Valós analízis gyakorlat, 2009. április 6. 8^{40}–10^{00}

1. Igazoljuk, hogy ha f-nek van primitív függvénye egy nyílt intervallumon, akkor ott nincs elsőfajú szakadása.

2. Igazoljuk, hogy a

$$f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x} & \text{ha } x \neq 0; \\ c & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvénynek akkor és csak akkor létezik primitív függvénye, ha $c = 0$.

3. Legyen $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ ha $x \neq 0$ és $f(0) = 0$. Bizonyítsuk be, hogy f-nek van primitív függvénye, de f^2-nek nincs.

Házi feladatok

4. Milyen valós c esetén létezik primitív függvénye az

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{ha } x \neq 0; \\ c & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvénynek?

5. Legyen tetszőleges f folytonos függvényre $I_0 f = f$ és $(I_1 f)(x) = \int_0^x f$. Az I_0 és az I_1 olyan lineáris operátorok, amik folytonos függvényhez folytonos függvényt rendelnek. Definiáljuk továbbá az $I_2, I_3, \ldots$ operátorokat az $I_n f = I_1 I_{n-1} f$ rekurzióval.

(a) Igazold, hogy $I_n I_k = I_{n+k}$.

(b) Keress olyan φ_n függvényt, amikre $(I_n f)(x) = \int_0^x f(t) \cdot \varphi_n(x-t)\,\mathrm{d}t$.

6. Egy alkalmas $\varphi_{1/2}$ függvényre legyen $(I_{1/2} f)(x) = \int_0^x f(t) \cdot \varphi_{1/2}(x-t)\,\mathrm{d}t$. Megválaszthatjuk-e a $\varphi_{1/2}$ függvényt úgy, hogy $I_{1/2} I_{1/2} = I_1$ teljesüljön?