Fourier-sorok

1. A Fourier-sorok pontonkénti divergenciájáról

Lemma. Legyen F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett és $g \in \mathscr{C}_\bullet([-\pi,\pi];\mathbb{K})$. Ekkor az

$$u_g : \mathscr{C}_\bullet([-\pi,\pi];F) \to F; \quad f \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} fg$$

leképezés olyan lineáris operátor, amely a sup-normában folytonos, továbbá, ha $F \neq \{0\}$, akkor

$$\|u_g\| = \int_{-\pi}^{\pi} |g|$$

teljesül.

Bizonyítás. Ha $f \in \mathscr{C}_\bullet([-\pi,\pi];F)$, akkor $\|fg\| \leq |||f|||\,|g|$, ezért

$$\|u_g(f)\| \leq |||f||| \int_{-\pi}^{\pi} |g|,$$

így az u_g lineáris operátor a sup-normában folytonos, továbbá látható, hogy

$$\|u_g\| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |g|$$

teljesül.

Tegyük fel, hogy $F \neq \{0\}$. Legyen $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges $\mathbb{R}^+$-ban haladó zérussorozat, és az Uriszon-tétel alapján vegyünk olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot $\mathscr{C}([-\pi,\pi];\mathbb{R})$-ben, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $0 \leq \varphi_n \leq 1$, és $[|g| \geq \varepsilon_n] \subseteq [\varphi_n = 1]$, valamint $supp(\varphi_n) \subseteq [g \neq 0]$. Legyen minden $\mathbb{N} \ni n$-re $h_n : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ az a függvény, amelyre minden $t \in [-\pi,\pi]$ esetén

$$h_n(t) := \begin{cases} \varphi_n(t)\dfrac{|g(t)|}{g(t)} & \text{, ha } g(t) \neq 0 \\ 0 & \text{, ha } g(t) = 0. \end{cases}$$

Ugyanúgy, mint a hányados lemma *bizonyításában*, itt is könnyen belátható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $h_n : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $|h_n| \leq 1$ és a $(h_n g)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a $|g|$-hoz egyenletesen konvergál a $[-\pi,\pi]$ intervallumon. Megmutatjuk, hogy van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq N$ esetén $h_n \in \mathscr{C}_\bullet([-\pi,\pi];\mathbb{K})$ teljesül. Ehhez két esetet különböztetünk meg.

1. eset: $g(-\pi) = g(\pi) = 0$. Ekkor a definíció szerint *minden* $n \in \mathbb{N}$ esetén $h_n(-\pi) = 0 = h_n(\pi)$, tehát $h_n \in \mathscr{C}_\bullet([-\pi,\pi];\mathbb{K})$.

2. eset: $g(-\pi) = g(\pi) \neq 0$. Ekkor legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq N$ esetén $\varepsilon_n \leq |g(\pi)| = |g(-\pi)|$, vagyis $-\pi, \pi \in [|g| \geq \varepsilon_n]$, így $\varphi_n(-\pi) = 1 = \varphi_n(\pi)$. Tehát ha $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq N$, akkor

$$h_n(-\pi) := \varphi_n(-\pi)\frac{|g(-\pi)|}{g(-\pi)} = \frac{|g(-\pi)|}{g(-\pi)} = \frac{|g(\pi)|}{g(\pi)} = \varphi_n(\pi)\frac{|g(\pi)|}{g(\pi)} =: h_n(\pi),$$

vagyis $h_n \in \mathscr{C}_\bullet([-\pi, \pi]; \mathbb{K})$ teljesül.

Ezzel beláttuk, hogy létezik olyan $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{C}_\bullet([-\pi, \pi]; \mathbb{K})$-ben, amely a sup-norma szerinti egységgömbben halad, és a $(h_n g)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a $|g|$-hoz egyenletesen konvergál a $[-\pi, \pi]$ intervallumon. (Ugyanis az 1. esetben az eredeti $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat ilyen, míg a 2. esetben az eredeti $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatról át kell térni a $(h_{n+N})_{n\in\mathbb{N}}$ részsorozatra.) Ebből a g korlátossága miatt következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} h_n g = \int_{-\pi}^{\pi} |g|.$$

Legyen $z \in F$ olyan vektor, amelyre $\|z\| = 1$, és képezzük a $(h_n.z)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatot. Ez a sup-norma szerinti egységgömben halad $\mathscr{C}_\bullet([-\pi, \pi]; F)$-ben, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$u_g(h_n.z) := \int_{-\pi}^{\pi} ((gh_n).z) = \left(\int_{-\pi}^{\pi} gh_n\right).z,$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty} u_g(h_n.z) = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g|\right).z$$

Ebből következik, hogy

$$\|u_g\| \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_g(h_n.z)\| \geq \lim_{n\to\infty} \|u_g(h_n.z)\| = \int_{-\pi}^{\pi} |g|,$$

ami azt jelenti, hogy

$$\|u_g\| = \int_{-\pi}^{\pi} |g|$$

teljesül. ■

Lemma. A Dirichlet-féle magfüggvényre fennáll a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n| = +\infty$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Azt az ismert tényt fogjuk felhasználni, hogy a

$$\mathrm{sinc} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(t)}{t} & , \text{ha } t \neq 0 \\ 1 & , \text{ha } t = 0. \end{cases}$$

sinus cardinalis függvény abszolút értéke nem Lebesgue-integrálható a $[0, \to[$ intervallumon.

Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ rögzítve. Ekkor a D_n függvény párossága és explicit trigonometrikus alakja szerint:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n| = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\left|\sin((n+\frac{1}{2})t)\right|}{\sin(t/2)} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\left|\sin((n+\frac{1}{2})t)\right|}{t} \right) \left(\frac{t/2}{\sin(t/2)} \right) dt.$$

Ha $t \in]0, \pi]$, akkor

$$1 \leq \frac{t/2}{\sin(t/2)} \leq \frac{\pi}{2},$$

ezért

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n| \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\left|\sin((n+\frac{1}{2})t)\right|}{t} dt.$$

Itt, a jobb oldalon álló integrálban végrehajtjuk a $\tau := (n + \frac{1}{2})t$ helyettesítés, így azt kapjuk, hogy

$$\int_0^{\pi} \frac{\left|\sin((n+\frac{1}{2})t)\right|}{t} dt = \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{|\sin(\tau)|}{\tau} d\tau = \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} |\mathrm{sinc}|,$$

tehát fennáll az

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n| \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} |\mathrm{sinc}|$$

egyenlőtlenség. A jobb oldal $+\infty$-hez tart, ha $n \to \infty$, ami a lemmát igazolja. ■

Állítás. Létezik olyan $f \in \mathscr{C}_\bullet([-\pi, \pi]; \mathbb{R})$ függvény, amelynek a klasszikus trigonometrikus Fourier-sora a 0 pontban divergens.

Bizonyítás. Tekintük a $\mathscr{C}_\bullet([-\pi, \pi]; \mathbb{R})$ vektorteret a sup-normával ellátva: ez valós Banach-tér. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén értelmezzük az

$$u_n : \mathscr{C}_\bullet([-\pi, \pi]; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}; \quad f \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} f D_n$$

leképezést, amely az első lemma szerint olyan folytonos lineáris funkcionál, amelyre

$$\|u_n\| = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |D_n|.$$

Ha az $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ funkcionál-sorozat pontonként konvergálna $\mathscr{C}_\bullet([-\pi,\pi];\mathbb{R})$-n, akkor a Banach-Steinhaus tétel alapján

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^+} \|u_n\| < +\infty$$

teljesülne, holott a második lemma szerint ez a szuprémum egyenlő $+\infty$-vel. Ezért van olyan $f \in \mathscr{C}_\bullet([-\pi,\pi];\mathbb{R})$, amelyre az $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}^+}$ valós számsorozat divergens. Ugyanakkor nyilvánvaló, hogy $f \in \mathscr{C}_\bullet([-\pi,\pi];\mathbb{R})$ és $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$u_n(f) := \int\limits_{-\pi}^{\pi} fD_n = S_n(f)(0),$$

amivel az állítást igazoltuk. ■

2. Az integrálszámítás második középértéktétele

Definíció. Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és F vektortér, akkor $\mathscr{E}(I;F)$ jelöli azon $I \to F$ függvények halmazát, amelyekhez létezik I által tartalmazott *korlátos* intervallumoknak olyan $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ véges rendszere, és olyan $(z_\alpha)_{\alpha\in A}$ rendszer F-ben, hogy

$$f = \sum_{\alpha\in A} z_\alpha \cdot \chi_{I_\alpha}$$

teljesül.

Állítás. Ha $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a < b$, akkor minden $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton fogyó (illetve monoton növő) függvényhez létezik olyan $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $g_n \in \mathscr{E}([a,b];\mathbb{R})$, és g_n monoton fogyó (illetve monoton növő), valamint $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergál g-hez.

Bizonyítás. Ha g monoton fogyó, akkor az $[a,b]$ intervallum minden belső pontjában g-nek létezik jobboldali és baloldali határértéke, valamint létezik g-nek a-ban jobboldali és b-ben baloldali határértéke. Ezért az FVR Ch. II, § 1, N° 3, Th. 2 szerint létezik olyan $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat, amely egyenletesen konvergál g-hez, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $g_n \in \mathscr{E}([a,b];\mathbb{R})$; továbbá az idézett tétel *bizonyítása* szerint minden $\mathbb{N} \ni n$-re g_n monoton fogyó (illetve monoton növő). ■

Tétel. (*Az integrálszámítás második középértéktétele.*) Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a < b$ és F Banach-tér. Tegyük fel, hogy $f \in \mathscr{L}^1_F([a,b])$ és $u : [a,b] \to F$ olyan függvény, amelyre minden $x, y \in [a,b]$ és $x \leq y$ esetén

$$\int\limits_x^y f = u(y) - u(x)$$

teljesül. Ekkor minden $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *monoton* függvényhez létezik olyan $z \in \overline{Conv(Im(u))}$, hogy fennáll a

$$\int_a^b g.f \;=\; g(a).(z-u(a)) + g(b).(u(b)-z)$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Az állítás jellege alapján nyilvánvalóan elegendő monoton *fogyó* függvényekre bizonyítani. Továbbá, ha $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton fogyó függvény, akkor $g(a) > g(b)$ is feltehető, különben az állítás *minden* $z \in \overline{Conv(Im(u))}$ vektorra igaz.

(I) Először feltesszük, hogy $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton fogyó és eleme $\mathscr{E}([a,b];\mathbb{R})$-nek, tehát létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ és $(c_k)_{0\le k\le n}$ szigorúan monoton növő rendszer az $[a,b]$ intervallumban, és olyan $(\lambda_k)_{0\le k\le n-1}$ monoton fogyó rendszer $\mathbb{R}$-ben, hogy $c_0 = a$, $c_n = b$, és

$$g = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k.\chi_{]a_k,a_{k+1}[}$$

teljesül az $[a,b] \setminus \{c_k | 0 \le k \le n\}$ halmazon. E mellett, a $\{c_k | 0 \le k \le n\}$ halmaz pontjaiban (az *osztópontokban*) g értékei bármilyenek lehetnek, azzal a feltétellel, hogy g monoton fogyó legyen. Világos, hogy $\lambda_0 = g(a+0) \le g(a)$ és $\lambda_{n-1} = g(b-0) \ge g(b)$, továbbá feltesszük, hogy $g(a) > g(b)$.

