Valós analízis gyakorlat, 2009. február 9.

1. (a) Fejezzük ki $\operatorname{sh} x$-et és $\operatorname{ch} x$-et csak $\operatorname{th} x$-szel.
(b) Fejezzük ki $\operatorname{sh} x$-et és $\operatorname{ch} x$-et csak $\operatorname{th} \frac{x}{2}$-vel.

2.

$$\operatorname{ar\,ch} x = ? \qquad \operatorname{ar\,th} x = ?$$

3. Mi $U_n(x)$ és $T_n(x)$ fő együtthatója? Mi a konstans tagjuk? Mi a kapcsolat $T_n(x)$ és $U_n(x)$ között?

4. Igazoljuk, hogy a $(-\infty, -1)$ intervallumban az $\operatorname{ar\,cth}$ függvény szigorúan konkáv.

5. Igazoljuk, hogy $u > 0$ esetén

$$\frac{\sqrt{2u}}{1+u} < \operatorname{ar\,ch}(1+u) < \sqrt{2u}.$$

6. Legyen

$$f(x) = \frac{1}{2}T_0(x) + T_1(x) + T_2(x) + \ldots + T_n(x).$$

Keress felső becslést $f(x)$-re, ha $-1 < x < 1$.

7. Egy f függvényt *algebrai függvénynek* nevezünk, ha létezik olyan $p(x, y)$ kétváltozós polinom, ami nem az azonosan 0, és

$$\forall x \in D(f) \quad p\big(x, f(x)\big) = 0.$$

Ha f nem algebrai, akkor *tanszcendens.*

Bizonyítsuk be, hogy
(a) minden polinom és racionális tört függvény algebrai;
(b) az $|x|$, a $\sqrt{x+1}$ és a $\sqrt[3]{\dfrac{x^2-1}{x+2}}$ algebrai függvények;
(c) az e^x, a $\log x$, a $\sin x$ és a $\cos x$ transzcendens.

8. Lehet-e egy nem konstans algebrai függvény periodikus?

Házi feladatok

9. (a) Fejezzük ki $\operatorname{sh} x$-et és $\operatorname{ch} x$-et csak $\operatorname{cth} x$-szel.
(b) Fejezzük ki $\operatorname{sh} x$-et és $\operatorname{ch} x$-et csak $\operatorname{cth} \frac{x}{2}$-vel.

10.

$$\operatorname{ar\,sh} x = ? \qquad \operatorname{ar\,cth} x = ?$$

11. Igazoljuk, hogy

$$T_n(\operatorname{ch} x) = \operatorname{ch} nx \qquad \text{és} \qquad U_n(\operatorname{ch} x) \cdot \operatorname{sh} x = \operatorname{sh}(n+1)x.$$

12. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amire teljesül az

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

függvényegyenlet. Igazoljuk, hogy $f(x) = 0$ vagy $f(x) = \cos ax$ vagy $f(x) = \operatorname{ch} ax$ valamilyen a konstanssal.

13*. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n-hez létezik olyan $p(x)$ polinom, amelynek foka kisebb, mint $10\sqrt{n}$, és

$$p(0) > |p(1)| + |p(2)| + \ldots + |p(n)|.$$