Valós analízis gyakorlat, 2009. március 16. 8^{40}–10^{00}

1.

$$\lim_{x\to 0} \log_{(\operatorname{ch} ax)}(\cos bx) = ? \qquad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1+e^x}{1+\cos x}\right)^{\operatorname{ctg} x} = ?$$

2. Írjuk fel az f függvény első néhány Taylor-polinomját a 2 körül, ha $f(2) = 1$, $f'(2) = 3$, $f''(2) = 4$ és $f'''(2) = 8$.

3. Igazoljuk, hogy ha f akárhányszor differenciálható az I intervallumban, és létezik olyan K, hogy $|f^{(n)}| < K^n$ minden $x \in I$-re és $n \in \mathbb{N}$-re, akkor

$$f(x) = \lim \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!}(x-a)^k$$

minden $a, x \in I$-re.

4. Van-e olyan intervallum, amin az függvényhez tartanak a McLaurin polinomjai?

5. Igaz-e, hogy ha az f függvény $(n+1)$-szer differenciálható függvény az $[a, b]$ intervallumon és az a körüli n-edik Taylor-polinomja t_n, akkor

(a) $\exists c \in (a, b) f(x) - t_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(c-a)^{n+1}$?

(b) $\exists c \in (a, b) f(x) - t_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-c)^{n-1}(x-a)^2$? $(n > 2)$

(c) $\exists c \in (a, b) f(x) - t_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$?

6. Igazoljuk, hogy ha f akárhányszor differenciálható az $(a-\varepsilon, b)$ intervallumon és mindegyik deriváltja állandó előjelű $[a, b]$-n, akkor az a-beli Taylor-polinomjai tartanak f-hez.

Házi feladatok

7.

$$\lim_{x\to 1} x^{1/(1-x)} = ? \qquad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\operatorname{ctg} x} = ?$$

8. Igazoljuk, hogy ha az $[a, b]$ intervallumon $|f^{(n)}| < n^{\sqrt{n}}$, akkor f Taylor-polinomjai f-hez tartanak.

9. Igazoljuk, hogy tetszőleges a_n valós számsorozathoz létezik olyan, akárhányszor differenciálható f függvény, amire $f^{(n)}(0) = a_n$.