Ha $g(a+0) = g(b-0)$ és λ jelöli ezt a közös értéket, akkor

$$\int_a^b g.f = \lambda.\int_a^b f = \lambda.(u(b)-u(a)),$$

továbbá $g(a) \ge g(a+0) = \lambda = g(b-0) \ge g(b)$, ezért $g(a) > g(b)$ miatt a

$$z := \left(\frac{g(a)-\lambda}{g(a)-g(b)}\right).u(a) + \left(\frac{\lambda-g(b)}{g(a)-g(b)}\right).u(b) \in Conv(Im(u))$$

vektorra

$$\int_a^b g.f \;=\; g(a).(z-u(a)) + g(b).(u(b)-z)$$

teljesül, így z olyan vektor, amelynek a létezését állítottuk (sőt ekkor még $z \in Conv(Im(u))$ is teljesül).

Tegyük most fel, hogy $\lambda_0 = g(a+0) > g(b-0) = \lambda_{n-1}$. Ekkor

$$\int_a^b g.f = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k.\int_{c_k}^{c_{k+1}} f = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k.\,(u(c_{k+1})-u(c_k)) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k.u(c_{k+1}) - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k.u(c_k) =$$

$$= (\lambda_0 - \lambda_{n-1}).\sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{\lambda_k - \lambda_{k+1}}{\lambda_0 - \lambda_{n-1}}\right).u(c_{k+1}) + \lambda_{n-1}.u(c_n) +$$

$$+\sum_{k=0}^{n-2}\lambda_{k+1}.u(c_{k+1})-\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k.u(c_k).$$

Nyilvánvaló, hogy

$$z' := \sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{\lambda_k-\lambda_{k+1}}{\lambda_0-\lambda_{n-1}}\right).u(c_{k+1}) \in Conv(Im(u)),$$

valamint

$$\sum_{k=0}^{n-2}\lambda_{k+1}.u(c_{k+1})-\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k.u(c_k)=\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k.u(c_k)-\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k.u(c_k)=-\lambda_0.u(c_0),$$

tehát behelyettesítve a $\lambda_0=g(a+0)$, $\lambda_{n-1}=g(b-0)$, $c_0=a$ és $c_n=b$ értékeket, azt kapjuk, hogy

$$\int_a^b g.f=(g(a+0)-g(b-0)).z'+g(b-0).u(b)-g(a+0).u(a).$$

A $g(a)>g(b)$ feltétel és a g monoton fogyása miatt nyilvánvaló, hogy a

$$z:=\left(\frac{g(a+0)-g(b-0)}{g(a)-g(b)}\right).z'+\left(\frac{g(a)-g(a+0)}{g(a)-g(b)}\right).u(a)+\left(\frac{g(b-0)-g(b)}{g(a)-g(b)}\right).u(b)$$

vektor eleme $Conv(Im(u))$-nak, és természetesen

$$\int_a^b g.f=(g(a+0)-g(b-0)).z'+g(b-0).u(b)-g(a+0).u(a)=$$

$$=(g(a)-g(b)).z+g(b).u(b)-g(a).u(a)=g(a).(z-u(a))+g(b).(u(b)-z),$$

így z olyan vektor, amelynek a létezését állítottuk (sőt ekkor még $z\in Conv(Im(u))$ is teljesül).

(II) Legyen $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ tetszőleges olyan monoton fogyó függvény, amelyre $g(a)>g(b)$. Legyen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $g_n\in\mathscr{E}([a,b];\mathbb{R})$ monoton fogyó függvény és $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergál g-hez az $[a,b]$ intervallumon. Az (I) alapján kiválaszthatunk olyan $Conv(Im(u))$-ban haladó $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, hogy minden $\mathbb{N}\ni n$-re

$$\int_a^b g_n.f \;=\; (g_n(a)-g_n(b)).z_n-g_n(a).u(a)+g_n(b).u(b)$$

teljesül. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty}g_n(a)=g(a)>g(b)=\lim_{n\to\infty}g_n(b),$$

ezért van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ esetén $g_n(a) > g_n(b)$ teljesül. Továbbá, a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen korlátos, és ha $C \in \mathbb{R}_+$ olyan, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $|||g_n||| \leq C$, akkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\|g_n.f\| \leq C.\|f\|$, így a Lebesgue-tétel alapján

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n.f = \int_a^b g.f.$$

Ugyanakkor, $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ esetén

$$z_n = \frac{\int_a^b g_n.f + g_n(a).u(a) - g_n(b).u(b)}{g_n(a) - g_n(b)},$$

amiből látható, hogy a $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, továbbá

$$z := \lim_{n\to\infty} z_n = \frac{\int_a^b g.f + g(a).u(a) - g(b).u(b)}{g(a) - g(b)}.$$

Ekkor $z \in \overline{Conv(Im(u))}$ és az előző egyenlőséget átrendezve kapjuk, hogy

$$\int_a^b g.f \;=\; g(a).(z - u(a)) + g(b).(u(b) - z)$$

teljesül. ■

Megjegyezzük, hogy ha $f \in \mathscr{L}_F^1([a,b])$ *korlátos* függvény, akkor az előző állítás bizonyításának (II) pontjában nem szükséges a Lebesgue-tételre hivatkozni, mert ekkor a $(g_n.f)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál $g.f$-hez az $[a,b]$ intervallumon, így

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n.f = \int_a^b g.f$$

akkor is teljesül, ha az $f : [a,b] \to F$ függvény *Riemann-integrálható.*

Következmény. Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a < b$ és F Banach-tér, valamint $f \in \mathscr{L}_F^1([a,b])$, és vezessük be az

$$u : [a,b] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \int_a^x f$$

leképezést. Ekkor minden $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton fogyó függvényre, ha $h(a) = 1$ és $h(b) = 0$, akkor

$$\int_a^b h.f \in \overline{Conv(Im(u))}$$

teljesül.

Bizonyítás. Az előző állítás alapján nyilvánvaló, mert $u(a) = 0$. ■

Tétel. (*Az integrálszámítás második középértéktételének valós formája.*) Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a < b$ és $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b])$. Ekkor minden $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton függvényhez létezik olyan $c \in [a,b]$, hogy

$$\int_a^b g \cdot f \;=\; g(a) \cdot \int_a^c f + g(b) \cdot \int_c^b f$$

teljesül.

