Valós analízis ZH, 2008. december 3.

Matematika BSC 1. évfolyam, emelt szint

Mindegyik lapra írjátok rá a neveteket és a gyakorlatvezetőtök nevét.

Minden feladat 1 legfeljebb pontot ér. Részpontszám is kapható.

Az osztályzat az elért pontok száma, kerekítve.

Az íróeszközökön kívül más segédeszköz nem használható. (Számológép sem.)

Az előadáson és a gyakorlaton szerepelt állítások bizonyítás nélkül felhasználhatók, ha pontosan idézitek. (Pl. „Volt előadáson, hogy...")

1.

$$\lim \sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}} = ?$$

2.

$$\varliminf_{x\to\infty}\Big(\{2x\}^2-4\{x\}^2\Big)=? \qquad \varlimsup_{x\to\infty}\Big(\{2x\}^2-4\{x\}^2\Big)=?$$

3.

$$\lim \frac{\sqrt{4^n+n}-2^n}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = ?$$

4. Definiáljuk az $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozatot a következő rekurzióval:

$$x_1=\sqrt{10}; \qquad x_{n+1}=\frac{6}{5-x_n} \quad (n=1,2,\ldots).$$

Számítsd ki a sorozat határértékét.

5. Igazold, hogy ha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ szigorúan monoton növekvő és konvex, akkor f^{-1} konkáv az $(\inf f, \sup f)$ intervallumon.

6. Bizonyítsd be, hogy ha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ folytonos, periodikus függvény, akkor

$$(\forall a\in\mathbb{R})\ \Big((\exists x\in\mathbb{R})\ \big(f(x+a)=f(x)\big)\Big).$$

7. Bizonyítsd be, hogy tetszőleges $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény szigorú lokális maximumhelyeinek halmaza megszámlálható. (Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvénynek akkor van szigorú lokális maximumhelye az $a\in\mathbb{R}$ pontban, ha $(\exists\delta>0)\ \Big(\big(\forall x\in\dot{B}(a,\delta)\big)\ (f(x)<f(a))\Big)$).