérdéseire.

Az elégséges osztályzathoz meg kell tudni oldani a beugró feladatot és legalább ki kell tudni mondani a tananyagban szereplő tételeket.

A vizsgán a tételjegyzéket használhatjátok, a sillabuszt nem. Íróeszközökön kívül más segédeszköz (pl. számológép) nem használható.

Ez a tájékoztató letölthető innen:
`http://www.cs.elte.hu/~kosgeza/oktatas/anal-2008-2/sillabusz.pdf`

A tételjegyzék pedig innen:
`http://www.cs.elte.hu/~kosgeza/oktatas/anal-2008-2/teteljegyzek.pdf`

Részletes tételjegyzék

1. Logikai alapfogalmak és bizonyítási módszerek

Logikai műveletek, kvantorok. Indirekt bizonyítás. A $\sqrt{2}$ irracionális. Teljes indukció. Bernoulli-egyenlőtlenség. AM-GM egyenlőtlenség. HM-GM egyenlőtlenség. (TK 15–24)

2. Halmazelméleti alapfogalmak

Halmaz, elem, részhalmaz. Halmazok megadása. Műveletek. Új halmaz képzésének szabályai (egy halmaz bizonyos tulajdonságú elemei, halmaznak operáció szerinti képe, hatványhalmaz, végtelen halmaz.) Pár. Descartes-szorzat. Kétváltozós relációk. Függvények. Halmaz képe és ősképe. Sorozatok. (TK 26–31)

3. A valós számok axiómái I.

Konstruktív és axiomatikus felépítések. A testaxiómák és következményeik. A rendezési axiómák és következményeik. A 0 és az 1 egyértelmű, és $(ab = 0) \Leftrightarrow (a = 0 \wedge b = 0)$. Abszolút érték. Háromszög-egyenlőtlenség. (TK 32–36; 57–59)

4. A valós számok axiómái II.

Az Arkhimédészi axióma. A Cantor-axióma. $\mathbb{Q}$ sűrű. A k-adik gyök létezése. (TK 36–41)

5. Tizedestörtek

A tizedestört alak létezése. Egy-, illetve kétértelműség. Az irracionális számok halmaz sűrű. Azok a testek, amikben teljesül a 15 axióma, izomorfak. A számegyenes. Intervallumok fajtái. Minden intervallum konvex. (TK 42–47)

6. Korlátos számhalmazok

Felülről és alulról korlátos halmaz. A legkisebb felő korlát tétele. Legnagyobb alsó korlát. Halmazok szuprémuma és infimuma. (Az üres halmazé is.) Komplexusösszeg szuprémuma és infimuma. Minden konvex halmaz intervallum. A k-adik gyök létezésének bizonyítása legkisebb felső korláttal. (TK 48–52)

7. Hatványozás

Haatványozás pozitív egész, egész, racionális és valós kitevőre. A hatványozás azonosságai. (Bizonyítás valós kitevőre is.) Monotonitás. (TK 53–56).

8. Sorozatok határértéke

Sorozatok megadása. Alulról és felülről korlátos sorozatok. Véges és végtelen határértékek. Egységes definíció környezetekkel. Konvergens, divergens és "oszcillálva" divergens sorozatok. Határérték és korlátosság kapcsolata. A határérték egyértelmű. Az n^p, $\sqrt[p]{n}$, a^n, $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{n}$ sorozatok határértéke. (TK 60–73).

9. A határérték alaptulajdonságai

Részsorozatok viselkedése. A konvergenciaviselkedés nem változik, ha a sorozatot átrendezzük, az elemeket véges sokszor megismételjük, a sorozathoz véges sok tagot hozzáveszünk vagy elhagyunk. Torlódási pont. Monoton sorozat határértéke (a $\nearrow$ és $\searrow$ jelölés is). (TK 74–76, 90–91)

10. Sorozatok határértéke és műveletek

Az összegsorozat határértéke. Kritikus határértékek. Korlátos és 0-hoz tartó sorozat szorzatának határértéke. Szorzatsorozat határértéke. Reciprok sorozat és hányadossorozat határértéke. Nem 0 számhoz tartó és 0-hoz tartó sorozat hányadosának határértéke. (TK 79–85).

11. Sorozatok limesz szuperiora és limesz inferiora; határérték és egyenlőtlenségek

Számsorozat limesz szuperiora és limesz inferiora. Kapcsolat a $\inf\sup$ és $\limsup$, illetve $\sup\inf$ és $\liminf$ között. A $\limsup$, illetve $\liminf$ a legnagyobb érték, ahova részsorozat tart. $\liminf \leq \limsup$. A véges és végtelen határértékek jellemzése $\liminf$-fel és $\limsup$-pal. Határátmenet. A rendőr-elv és változatai. (TK 77–79, 90–91).