Bizonyítás. Értelmezzük az

$$u : [a,b] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \int_a^x f$$

függvényt; ekkor az integrál additivitása miatt minden $x, y \in [a,b]$ és $x \leq y$ esetén

$$\int_x^y f = u(y) - u(x)$$

teljesül. Továbbá u folytonos függvény és $u(a) = 0$. Ezért az előző állítás alapján a $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton függvényhez létezik olyan $z \in \overline{Conv(Im(u))}$, amelyre fennállnak az

$$\int_a^b g \cdot f \;=\; g(a) \cdot (z - u(a)) + g(b).(u(b) - z) \;=\; g(a) \cdot z + g(b).\left(\int_a^b f - z\right)$$

egyenlőségek. Azonban $Im(u)$ korlátos és zárt intervallum, tehát $\overline{Conv(Im(u))} = Im(u)$, vagyis van olyan $c \in [a,b]$, hogy $z = \int_a^c f$. Ekkor viszont

$$g(a) \cdot z + g(b).\left(\int_a^b f - z\right) = g(a) \cdot \int_a^c f + g(b).\left(\int_a^b f - \int_a^c f\right) = g(a) \cdot \int_a^c f + g(b) \cdot \int_c^b f,$$

tehát c olyan szám, amelynek a létezését állítottuk. ■

Következmény. Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a < b$ és $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b])$. Ha a $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény *monoton fogyó és pozitív*, akkor létezik olyan $c \in [a,b]$, hogy

$$\int_a^b g \cdot f \;=\; g(a) \cdot \int_a^c f$$

teljesül.

Bizonyítás. Jelölje $\tilde{g}$ azt az $[a,b] \to \mathbb{R}$ függvényt, amely az $[a,b[$ intervallumon egyenlő g-vel, és $\tilde{g}(b) := 0$. A g pozitivitása miatt a $\tilde{g} : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény is monoton fogyó, és $\tilde{g}(a) = g(a)$, valamint $\tilde{g}(b) = 0$, ezért az integrálszámítás második középértéktételének valós formáját alkalmazva f-re és $\tilde{g}$-re kapjuk olyan $c \in [a,b]$ létezését, hogy

$$\int_a^b g \cdot f = \int_a^b \tilde{g} \cdot f = \tilde{g}(a) \cdot \int_a^c f + \tilde{g}(b) \cdot \int_c^b f = g(a) \cdot \int_a^c f$$

teljesül, ahol az első egyenlőségnél kihasználtuk, hogy g és $\tilde{g}$ a Lebesgue-mérték szerint majdnem mindenütt egyenlőek az $[a,b]$ intervallumon. ■

Megjegyzés. Az integrálszámítás második középértéktételének valós formájában lényeges, hogy az f függvény *valós értékű* legyen, tehát az állítás nem igaz vektorfüggvényekre. Tekintsük például az

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2; \quad x \mapsto (\cos(x), \sin(x))$$

függvényt. Ekkor minden $c \in [0, 2\pi]$ esetén

$$\int_0^c f = \int_0^c (\cos(x), \sin(x))\; dx = (\sin(c), 1 - \cos(c)),$$

amiből következik, hogy az

$$u : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2; \quad c \mapsto \int_0^c f$$

függvény értékkészlete egyenlő a $(0,1)$ centrumú, 1 sugarú euklidészi körívvel $\mathbb{R}^2$-ben. Ugyanakkor a

$$g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto 1 - \frac{x}{2\pi}$$

függvény monoton fogyó, pozitív, $g(0) = 1$, $g(2\pi) = 0$ és könnyen kiszámítható, hogy

$$\int_0^{2\pi} g.f = \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) (\cos(x), \sin(x))\; dx = (0, 1),$$

ami nincs rajta a $(0,1)$ centrumú, 1 sugarú euklidészi köríven $\mathbb{R}^2$-ben, ezért nem létezik olyan $c \in [0, 2\pi]$, amelyre

$$\int_0^{2\pi} g.f = \int_0^c f \quad \left(= g(0) \int_0^c f + g(2\pi) \int_c^{2\pi} f \right)$$

teljesülne. Azonban $u(0) = (0,0) = u(2\pi)$ és $z := (0,1) \in Conv(Im(u))$, tehát

$$\int_0^{2\pi} g.f = g(0).(z - u(0)) + g(2\pi).(u(2\pi) - z)$$

teljesül, így nem kerültünk ellentmondásba az integrálszámítás második középértéktételének általános formájával.

3. A trigonometrikus Fourier-sorok egyenletes konvergenciája

Lemma. (*Egyenletes Riemann-Lebesgue lemma.*) Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, F Banach-tér és $f : I \to F$ Lebesgue-integrálható függvény.

a) Fennállnak a

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} \left(\sup_{\alpha,\beta \in I;\ \alpha \leq \beta} \left\| \int_\alpha^\beta f(t) \cos(\lambda t) dt \right\| \right) = 0,$$

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} \left(\sup_{\alpha,\beta \in I;\ \alpha \leq \beta} \left\| \int_\alpha^\beta f(t) \sin(\lambda t) dt \right\| \right) = 0$$

egyenlőségek.

b) Ha F komplex Banach-tér, akkor fennállnak a

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} \left(\sup_{\alpha,\beta \in I;\ \alpha \leq \beta} \left\| \int_\alpha^\beta f(t) e^{\mathbf{i}\lambda t} dt \right\| \right) = 0$$

egyenlőségek.

Bizonyítás. A b) állítás következik a)-ból és az

$$\int_\alpha^\beta f(t) e^{\mathbf{i}\lambda t} dt = \int_\alpha^\beta f(t) \cos(\lambda t) dt + \mathbf{i} \int_\alpha^\beta f(t) \sin(\lambda t) dt$$

egyenlőségből, ezért elég a)-t igazolni.

