Valós analízis gyakorlat, 2009. március 23. 8^{40}–10^{00}

1. Tegyük fel, hogy f korlátos $[0,1]$-ben, és

$$\frac{f(1/n)+f(2/n)+\ldots+f(n/n)}{n} \to A.$$

Következik-e ebből, hogy f Riemann-integrálható, és $\int_0^1 f = A$?

2. Igazoljuk, hogy ha f Riemann-integrálható $[0,1]$-ben, akkor

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f(k/n) \to 0.$$

3. Bizonyítsuk be, hogy ha $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátosak, akkor

$$\underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g \le \underline{\int_a^b}(f+g) \le \underline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g \le \overline{\int_a^b}(f+g) \le \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g.$$

Mutassunk példát olyan f,g függvényekre, amikor egyik egyenlőtlenségben sem áll egyenlőség.

4. Igazoljuk, hogy ha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ minden korlátos intervallumon Lipschitz, és g Riemann-integrálható $[a,b]$-n, akkor $f(g(x))$ is Riemann-integrálható $[a,b]$-n.

5. Igazoljuk, hogy ha $c>0$, és $f:[0,1]\to[c,\infty)$ Riemann-integrálható, akkor

$$\sqrt[n]{f(1/n)\cdot f(2/n)\cdot\ldots\cdot f(n/n)} \to e^{\int_0^1 \log f}.$$

Igaz-e ugyanez $[0,1]\to(0,\infty)$ függvény esetén?

6. Igazoljuk, hogy ha egy $[a,b]\to\mathbb{R}$ függvény korlátos, és csak megszámlálható sok pontban szakad, akkor Riemann-integrálható.

Házi feladatok

7. Adjunk példát olyan f függényre, ami korlátos, de nem Riemann-integrálható.

8. Igazoljuk, hogy ha $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ folytonos, és $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ konvex, akkor

$$\int_0^1 f(g(x))dx \le f\left(\int_0^1 g\right).$$

9. Legyen g szigorúan monoton növekvő, folytonosan differenciálható függvény $[a,b]$-ben, és f Riemann-integrálható $[g(a),g(b)]$-ben. Igazoljuk, hogy

$$\int_a^b (f\circ g)\cdot g' = \int_{g(a)}^{g(b)} f.$$

10. Igazoljuk, hogy ha egy $[0,1]\to\mathbb{R}$ függvény korlátos, és minden szakadási helye a Cantor-halmazban van, akkor Riemann-integrálható.