Valós analízis gyakorlat, 2009. március 9. 8^{40}–10^{00}

Első ZH: 2009. március 31.

1. Függvényvizsgáljuk az $\frac{\pi}{4}x - \operatorname{arc\ tg} x$ függvényt.

2. (a) Igazoljuk, hogy az $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$ függvény szigorúan konkáv a $(-\infty, 0)$ intervallumon.

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha $0 \le a, b \le 1$, akkor

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \le \frac{2}{\sqrt{1+ab}}.$$

3. Legyen f konvex $(0,1)$-en. Igazoljuk, hogy $\lim\limits_{1-0} f'_- = \lim\limits_{1-0} f'_+$.

4. Mutassunk példát olyan, akárhányszor differenciálható f függvényre, amire $x \ne 0$ estén $f(x) > 0$ és $f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = 0$.

5. Legyen f egy elég sokszor differenciálható függvény. Az f *osztott differenciáit az* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *alappontokon* így jelöljük és definiáljuk:

$$f[x_0] = f(x_0);$$

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}]}{x_n - x_{n-1}} \qquad \text{ha} \quad x_{n-1} \ne x_n;$$

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}, x]'\Big|_{(x=x_n)} \qquad \text{ha} \quad x_{n-1} = x_n.$$

(a) Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$. $f[x, y, z] = ?$

(b) Igazoljuk, hogy ha f kétszer differenciálható, $x \le y \le z$ és $x \ne z$, akkor létezik olyan $\xi \in (x, z)$, amire $\frac{f''(\xi)}{2} = f[x, y, z]$.

(c) Bizonyítsuk be, hogy az osztott differencia nem függ az $x_0, \ldots, x_n$ számok sorrendjétől.

(d) Igazoljuk, hogy ha f n-szer differenciálható és az $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ valós számok nem mind egyenlők, akkor

$$\exists \xi \in \big(\min x_i, \max x_i\big) \quad \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} = f[x_0, x_1, \ldots, x_n].$$

Házi feladatok

6. Legyen $0 < x, y < \pi$. Melyik nagyobb: $\sin \sqrt{xy}$, vagy $\sqrt{\sin x \cdot \sin y}$?

7. Legyen f konvex $(0,1)$-en. Igazoljuk, hogy ha $\lim\limits_{1-0} f = \infty$, akkor $\lim\limits_{1-0} f'_- = \lim\limits_{1-0} f'_+ = \infty$.

8. Általánosítsuk a Cauchy-középértéktételt osztott differenciákkal.

9. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható, $f(0) = 2$, $f'(0) = -2$ és $f(1) = 1$. Igazoljuk, hogy létezik olyan $\xi \in (0,1)$ valós szám, amire

$$f(\xi) \cdot f'(\xi) + f''(\xi) = 0.$$