Integrálelmélet

Gruber Tibor

2001

Tartalomjegyzék

Előszó

A matematika fejlődése során több integrálelmélet alakult ki, ezek közül az úgynevezett *Lebesgue-félének* is fő csoportja: a *halmazgyűrűs* és a *topologikus* integrálelmélet.

A halmazgyűrűs elméletben *mértéknek* neveznek egy halmazgyűrűn adott σ-additív valós vagy komplex értékű leképezést. Minden halmazgyűrűn adott végesen additív halmazfüggvényhez tartozik egyetlen lineáris leképezés a gyűrű szerinti lépcsősfüggvények vektorterén, az úgynevezett *egyszerű integrál.* Pozitív halmazfüggvények σ-additivitása ekvivalens ezen egyszerű integrál megszámlálható alsó- és felső burkolóval való "jó viselkedésével".

A topologikus integrálelméletben egy lokálisan kompakt topologikus tér feletti *mértéknek* a tér feletti folytonos kompakt tartójú függvények vektorterén értelmezett, az úgynevezett induktív topológiára nézve folytonos lineáris funkcionált neveznek (egy pozitív lineáris funkcionál mindig ilyen). A topologikus integrálelméletet részletesen *Bourbaki: Integrálás* című kötete tárgyalja.

Azért, hogy a két integrálelméletben a közöst megláthassuk, célszerű a halmazgyűrűs esetben halmazfüggvények helyett inkább az általuk generált egyszerű integrálokat tekinteni, és ezek közük egyeseket mértéknek nevezni. Ekkor mindkét integrálelméletben az alapobjektum egy valós értékű függvényekből álló vektortér, a mértékek pedig az ezen vektortéren értelmezett valós lineáris leképezések közül kerülnek ki.

Ebben a könyvben olyan általános integrálelméletet tárgyalunk, amely magába foglalja a halmazgyűrűs és a topologikus integrálelméletet is. Az alapobjektum egy függvényekből álló *vektorháló*, az ezen értelmezett lineáris leképezések közül bizonyosakat *mértékeknek* illeve *normális mértékeknek* nevezünk (melyek a megszámlálható illetve a tetszőleges szuprémum- és infimumképzéssel szemben jól viselkednek). Ezt az integrálelméletet *általános integrálelméletnek* vagy *háló-integrálelméletnek* nevezzük.

Azonban az integrálelméletben nemcsak a mértékeknek van fontos szerepük, hanem az egy adott halmazon értelmezett összes pozitív függvény halmazán adott monoton, pozitív homogén, szubadditív, monoton σ-folytonos leképezéseknek, a *felső integráloknak.* Különösen azok a felső integrálok fontosak, melyek egy adott vektorhálóhoz valamilyen értelemben jól illeszkednek, az úgynevezett *integrálok.* Integrálok szerint a vektorhálót lehet bővíteni, így jutunk el az $\mathcal{L}^1$ terekhez, illetve ha egy mérték és egy integrál jól illeszkedik egymáshoz (a vektorháló pozitív elemein a mérték abszolút értéke és az integrál megegyeznek), akkor ilyen mérték szerint lehet integrálni az $\mathcal{L}^1$ tereken.

Az alkalmazások szempontjából fontosak az $\mathcal{L}^p$ terek, ezek általános bevezetésének szintén az a feltétele, hogy az adott felső integrál az adott vektorhálóhoz valamilyen értelemben jól illeszkedjen, az ilyen felső integrálok az úgynevezett *p-integrálok*.

A könyvben tárgyalt általános integrálelmélet ötletét *Bourbaki: Integrálás* című kötetének második kiadásában lelhetjük fel, innen származik a vektorháló, az absztrakt pozitív mérték, normális pozitív mérték fogalma, a pozitív mérték által generált felső integrálok (μ^{**} és μ^*) szerinti $\mathcal{L}^p$-terek és integrálás konstrukciója.

A felső integrál absztrakt fogalma, az integrál mint speciális felső integrál fogalma, az integrál szerinti $\mathcal{L}^p$-terek és integrálás konstukciója *Kristóf Jánostól* származik, a p-integrál fogalma és a p-integrál szerinti $\mathcal{L}^p$-terek konstukciója pedig a szerzőtől.

A könyv anyagának nagy része speciális előadáson hangzott el, melyet *Kristóf János* tartott fizikus hallgatóknak az Eötvös Loránd Tudományegyetem Alkalmazott Analízis Tanszékén, 1986 első félévében.

1. Fejezet

Valós és komplex mértékek

1.1 Relatív korlátos funkcionálok

Definíció A (T, L) párost *mérhető térnek* nevezzük, ha T nem-üres halmaz és $L \subset \mathbb{R}^T$ lineáris háló a pontonkénti műveletekre nézve.

