

Matematika BSC 1. évfolyam, emelt szint

Mindegyik lapra írjátok rá a neveketet.

Minden feladat 1 legfeljebb pontot ér. Részpontoszám is kapható.

Az osztályzat az elért pontok száma, kerekítve.

Az íróeszközökön kívül más segédeszköz nem használható. (Számológép sem.)

Az előadáson és a gyakorlaton szerepelt állítások bizonyítás nélkül felhasználhatók, ha pontosan idézitek. (Pl. „Volt előadáson, hogy...”)

1. Mi az  $x(x-1)(x-4)$  függvény legkisebb és legnagyobb értéke a  $[0, 4]$  intervallumon?
2. Függvényvizsgálj az  $\frac{e^x}{x^2}$  függvényt.
3. Bizonyítsuk be, hogy az  $x^3 - 3xy^2 = a$  és  $y^3 - 3yx^2 = b$  görbék csak merőlegesen metszhetik egymást.
4. Igazold, hogy  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  esetén

$$\cos x < e^{-x^2/2}.$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}}{3^x - \operatorname{ch} x} = ?$$

6. Igazold, hogy ha az  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos függvényre

$$\forall c \in [0, 1] \left( \overline{\lim}_{x \rightarrow c, x \in [0, 1]} f - \underline{\lim}_{x \rightarrow c, x \in [0, 1]} f \leq 1 \right),$$

akkor

$$\overline{\int}_0^1 f - \underline{\int}_0^1 f \leq 1.$$

7. Bizonyítsd be, hogy ha  $u \in (-1, 1)$  a  $T_k(x)$  Csebisev-polinom egyik inflexiós pontja, akkor

$$|T'_k(u)| = \frac{k}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)u^2}}.$$