12. Végtelenhez tartó sorozatok nagyságrendje

Két polinom hányadosának határértéke. Ha $\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, akor $a_n \to 0$. az $\frac{a^n}{n^p}$ és az $\frac{a^n}{n!}$ határérték. Végtelenhez tartó sorozatok nagyságrendje. Ekvivalencia, részbenrendezés és aszimptotikus egyenlőség. (TK 86–89).

13. Korlátos sorozatok

Az e definíciója, Stirling-formula (bizonyítás nélkül). Monoton részsorozat létezése. Bolzano-Weierstrass tétel. Cauchy-kritérium. A valós számok konstruktív felépítése Cauchy-sorozatok ekvivalenciaosztályaival. (TK 91–100).

14. Megszámlálható és nem megszámlálható halmazok I.

Megszámlálható halmaz. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ megszámlálható. Megszámlálható halmaz része és megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója megszámlálható. $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_k]$, az algebrai számok halmaza megszámlálható. $[0, 1)$ nem megszámlálható. Injektív, szürjektív és bijektív függvények. Halmazok számosságának összehasonlítása. Kontinuum. (TK 102–105)

15. Megszámlálható és nem megszámlálható halmazok II.

Cantor-Schröder-Bernstein tétel. Végtelen és megszámlálható halmaz uniójának számossága. Az irracionális számok, transzcendens számok, nem elfajuló intervallumok, valamint $P(\mathbb{N})$ számossága kontinuum. Bármely H halmazra $|H| < |P(H)|$. (TK 105–106)

16. Valós függvények alaptulajdonságai

Grafikon, műveletek. Páros és páratlan függvény, alulról és felülről korlátos függvény, (Szigorúan) konvex és konkáv függvények. Jensen-egyenlőtlenség. x^2 $\mathbb{R}$-en és $1/x$ $(0, \infty)$-en szigorúan konvex. (TK 108–108; 114–120)

17. Valós függvények folytonossága és határértéke

Folytonosság és féloldali folytonosság. Példák. Környezetek és féloldali környezetek. Véges határérték véges helyen. Határérték és folytonosság kapcsolata. A véges határérték egyértelmű. A 15-féle határérték. Pontozott környezetek. Egységes definíció. (TK 124–136).

18. Valós függvények limesz inferiora és limesz szuperiora I.

Függvények limesz szuprémuma és limesz inferiora. $\liminf \leq \limsup$. Ha $b > \limsup_\alpha f$, akkor létezik α-nak olyan $\dot{U}$ pontozott környezete, hogy $\forall x \in \dot{U}$ $f(x) < b$. Ha $b < \limsup_\alpha f$, akkor α-nak minden $\dot{U}$ pontozott környezetében $\exists x \in \dot{U}$ $f(x) > b$. $\lim = \infty$ akkor és csak akkor, ha $\liminf = \infty$. $\lim = -\infty$ akkor és csak akkor, ha $\limsup = -\infty$. $\lim = b$ akkor és csak akkor, ha $\liminf = \limsup = b$. Akkor és csak akkor létezik $\lim$, ha $\liminf = \limsup$. A hatérérték egyértelmű.

19. Valós függvények limesz inferiora és limesz szuperiora II.

Halmaz torlódási pontja. Függvény folytonossága, határértéke, limesz szuperiora és limesz inferiora valamilyen halmazra szorítkozva. Ha α torlódási pontja az A halmaznak, továbbá α egy $\dot{U}$ pontozott környezete és A metszetén $f \leq g$, akkor $\limsup_{\alpha,A} f \leq \limsup_{\alpha,A} g$ és $\liminf_{\alpha,A} f \leq \liminf_{\alpha,A} g$. Ha $\limsup_{\alpha,A} f < \liminf_{\alpha,A} g$, akkor egy pontozott környezet és A közös részében $f < g$. A rendőr-elv és változatai. A függvényekre vonatkozó Cauchy-kritérium.