Ha (T, L) mérhető tér, akkor az L vektorhálóra alkalmazni fogjuk a Bourbaki: Integrálás II. fejezetének (Rendezett vektorterek) fogalmait és eredményeit. Jelölje $L^{\#}$ az L feletti pozitív funkcionálok, $\Omega(L)$ pedig az L feletti relatív korlátos valós funkcionálok halmazát. $\mu \in \Omega(L)$ esetén létezik egyetlen $|\mu| \in L^{\#}$ úgy, hogy minden $\varphi \in L_+$ esetén

$$|\mu|(\varphi) = \sup_{\substack{f \in L, \\ |f| \leq \varphi}} |\mu(f)| \ .$$

$|\mu|$-t a μ *abszolút értékének* nevezzük. Továbbá

$$\mu^+ := \frac{|\mu| + \mu}{2} \quad \text{és} \quad \mu^- := \frac{|\mu| - \mu}{2}$$

pozitív funkcionálok, melyeket a μ *pozitív részének* és *negatív részének* nevezünk. Ezekre

$$\mu = \mu^+ - \mu^- \quad \text{és} \quad |\mu| = \mu^+ + \mu^-$$

teljesül, következésképpen minden relatív korlátos valós funkcionál előáll két pozitív funkcionál különbségeként.

Megjegyzés Legyen (T, L) mérhető tér. Ekkor az

$$L_{\mathbb{C}} := \{ f \in \mathbb{C}^T : \mathrm{Re} \circ f \in L \text{ és } \mathrm{Im} \circ f \in L \}$$

komplex vektortér az L valós vektortér egy komplexifikáltja.

Definíció A (T, L) mérhető tér $(\mathbf{C_I})$-*tulajdonságú*, ha $g \in L_{\mathbb{C}}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in L_+$ és $|g| \leq \varphi_1 + \varphi_2$ esetén létezik $g_1, g_2 \in L_{\mathbb{C}}$ úgy, hogy

$$g = g_1 + g_2 \ , \quad |g_1| \leq \varphi_1 \ , \quad |g_2| \leq \varphi_2 \ .$$

Definíció A (T, L) mérhető tér $(\mathbf{C_{II}})$-*tulajdonságú*, ha minden $g{\in}L_{\mathbb{C}}$ esetén $|g|{\in}L_+$.

Megjegyzés Legyen (T, L) mérhető tér. $\mu{\in}L_{\mathbb{C}}$ esetén $\mu|_L{\in}L_{\mathbb{R}}(L, \mathbb{C})$, fordítva, $\varrho{\in}L_{\mathbb{R}}(L, \mathbb{C})$ esetén

$$\varrho_{\mathbb{C}} : L_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}\ ,\ g \mapsto \varrho(\mathrm{Re} \circ g){+}i{\cdot}\varrho(\mathrm{Im} \circ g)$$

az egyetlen $\mathbb{C}$-lineáris leképezés, melyre $(\varrho_{\mathbb{C}})|_L{=}\varrho$ teljesül, ezt a ϱ *komplexifikáltjának* nevezzük. Tehát

$$L^*_{\mathbb{C}} \to L_{\mathbb{R}}(L, \mathbb{C})\ ,\ \mu \mapsto \mu|_L$$

$\mathbb{R}$-lineáris bijekció, melynek inverze:

$$L_{\mathbb{R}}(L, \mathbb{C}) \to L^*_{\mathbb{C}}\ ,\ \varrho \mapsto \varrho_{\mathbb{C}}\ .$$

A fenti bijekciókat a továbbiakban kanonikus azonosításnak fogjuk tekinteni, $L_{\mathbb{R}}(L, \mathbb{C})$ elemeit azonosítjuk $L^*_{\mathbb{C}}$ elemeivel, speciálisan, az L feletti valós funkcionálokat (L^* elemeit), komplexifikáltjukkal azonosítva, $L_{\mathbb{C}}$ feletti komplex funkcionáloknak ($L^*_{\mathbb{C}}$ elemeinek) tekintjük. Ennek fényében értelmes a következő definíció.

Definíció Legyen (T, L) mérhető tér. $\mu{\in}L^*_{\mathbb{C}}$ *valós*, ha $\mu|_L$ valós értékű, és *pozitív*, ha $\mu|_L$ valós értékű pozitív funkcionál.

Definíció Legyen (T, L) mérhető tér, és $\mu{\in}L^*_{\mathbb{C}}$. Ekkor

$$\overline{\mu} : L_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}\ ,\ g \mapsto \overline{\mu(\overline{g})}$$

komplex lineáris leképezés, melyet a μ *komplex konjugáltjának* nevezünk.

