

Valós analízis gyakorlat, 2009. április 16.

Déli Tömb 0-221, 12⁰⁵-13⁰⁰

1.

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^4} dx =? \quad \int x \cdot \frac{x}{(1+x^2)^2} dx =? \quad \int \frac{x^4}{(1+x^2)^3} dx =?$$

2. Számítsd ki az $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2} dx$ határozott és az $\int \sqrt{1-x^2} dx$ határozatlan integrált a következő helyettesítésekkel:

$$x = \cos t; \quad x = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}; \quad x = \frac{1-y^2}{1+y^2}.$$

3. Számítsd ki az alábbi integrálokat.

$$\int \operatorname{ctg} x dx; \quad \int_0^1 \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx; \quad \int_2^3 \frac{\sqrt{\log x}}{x} dx; \quad \int_0^1 \log(1+x^2) dx;$$

4. Az $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ folytonos függvényre $f(0) = 1$, $f'(0+0) = -\delta < 0$ és $x > 0$ esetén $f(x) < 1$. Bizonyítsd be, hogy az $a_n = n \cdot \int_0^1 f^n$ sorozat konvergens, és számítsd ki a határértékét.

Házi feladatok

5. Számítsd ki az alábbi integrálokat.

$$\int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} dx; \quad \int_0^1 \sqrt{x^3+x^2} dx; \quad \int \operatorname{ctg}(2-3x) dx; \quad \int e^x \cdot \cos(\sqrt{2}x) \cdot \sin(\sqrt{3}x) \cdot dx.$$

6. Számítsd ki az $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2} dx$ határozott és az $\int \sqrt{1-x^2} dx$ határozatlan integrált a következő helyettesítésekkel:

$$x = \frac{v}{\sqrt{1+v^2}}; \quad x = \frac{2z}{1+z^2}.$$

7. Keres legalább háromféle helyettesítést, amivel az $\int \sqrt{x^2+1} dx$ integrált ki lehet számítani.