(I) Először arra az esetre bizonyítunk, amikor f egy $\mathbb{R} \to F$ lépcsősfüggvény I-re vett leszűkítésével egyenlő, tehát van olyan $n \in \mathbb{N}$ szám, és létezik olyan $(z_k)_{0 \leq k \leq n}$ rendszer F-ben, valamint léteznek olyan $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ és $(b_k)_{0 \leq k \leq n}$ rendszerek $\mathbb{R}$-ben, hogy minden $0 \leq k \leq n$ természetes számra $a_k \leq b_k$ és

$$f = \sum_{k=0}^{n} \chi_{[a_k, b_k[}.z_k \Big|_I .$$

Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ és legyenek $\alpha, \beta \in I$ olyanok, hogy $\alpha \leq \beta$. Minden $0 \leq k \leq n$ természetes számra legyen $a'_k := \max(\alpha, a_k)$ és $b'_k := \min(\beta, b_k)$. Ekkor

$$\int_\alpha^\beta f(t) \cos(\lambda t) dt = \sum_{k=0}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{[\alpha,\beta[\cap[a_k,b_k[}(t) \cos(\lambda t) dt \right).z_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{[a'_k,b'_k[}(t) \cos(\lambda t) dt \right).z_k = \sum_{0 \leq k \leq n;\ a'_k \leq b'_k} \left(\frac{\sin(\lambda b'_k) - \sin(\lambda a'_k)}{\lambda} \right).z_k,$$

amiből következik, hogy

$$\left\| \int_\alpha^\beta f(t) \cos(\lambda t) dt \right\| \leq \frac{2}{|\lambda|} \sum_{k=0}^{n} \|z_k\|.$$

Ebből azonnal látható, hogy

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} \left(\sup_{\alpha,\beta \in I;\ \alpha \leq \beta} \left\| \int_\alpha^\beta f(t) \cos(\lambda t) dt \right\| \right) = 0$$

teljesül, és cos helyett a sin függvényre, teljesen hasonló érveléssel, kijön a

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} \left(\sup_{\alpha,\beta \in I;\ \alpha \leq \beta} \left\| \int_\alpha^\beta f(t) \sin(\lambda t) dt \right\| \right) = 0,$$

összefüggés.

(II) Legyen $f : I \to F$ Lebesgue-integrálható függvény és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Jelölje f° az f függvény 0-val vett kiterjesztését $\mathbb{R}$-re. Ekkor vehetünk olyan $g : \mathbb{R} \to F$ lépcsősfüggvényt, amelyre

$$\int^* \|f^\circ - g\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Az (I) alapján g-hez van olyan $\Lambda \in \mathbb{R}$, hogy minden $\lambda \in \mathbb{R}$ számra, ha $\lambda \geq \Lambda$ (illetve $\lambda \leq \Lambda$), akkor

$$\sup_{\alpha,\beta \in I;\ \alpha \leq \beta} \left\| \int_\alpha^\beta g(t) \cos(\lambda t) dt \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tehát ha $\alpha, \beta \in I$ és $\alpha \leq \beta$, valamint $\lambda \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $\lambda \geq \Lambda$ (illetve $\lambda \leq \Lambda$), akkor

$$\left\| \int_\alpha^\beta f(t)\cos(\lambda t)dt \right\| \leq \int_\alpha^\beta \|(f(t)-g(t))\cos(\lambda t)\|dt + \left\| \int_\alpha^\beta g(t)\cos(\lambda t)dt \right\| \leq$$

$$\leq \int^* \|f^\circ - g\| + \left\| \int_\alpha^\beta g(t)\cos(\lambda t)dt \right\| \leq \varepsilon$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy ha $\lambda \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $\lambda \geq \Lambda$ (illetve $\lambda \leq \Lambda$), akkor

$$\sup_{\alpha,\beta \in I;\ \alpha \leq \beta} \left\| \int_\alpha^\beta f(t)\cos(\lambda t)dt \right\| \leq \varepsilon,$$

így fennállnak az

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} \left(\sup_{\alpha,\beta \in I;\ \alpha \leq \beta} \left\| \int_\alpha^\beta f(t)\cos(\lambda t)dt \right\| \right) = 0$$

egyenlőségek, és cos helyett a sin függvényre, teljesen hasonló érveléssel, kijön a

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} \left(\sup_{\alpha,\beta \in I;\ \alpha \leq \beta} \left\| \int_\alpha^\beta f(t)\sin(\lambda t)dt \right\| \right) = 0,$$

összefüggés. ■

Lemma. Legyen F Banach-tér és $f : \mathbb{R} \to F$ lokálisan Lebesgue-integrálható, 2π-periódusú függvény. Ha $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $0 < a \leq b \leq \pi$, akkor

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \int_a^b f(t \pm \tau) D_n(\tau) d\tau \right\| \right) = 0$$

teljesül, vagyis az

$$\mathbb{R} \to F; \quad t \mapsto \int_a^b f(t \pm \tau) D_n(\tau) d\tau$$

függvények sorozata $n \to \infty$ esetén az $\mathbb{R}$-en egyenletesen tart 0-hoz.

Bizonyítás. Először megjegyezzük, hogy az f függvény 2π szerinti periodikussága miatt minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re az

$$\mathbb{R} \to F; \quad t \mapsto \int_a^b f(t \pm \tau) D_n(\tau) d\tau$$

függvények is 2π szerint periodikusok, ezért

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|\int\limits_a^b f(t\pm\tau)D_n(\tau)d\tau\right\| = \sup_{t\in[-\pi,\pi]}\left\|\int\limits_a^b f(t\pm\tau)D_n(\tau)d\tau\right\|$$

teljesül.