20. Átviteli elv

Tetszőleges olyan (x_n) sorozatra, amire $x_n \in A$, $x_n \neq \alpha$ és $x_n \to \alpha$, teljesül, hogy $\liminf_{\alpha,A} f \leq \liminf f(x_n) \leq \limsup f(x_n) \leq \limsup_{\alpha,A} f$. Létezik olyan (x_n) sorozat, amire $x_n \in A$, $x_n \neq \alpha$, $x_n \to \alpha$ és $f(x_n) \to \limsup_{\alpha,A} f$. A határértékre vonatkozó átviteli elv. A folytonossága vonatkozó átviteli elv. (TK 139–142),

21. Függvények határértéke és műveletek

Összeg-, szorzat- és hányadosfüggvény határértéke. Összeg-, szorzat- és hányadosfüggvény folytonossága. Összetett függvény határértéke és folytonossága. Szigorúan monoton függvény inverze folytonos az értékkészletre megszorítva. Áttérés új változóra. Nagyságrendek összehasonlítása. (0-hoz tartó függvényeké is.) Aszimptotikus egyenlőség. (TK 146–147; 149–153).

22. Korlátos, zárt intervallumon folytonos függvények I.

Bolzano-tétel. Konvex halmaz folytonos képe konvex, intervallum folytonos képe intervallum. Weierstrass-tétel. Korlátos zárt intervallum folytonos képe korlátos zárt intervalum. (TK 156-161)

23. Korlátos, zárt intervallumon folytonos függvények II.

Borel fedési tétel. Kompakt halmaz. A Weierstrass-tétel nem üres, kompakt halmazokra. Egyenletes folytonosság. Heine-tétel. Folytonosság, egyenletes folytonosság és Lipschitz-tulajdonság kapcsolata. (TK 162-165)

24. Monotonitás és folytonosság

Szakadási helyek fajtái. Példák. Monoton függvény értékének és féloldai határértékének összhasonlítása. Monoton függvénynek csak elsőfajú szakadási helyei vannak. Monoton függvénynek csak megszámlálható sok szakadási helye van. Szigorúan monoton függvény inverze. (TK 166–170).

> FYI: *A könytől eltérően csak azokat a szakadási helyeket neveztem ugráshelynek, ahol a féloldali határértékek léteznek és végesek.* Ha ezt a definíciót használjuk, akkor például az $1/x$ függvénynek a 0-ban másodfajú szakadása van.

25. Konvexitás és folytonosság

Gyengén konvex függények. Ha egy gyengén konvex függvény felülről korlátos, akkor konvex. Ha egy gyengén konvex függvény folytonos, akkor konvex. Ha egy konvex függvény szigorúan gyengén konvex, akkor szigorúan konvex. (TK 171–174.

26. A függvénygrafikon ívhosza

A grafikon ívhossza, mint a beírt töröttvonalak hosszának felső határa. Alsó becslés. Felső becslés monoton függvényekre. Additivitás. A π definíciója. $2\sqrt{2} \leq \pi \leq 4$. Az $S(u) = s\big(\sqrt{1-x^2}; [u,1]\big)$ függvény tulajdonságai: monotonitás, folytonosság, alsó és felső becslés $0 < u < 1$ esetén. (TK 176–181)

27. Polinomok, racionális törtek, hatvány- és exponenciális függvények, logaritmus

Polinomok és racionális tört függvények. Folytonosság, határérték $\pm\infty$-ben. Az a alapú exponenciális függvény. Folytonosság, konvexitás, határérték. Bernoulli-egyenlőtlenség. Hatványfüggvények. Folytonosság, konvexitás, határérték $\pm\infty$-ben. Logaritmusfüggvények. Folytonosság, konvexitás, határérték $+0$-ban és ∞-ben. A logaritmus azonosságai (bizonyítás nélkül). (TK 182–1890; 197–199)

28. Nevezetes egyenlőtlenségek

Súlyozott hatványközepek. Az $b \to 0$, $b \to \infty$ és $b \to -\infty$ határesetek. (Az előbbi bizonyítás nélkül.) A súlyozott közepek közötti egyenlőtlenségek. Hölder-egyenlőtlenség, Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenség. (TK 194–196, 199–200).

29. Az e^x és az $\ln x$ függvény

Az $(1+\frac{1}{x})^x$ és az $(1+\frac{1}{x})^{x+1}$ függvény monotonitása és határértéke. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$, $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{b}{x})^x = e^b$ és $\lim\limits_{h\to 0}(1+bh)^{1/h} = e^b$. Természetes logaritmus. $e^x \geq 1+x$ és $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$, illetve $\ln(1+x) \leq x$ és $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$. (TK 190–191).

30. Trigonometrikus függvények és inverzeik

Trigonometrikus függvények. Azonosságok. Az addíciós tételek bizonyítása. Periodicitás, folytonosság, Lipschitz-tulajdonság, monotonitás, konvexitás, határértékek. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ és $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$. Arkusz függvények. (TK 203–209, 217).

31. Hiperbolikus függvények és inverzeik

A hiperbolikus koszinusz, szinusz, tangens és kontangens függvények. Azonosságok. Área függvények. (TK 212–215).