Megjegyzés A definícióból nyilvánvaló, hogy $\mu{\mapsto}\overline{\mu}$ konjugált lineáris involúció, $\mu{\in}L^*_{\mathbb{C}}$ pontosan akkor valós, ha $\overline{\mu}{=}\mu$ teljesül, továbbá

$$\mathrm{Re}\,\mu := \frac{\mu{+}\overline{\mu}}{2} \quad \text{és} \quad \mathrm{Im}\,\mu := \frac{\mu{-}\overline{\mu}}{2i}$$

valós funkcionálok, melyeket a μ *valós részének* és *képzetes részének* nevezünk. Ezekre

$$\mu{=}\,\mathrm{Re}\,\mu{+}i{\cdot}\,\mathrm{Im}\,\mu \quad \text{és} \quad \overline{\mu}{=}\,\mathrm{Re}\,\mu{-}i{\cdot}\,\mathrm{Im}\,\mu$$

teljesül, következésképpen $L^*_{\mathbb{C}}$ minden eleme előáll két valós forma komplex lineáris kombinációjaként.

Definíció Legyen (T, L) mérhető tér, $\mu{\in}L^*_{\mathbb{C}}$ valós. Ekkor

$$\mu^{\pm} := \big((\mu|_L)^{\pm}\big)_{\mathbb{C}} \in L^*_{\mathbb{C}}$$

pozitív, melyet a μ *pozitív részének* illetve *negatív részének* nevezünk.

Definíció Legyen (T, L) mérhető tér. $\mu{\in}L^*_{\mathbb{C}}$ *relatív korlátos*, ha $(\mathrm{Re}\,\mu)|_L$ és $(\mathrm{Im}\,\mu)|_L$ relatív korlátosak. Jelölje $\Omega_{\mathbb{C}}(L)$ az $L^*_{\mathbb{C}}$ relatív korlátos elemeinek halmazát. Nyilvánvaló, hogy $\Omega_{\mathbb{C}}(L){\subset}L^*_{\mathbb{C}}$ $\mathbb{C}$-lineáris altér, mely zárt a komplex konjugálásra. $\mu{\in}\Omega_{\mathbb{C}}(L)$ esetén

$$\mu = (\mathrm{Re}\,\mu)^+ - (\mathrm{Re}\,\mu)^- + i{\cdot}(\mathrm{Im}\,\mu)^+ - i{\cdot}(\mathrm{Im}\,\mu)^-\ ,$$

tehát minden relatív korlátos funkcionál előáll négy pozitív funkcionál $\mathbb{C}$-lineáris kombinációjaként.

1. Állítás *Legyen (T, L) mérhető tér. $\mu \in L^*_{\mathbb{C}}$ pontosan akkor relatív korlátos, ha minden $\varphi \in L_+$ esetén*

$$|\mu|_0(\varphi) := \sup_{\substack{g \in L_{\mathbb{C}},\\ |g| \leq \varphi}} |\mu(g)| < +\infty \ .$$

Bizonyítás Ha μ relatív korlátos, akkor $\varphi \in L_+$, $g \in L_{\mathbb{C}}$, $|g| \leq \varphi$ esetén $|\operatorname{Re} \circ g| \leq \varphi$ és $|\operatorname{Im} \circ g| \leq \varphi$, így

$$|\mu(g)| \leq 2(|\operatorname{Re} \mu| + |\operatorname{Im} \mu|)(\varphi) < +\infty \ .$$

Fordítva, ha $|\mu|_0(\varphi)| < +\infty$, akkor $f \in L$, $|f| \leq \varphi$ esetén

$$|(\operatorname{Re} \mu)(f)| \leq |\mu(f)| \leq |\mu|_0(\varphi) < +\infty \ ,$$

következésképpen $(\operatorname{Re} \mu)|_L \in \Omega(L)$, és hasonló mondható $(\operatorname{Im} \mu)|_L$-re.

2. Állítás *Legyen (T, L) mérhető tér, mely eleget tesz a $(\mathbf{C_I})$ feltételnek, $\mu \in \Omega_{\mathbb{C}}(L)$. Ekkor létezik egyetlen $|\mu| \in L^*_{\mathbb{C}}$ pozitív úgy, hogy minden $\varphi \in L_+$ esetén*

$$|\mu|(\varphi) = \sup_{\substack{g \in L_{\mathbb{C}},\\ |g| \leq \varphi}} |\mu(g)| \ .$$

Bizonyítás Elég megmutatni, hogy a

$$|\mu|_0 : L_+ \to \mathbb{R}_+ \ , \ \varphi \mapsto \sup_{\substack{g \in L_{\mathbb{C}},\\ |g| \leq \varphi}} |\mu(g)|$$

leképezés additív. Legyen $\varphi_1, \varphi_2 \in L_+$.