Jelölje B' a funkcionálnorma szerinti, zárt egységgömböt az F topologikus duálisában, tehát $B' := \{u \in F' | \|u\| \leq 1\}$, továbbá minden $u \in B'$ esetén legyen $f_u := \mathfrak{Re} \circ u \circ f$, tehát $f_u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokálisan Lebesgue-integrálható, 2π-periódusú függvény. Továbbá, a Hanh-Banach tételből következik, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\left\|\int\limits_a^b f(t\pm\tau)D_n(\tau)d\tau\right\| = \sup_{u\in B'}\left|(\mathfrak{Re}\circ u)\left(\int\limits_a^b f(t\pm\tau)D_n(\tau)d\tau\right)\right| =$$

$$= \sup_{u\in B'}\left|\int\limits_a^b f_u(t\pm\tau)D_n(\tau)d\tau\right|.$$

Ez azt jelenti, hogy a

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{t\in[-\pi,\pi]}\left(\sup_{u\in B'}\left|\int\limits_a^b f_u(t\pm\tau)D_n(\tau)d\tau\right|\right)\right) = 0$$

egyenlőségeket kell bizonyítani.

Legyenek $n \in \mathbb{N}^+$, $t \in \mathbb{R}$ és $u \in B'$ rögzítve. Ekkor a Dirichlet-magfüggvény ismert alakját alkalmazva:

$$\int\limits_a^b f_u(t\pm\tau)D_n(\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi}\int\limits_a^b f_u(t\pm\tau)\sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\tau\right)\frac{1}{\sin(\tau/2)}d\tau,$$

és a

$$[a,b]\to\mathbb{R};\quad \tau\mapsto\frac{1}{\sin(\tau/2)}$$

függvény pozitív, és monoton fogyó, valamint a

$$[a,b]\to\mathbb{R};\quad \tau\mapsto f_u(t\pm\tau)$$

függvények Lebesgue-integrálhatóak. Ezért az integrálszámítás második középértéktételének valós formáját alkalmazva kapjuk olyan $\zeta \in [a,b]$ szám létezését, amelyre

$$\int\limits_a^b f_u(t\pm\tau)\sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\tau\right)\frac{1}{\sin(\tau/2)}d\tau = \frac{1}{\sin(a/2)}\int\limits_a^\zeta f_u(t\pm\tau)\sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\tau\right)d\tau.$$

Tehát a kiválasztási axióma alkalmazásával vehetünk olyan

$$\mathbb{N}^+ \times \mathbb{R} \times B' \to [a,b]; \quad (n,t,u) \mapsto \zeta(n,t,u)$$

függvényt, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$, $t \in \mathbb{R}$ és $u \in B'$ esetén

$$\int_a^b f_u(t \pm \tau) D_n(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sin(a/2)} \int_a^{\zeta(n,t,u)} f_u(t \pm \tau) \sin\left(\left(n + \tfrac{1}{2}\right)\tau\right) d\tau$$

teljesül.
Legyen most ismét $n \in \mathbb{N}^+$, $t \in \mathbb{R}$ és $u \in B'$ rögzítve, továbbá az

$$\int_a^{\zeta(n,t,u)} f_u(t \pm \tau) \sin\left(\left(n + \tfrac{1}{2}\right)\tau\right) d\tau$$

integrálokban hajtsuk végre az $s := t \pm \tau$, vagyis $\tau = \pm(s - t)$ helyettesítést. A sinus függvényre vonatkozó addíciós formulát alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int_a^{\zeta(n,t,u)} f_u(t \pm \tau) \sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\tau\right) d\tau = \int_{t\pm a}^{t\pm\zeta(n,t,u)} f_u(s) \sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)(s-t)\right) ds =$$

$$= \left(\cos\left(\left(n + \tfrac{1}{2}\right)t\right)\right) \int_{t\pm a}^{t\pm\zeta(n,t,u)} f_u(s) \sin\left(\left(n + \tfrac{1}{2}\right)s\right) ds -$$

$$- \left(\sin\left(\left(n + \tfrac{1}{2}\right)t\right)\right) \int_{t\pm a}^{t\pm\zeta(n,t,u)} f_u(s) \cos\left(\left(n + \tfrac{1}{2}\right)s\right) ds.$$

Ha $t \in [-\pi, \pi]$, akkor $0 < a \leq \zeta(n,t,u) \leq b \leq \pi$ miatt $t \pm a \in [-2\pi, 2\pi]$ és $t \pm \zeta(n,t,u) \in [-2\pi, 2\pi]$ teljesül.
Ebből következik, hogy $n \in \mathbb{N}^+$ és $u \in B'$ esetén

$$\sup_{t\in[-\pi,\pi]} \left| \int_a^{\zeta(n,t,u)} f_u(t \pm \tau) \sin\left(\left(n + \tfrac{1}{2}\right)\tau\right) d\tau \right| \leq$$

$$\leq \sup_{\alpha,\beta\in[-2\pi,2\pi]} \left| \int_\alpha^\beta f_u(s) \sin((n+\tfrac{1}{2})s) ds \right| + \sup_{\alpha,\beta\in[-2\pi,2\pi]} \left| \int_\alpha^\beta f_u(s) \cos((n+\tfrac{1}{2})s) ds \right| \leq$$

$$\leq \sup_{\alpha,\beta\in[-2\pi,2\pi]} \left\| \int_\alpha^\beta f(s) \sin((n+\tfrac{1}{2})s) ds \right\| + \sup_{\alpha,\beta\in[-2\pi,2\pi]} \left\| \int_\alpha^\beta f(s) \cos((n+\tfrac{1}{2})s) ds \right\|.$$

Ez azt jelenti, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\sup_{t\in[-\pi,\pi]} \left(\sup_{u\in B'} \left| \int_a^b f_u(t \pm \tau) D_n(\tau) d\tau \right| \right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sin(a/2)} \cdot \sup_{\alpha,\beta\in[-2\pi,2\pi]} \left\| \int_\alpha^\beta f(s) \sin((n+\tfrac{1}{2})s) ds \right\| +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sin(a/2)} \cdot \sup_{\alpha,\beta\in[-2\pi,2\pi]} \left\| \int_\alpha^\beta f(s) \cos((n+\tfrac{1}{2})s) ds \right\| +$$

teljesül.

