Valós analízis gyakorlat, 2009. március 2.

1. Egy $a \times b$ méretű papírból felül nyitott dobozt készítünk úgy, hogy a sarkaiból levágunk egy-egy $c \times c$-es négyzetet, és az oldalakat felhajtjuk. Hogyan válasszuk meg a c értékét, hogy a doboz térfogata a lehető legnagyobb legyen?

2. Legyen $f(x) = x^n \cdot e^{-x}$. $f\big((0,\infty)\big) =?$

3. Legyen $a < b < c$, az f függvény folytonos $[a,c]$-ben és kétszer differenciálható (a,c)-ben, továbbá $f(a) = f(b) = f(c)$. Igazoljuk, hogy f''-nek létezik nullhelye (a,c)-ben.

4. A Lagrange-középértéktétel felhasználásával igazoljuk, hogy ha f differenciálható $\mathbb{R}$-en és f' korlátos, akkor f Lipschitz.

5. Igazoljuk, hogy ha f kétszer differenciálható az $[0,2]$ intervallumban, akkor létezik olyan $\xi \in (0,2)$, amire $f(0) - 2f(1) + f(2) = f''(\xi)$.

6. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n pozitív egész számra és $x > 0$-ra

$$\frac{\binom{n}{0}}{x} - \frac{\binom{n}{1}}{x+1} + \frac{\binom{n}{2}}{x+2} - \frac{\binom{n}{3}}{x+3} + - \ldots + (-1)^n \frac{\binom{n}{n}}{x+n} > 0.$$

Házi feladatok

7. Határozd meg a $\sin \sin x$ függvény abszolút szélsőértékhelyeit a $[-\pi/2, \pi/2]$ intervallumban.

8. Legyen $a < b < c$ és f folytonos $[a,c]$-ben, és kétszer differenciálható (a,c)-ben, továbbá $f(a) = a^2$, $f(b) = b^2$ és $f(c) = c^2$. Igazoljuk, hogy létezik olyan $\xi \in (a,c)$, amire $f''(\xi) = 2$.

9. Legfeljebb hány nullhelye lehet egy $e^x + p(x)$ alakú függvénynek, ha p egy n-edfokú polinom?

10. Az f függvény háromszor differenciálható, $f(-1) = 0$, $f(1) = 1$ és $f'(0) = 1$. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $\xi \in (-1,1)$, amire $f'''(\xi) = 3$.