

1.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} =? \quad \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^4 + \sin^4 x} =?$$

2. Egy egyenes körhengert elmetszünk egy síkkal, ami illeszkedik az egyik alapkör középpontjára, és érinti a másik alapkört. Milyen arányban osztja ketté ez a sík a henger térfogatát?

3. Mennyi az n -dimenziós, r sugarú gömb térfogata?

4. Legyen tetszőleges $\alpha \geq 0$ -ra $I_\alpha = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t)^\alpha dt$.

(a) Számítsd ki I_α -t, ha α egész szám.

(b) Bizonyítsd be, hogy $\alpha \rightarrow \infty$ esetén $I_\alpha \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\alpha}}$.

(c) Bizonyítsd be, hogy $I_\alpha \cdot I_{\alpha+1} = \frac{2\pi}{\alpha + 1}$.

5. Az $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ folytonos függvényre teljesül, hogy

$$\forall x \in [0, \infty) \quad f^2(x) \leq 1 + 4 \int_0^x tf(t) dt.$$

Igazoljuk, hogy $f(x) \leq x^2 + 1$.

Házi feladatok

6.

$$\int \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx =? \quad \int \frac{dx}{1 + \cos x} =?$$

7. A szinuszfüggvény grafikonjának 0 és π közötti ívét megforgatjuk az x -tengely körül. Mekkora az így kapható, szivar alakú test térfogata?

8. Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty]$ függvény folytonos, az $c \in (a, b)$ pontban kétszer differenciálható, $f(c) = 1$, $f''(c) = -d < 0$, és $x \neq c$ esetén $f(x) < 1$.

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\alpha} \int_a^b f^\alpha \right) =?$$