Tekintettel arra, hogy a lokális Lebesgue-integrálhatóság miatt az $f|_{[-2\pi,2\pi]}$ függvény Lebesgue-integrálható; az egyenletes Riemann-Lebesgue lemma alapján kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{\alpha,\beta\in[-2\pi,2\pi]} \left\| \int_\alpha^\beta f(s) \sin\left(\left(n + \tfrac{1}{2}\right) s\right) ds \right\| \right) = 0$$

és

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{\alpha,\beta\in[-2\pi,2\pi]} \left\| \int_\alpha^\beta f(s) \cos\left(\left(n + \tfrac{1}{2}\right) s\right) ds \right\| \right) = 0$$

teljesül. Ebből az előző egyenlőtlenségek alkalmazásával kapjuk az állítást. ■

Tétel. (*A klasszikus trigonometrikus Fourier-sorok egyenletes konvergenciája.*) Legyen F Banach-tér és $f : \mathbb{R} \to F$ lokálisan Lebesgue-integrálható, 2π-periódusú függvény. Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ és tekintsük a következő állításokat:

a) Léteznek olyan $C, \alpha, \delta \in \mathbb{R}^+$ számok, hogy minden $\tau \in]-\delta, \delta[$ és minden $t \in [a, b]$ esetén

$$\|f(t + \tau) - f(t)\| \leq C|\tau|^\alpha$$

teljesül. (Az egyenletes konvergencia *Lipschitz-kritériuma.*)

a') f korlátos az $[a, b]$ intervallumon, és léteznek olyan $C, \alpha, \delta \in \mathbb{R}^+$ számok, hogy minden $\tau \in]0, \delta[$ és minden $t \in [a, b]$ esetén

$$\|f(t + \tau) + f(t - \tau) - 2f(t)\| \leq C\tau^\alpha$$

teljesül. (Az egyenletes konvergencia *egyoldali Lipschitz-kritériuma.*)

b) f korlátos az $[a, b]$ intervallumon, és minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén van olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $[a, b] \ni t$-re

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left\| \frac{f(t + \tau) - f(t)}{\tau} \right\| d\tau < \varepsilon$$

teljesül. (Az egyenletes konvergencia *Dini-kritériuma.*)

b') f korlátos az $[a,b]$ intervallumon, és minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén van olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $[a,b] \ni t$-re

$$\int_0^\delta \left\| \frac{f(t+\tau)+f(t-\tau)-2f(t)}{\tau} \right\| d\tau < \varepsilon$$

teljesül. (Az egyenletes konvergencia *egyoldali Dini-kritériuma.*)

c) Az f függvény klasszikus trigonometrikus Fourier-sora az $[a,b]$ intervallumon egyenletesen konvergál f-hez.

Ekkor fennállnak az a)$\Rightarrow$a'), a)$\Rightarrow$b), a')$\Rightarrow$b'), b)$\Rightarrow$b') és b')$\Rightarrow$c) következtetések.

Bizonyítás. a)$\Rightarrow$a') Az a)-ból nyilvánvalóan következik, hogy f az $[a,b]$ intervallum minden pontjában folytonos, hiszen $\alpha > 0$ miatt

$$\lim_{\tau \to 0} |\tau|^\alpha = 0.$$

Ezért f korlátos az $[a,b]$ intervallumon, és a $C, \alpha, \delta \in \mathbb{R}^+$ számokra teljesül az, hogy minden $\tau \in]0,\delta[$ és minden $t \in [a,b]$ esetén

$$\|f(t+\tau)-f(t)\| \le C\tau^\alpha, \quad \|f(t-\tau)-f(t)\| \le C|-\tau|^\alpha = C\tau^\alpha,$$

így a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$\|f(t+\tau)+f(t-\tau)-2f(t)\| \le 2C\tau^\alpha.$$

Ez azt jelenti, hogy az a)-ban megválasztott $C, \alpha, \delta \in \mathbb{R}^+$ számok olyanok, hogy a $2C, \alpha, \delta \in \mathbb{R}^+$ számokra az a')-ben megkövetelt egyenlőtlenségek teljesülnek.

a)$\Rightarrow$b) Legyenek $C, \alpha, \delta \in \mathbb{R}^+$ olyan számok, emelyekre az a) feltételei teljesülnek. Az imént láttuk, hogy a)-ból következik, hogy f az $[a,b]$ intervallum minden pontjában folytonos, így korlátos is ezen az intervallumon. Továbbá, ha $\tau \in]-\delta,\delta[$ és $\tau \neq 0$, akkor minden $[a,b] \ni t$-re

$$\left\| \frac{f(t+\tau)-f(t)}{\tau} \right\| \le \frac{C}{|\tau|^{1-\alpha}}$$

teljesül. Tudjuk, hogy $1-\alpha < 1$ miatt az

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad \tau \mapsto \begin{cases} \dfrac{C}{|\tau|^{1-\alpha}}, \text{ ha } \tau \neq 0, \\ \quad 0 \quad , \text{ ha } \tau = 0 \end{cases}$$

függvény intergrálható a $]-\delta,\delta[$ intervallumon. Ezért $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén van olyan $\delta_\varepsilon \in]0,\delta[$ valós szám, amelyre

$$\int_{-\delta_\varepsilon}^{\delta_\varepsilon} \frac{C}{|\tau|^{1-\alpha}} d\tau < \varepsilon$$

teljesül; ekkor minden $[a,b] \ni t$-re

$$\int\limits_{-\delta_\varepsilon}^{\delta_\varepsilon} \left\| \frac{f(t+\tau)-f(t)}{\tau} \right\| d\tau < \varepsilon$$

szintén igaz, vagyis a $C, \alpha, \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számokra teljesülnek a b)-ben megfogalmazott feltételek.

a')⇒b') Legyenek $C, \alpha, \delta \in \mathbb{R}^+$ olyan számok, emelyekre az a') feltételei teljesülnek.

