Valós analízis gyakorlat, 2009. március 5. 12^{05}–13^{00}

Első ZH: 2009. március 31.

1. Bizonyítsuk be, hogy $\cos x \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

2. Legyen $x < 0$ és n pozitív egész. Melyik nagyobb?

$$e^x \qquad \text{vagy} \qquad 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}?$$

3. Függvényvizsgáljuk az $\dfrac{e^x - 1}{1 - x^2}$ függvényt.

4. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényhez létezik olyan $\xi \in (a, b)$, amire

$$\underline{f'(\xi)} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \overline{f'(\xi)}.$$

„Ha valakinek rossz kedve van, akkor egy sor ξ írásával ezen segíthet.” (Buczolich Zoltán)

5. A Lagrange-középértéktétel felhasználásával igazoljuk, hogy ha $f'(a+0)$ létezik, akkor $f'_+(a)$ is létezik és egyenlőek.

6. Bizonyítsuk be, hogy ha $a > 1$ és $0 < x < \frac{\pi}{a}$, akkor

$$\frac{\sin ax}{\sin x} < a e^{-\frac{a^2-1}{6} x^2}.$$

Házi feladatok

7. Bizonyítsuk be, hogy $x > 0$ esetén

$$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + - \ldots - \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} < \sin x < \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + - \ldots - \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}$$

és

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \ldots - \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \ldots + \frac{x^{4n}}{(4n)!}.$$

8. Függvényvizsgáljuk az $\sqrt[x]{x}$ függvényt.

9. Legyen $[a, a+\delta) \subset D(f)$. Rakjuk nagyság szerint sorba:

$$\overline{f'_+}(a) \qquad \underline{f'_+}(a) \qquad \overline{\lim_{a+0}}\, \overline{f'} \qquad \overline{\lim_{a+0}}\, \underline{f'} \qquad \underline{\lim_{a+0}}\, \overline{f'} \qquad \underline{\lim_{a+0}}\, \underline{f'}$$