Valós analízis gyakorlat, 2009. március 26. 12^{05}–13^{00}

Ne feledd! ZH: 2009. márc. 31. $14^{15} - 15^{45}$; Északi Tömb, 0.81 (Ortvay terem)

1. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{ha } x \neq 0, \\ 0 & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Milyen intervallumokon integrálható ez a függvény?

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, akkor

$$\left(\int_a^b f^2\right) \cdot \left(\int_a^b g^2\right) \geq \left(\int_a^b fg\right)^2.$$

(Schwarz-egyenlőtlenség)

3. Adjuk meg a $[-2,3]$ intervallumon az alábbi függvények összes primitív függvényét, integrálfüggvényét, határozatlan integrálját és határozott integrálját!

$$|x|; \qquad \operatorname{sgn} x; \qquad 1 + x^2 \operatorname{sgn} x$$

4. Igazoljuk, hogy ha egy függvény korlátos és pozitív egy nem elfajuló intervallumban, akkor a felső integrálja is pozitív.

Házi feladatok

5. Van-e olyan függvény, aminek az $|x| - 2$ integrálfüggvénye?

6. Bizonyítsuk be, hogy ha $c > 0$, és $f : [0,1] \to (c, \infty)$ integrálható, akkor $\log f$ és $1/f$ is integrálható, és

$$\left(\int_0^1 \frac{1}{f}\right)^{-1} \leq e^{\int_0^1 \log f} \leq \int_0^1 f.$$

7. Igazoljuk, hogy ha az f függvény korlátos és felülről félig folytonos az (a,b) intervallumon (azaz $\forall c \in (a,b)$ $\overline{\lim_c} f \leq f(c)$), akkor Riemann-integrálható $[a,b]$-n.