b')⇒c) Legyenek $n \in \mathbb{N}^+$ és $t \in [a,b]$. Ekkor bármely $\delta \in]0,\pi]$ számra

$$S_n(f)(t) - f(t) = \int\limits_0^\pi (f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2f(t)) D_n(\tau) d\tau =$$

$$= \int\limits_0^\delta (f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2f(t)) D_n(\tau) d\tau + \int\limits_\delta^\pi (f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2f(t)) D_n(\tau) d\tau.$$

Legyen minden $n \in \mathbb{N}^+$, $t \in [a,b]$ és $\delta \in]0,\pi]$ számra:

$$I_{n,\delta}(t) := \int\limits_0^\delta (f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2f(t)) D_n(\tau) d\tau,$$

valamint

$$J_{n,\delta}(t) := \int\limits_\delta^\pi (f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2f(t)) D_n(\tau) d\tau.$$

Tudjuk, hogy

$$\lim_{\delta \to 0, \delta > 0} \left(\frac{\delta/2}{\sin(\delta/2)} \right) = 1,$$

ezért vehetünk olyan $\delta_0 \in]0,\pi]$ számot, hogy minden $\delta \in]0,\delta_0]$ esetén

$$0 \ < \ \frac{\delta/2}{\sin(\delta/2)} \ < \ 2$$

teljesül. (Itt a jobb oldalon álló 2 szám helyett bármely 1-nél szigorúan nagyobb valós számot is választhattunk volna.) Továbbá, a

$$]0,\pi] \to \mathbb{R}; \quad \tau \mapsto \frac{\tau/2}{\sin(\tau/2)}$$

függvény monoton növő. Ezért minden $n \in \mathbb{N}^+$, $t \in [a,b]$ és $\delta \in]0,\delta_0]$ számra fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$\|I_{n,\delta}(t)\| \le \int\limits_0^\delta \|f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2f(t)\| |D_n(\tau)| d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left(\frac{\|f(t+\tau)+f(t-\tau)-2f(t))\|}{\tau}\right)\left(\frac{\tau/2}{\sin(\tau/2)}\right)\left|\sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\tau\right)\right| d\tau \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}\left\|\frac{f(t+\tau)+f(t-\tau)-2f(t))}{\tau}\right\| d\tau.$$

Legyen most $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. A b') hipotézis alapján vehetünk olyan $\delta_\varepsilon > 0$ valós számot, amelyre minden $t \in [a,b]$ és minden $\delta \in]0,\delta_\varepsilon]$ esetén

$$\int_0^{\delta}\left\|\frac{f(t+\tau)+f(t-\tau)-2f(t)}{\tau}\right\| d\tau \leq \frac{\pi}{4}\cdot\varepsilon$$

teljesül. Az előző egyenlőtlenségek alapján azt kapjuk, hogy ha $\delta > 0$ olyan valós szám, hogy $\delta \leq \min(\delta_0, \delta_\varepsilon)$, akkor minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re

$$\sup_{t\in[a,b]} \|I_{n,\delta}(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

A továbbiakban feltesszük, hogy $\delta \in]0, \min(\delta_0, \delta_\varepsilon)]$ egy rögzített valós szám. A definíció alapján minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $t \in [a,b]$ esetén

$$J_{n,\delta}(t) = \int_{\delta}^{\pi}(f(t+\tau)+f(t-\tau))D_n(\tau)d\tau - 2f(t)\int_{\delta}^{\pi} D_n(\tau)d\tau,$$

és az f függvény korlátos az $[a,b]$ intervallumon, így

$$\|J_{n,\delta}(t)\| \leq \left\|\int_{\delta}^{\pi}(f(t+\tau)+f(t-\tau))D_n(\tau)d\tau\right\| + 2|||f|||_{[a,b]}\left|\int_{\delta}^{\pi} D_n(\tau)d\tau\right|.$$

A tétel előtt álló lemmából tudjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|\int_{\delta}^{b}(f(t+\tau)+f(t-\tau))D_n(\tau)d\tau\right\|\right) = 0,$$

tehát vehetünk olyan $N_1 \in \mathbb{N}^+$ számot, amelyre minden $\mathbb{N} \ni n$-re, ha $n \geq N_1$, akkor

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|\int_{\delta}^{b}(f(t+\tau)+f(t-\tau))D_n(\tau)d\tau\right\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

teljesül. Ugyanakkor, a Riemann-Lebesgue lemma alapján nyilvánvaló, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\delta}^{\pi} D_n(\tau)d\tau = 0,$$

hiszen minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re

$$\int_{\delta}^{\pi} D_n(\tau)d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \chi_{[\delta,\pi[}(\tau)\left(\frac{\tau/2}{\sin(\tau/2)}\right)\sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\tau\right)d\tau,$$

és az

$$\mathbb{R}\to\mathbb{R};\quad \tau\mapsto \frac{1}{\pi}\chi_{[\delta,\pi[}(\tau)\left(\frac{\tau/2}{\sin(\tau/2)}\right)$$

függvény Lebesgue-integrálható. Ezért vehetünk olyan $N_2 \in \mathbb{N}^+$ számot, amelyre minden $\mathbb{N}\ni n$-re, ha $n \geq N_2$, akkor

$$2|||f|||_{[a,b]}\left|\int_{\delta}^{\pi} D_n(\tau)d\tau\right| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Tehát ha $n\in\mathbb{N}$ és $n\geq \max(N_1,N_2)$, akkor

$$\sup_{t\in[a,b]}\|J_{n,\delta}(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy $N := \max(N_1,N_2)$ olyan természetes szám, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ számra, ha $n\geq N$, akkor

$$\sup_{t\in[a,b]}\|S_n(f)(t)-f(t)\| \leq \sup_{t\in[a,b]}\|I_{n,\delta}(t)\| + \sup_{t\in[a,b]}\|J_{n,\delta}(t)\| \leq \varepsilon,$$

amivel a tételt igazoltuk. ■