Ha $g_1, g_2 \in L_{\mathbb{C}}$ olyanok, hogy $|g_1| \leq \varphi_1$ és $|g_2| \leq \varphi_2$, akkor létezik $z \in \mathbb{T}$ úgy, hogy

$$|\mu(g_1) + z \cdot \mu(g_2)| = |\mu(g_1)| + |\mu(g_2)| \ ,$$

mert $\mu(g_1) \neq 0$ és $\mu(g_2) \neq 0$ esetén $z := \dfrac{\mu(g_1) \cdot \overline{\mu(g_2)}}{|\mu(g_1)| \cdot |\mu(g_2)|}$ megfelel, ha egyik nulla, akkor pedig tetszőleges $z \in \mathbb{T}$ jó lesz.

Ekkor $g_1 + z \cdot g_2 \in L_{\mathbb{C}}$ és $|g_1 + z \cdot g_2| \leq \varphi_1 + \varphi_2$, így

$$|\mu(g_1)| + |\mu(g_2)| = |\mu(g_1 + z \cdot g_2)| \leq |\mu|_0(\varphi_1 + \varphi_2) \ ,$$

következésképpen

$$|\mu|_0(\varphi_1) + |\mu|_0(\varphi_2) \leq |\mu|_0(\varphi_1 + \varphi_2) \ .$$

Legyen most $g \in L_{\mathbb{C}}$ olyan, hogy $|g| \leq \varphi_1 + \varphi_2$. Ekkor a $(\mathbf{C_I})$-tulajdonság szerint létezik $g_1, g_2 \in L_{\mathbb{C}}$ úgy, hogy

$$g = g_1 + g_2 \ , \quad |g_1| \leq \varphi_1 \ , \quad |g_2| \leq \varphi_2 \ .$$

Ekkor

$$|\mu(g)| = |\mu(g_1) + \mu(g_2)| \leq |\mu(g_1)| + |\mu(g_2)| \leq |\mu|_0(\varphi_1) + |\mu|_0(\varphi_2) \ ,$$

következésképpen

$$|\mu|_0(\varphi_1+\varphi_2) \leq |\mu|_0(\varphi_1)+|\mu|_0(\varphi_2) \ .$$

Definíció Legyen (T, L) mérhető tér, mely eleget tesz a $(\mathbf{C_I})$ feltételnek, $\mu\in \Omega_{\mathbb{C}}(L)$. Ekkor az egyetlen $|\mu|\in L^*_{\mathbb{C}}$ pozitív funkcionált, melyre minden $\varphi\in L_+$ esetén

$$|\mu|(\varphi) = \sup_{\substack{g\in L_{\mathbb{C}},\\ |g|\leq\varphi}} |\mu(g)| \ .$$

teljesül, a μ *abszolút értékének* nevezzük.

Megjegyzés Legyen (T, L) mérhető tér, $\varrho\in\Omega(L)$. Ekkor minden $\varphi\in L_+$ esetén

$$\sup_{\substack{g\in L_{\mathbb{C}},\\ |g|\leq\varphi}} |\varrho_{\mathbb{C}}(g)| = |\varrho|(\varphi) \ . \tag{$*$}$$

Bizonyítás A $(\geq)$ reláció triviális, $(\leq)$ bizonyításához legyen $\varphi\in L_+$ rögzített, és $g\in L_{\mathbb{C}}$ olyan, hogy $|g|\leq\varphi$. Ekkor létezik $z\in\mathbb{T}$ úgy, hogy $|\varrho_{\mathbb{C}}(g)|=z\cdot\varrho_{\mathbb{C}}(g)$, így $\operatorname{Re}\circ(z\cdot g)\in L$, $|\operatorname{Re}\circ(z\cdot g)|\leq\varphi$, ezért

$$|\varrho_{\mathbb{C}}(g)| = z\cdot\varrho_{\mathbb{C}}(g) = \varrho_{\mathbb{C}}(z\cdot g) = \varrho(\operatorname{Re}\circ(z\cdot g)) = |\varrho(\operatorname{Re}\circ(z\cdot g))| \leq |\varrho|(\varphi) \ . \quad \square$$

Következésképpen, létezik egyetlen $|\varrho_{\mathbb{C}}|\in L^*_{\mathbb{C}}$ pozitív úgy, hogy minden $\varphi\in L_+$ esetén

$$|\varrho_{\mathbb{C}}|(\varphi) = \sup_{\substack{g\in L_{\mathbb{C}},\\ |g|\leq\varphi}} |\varrho_{\mathbb{C}}(g)| \ ,$$

melyet a $\varrho_{\mathbb{C}}$ *abszolút értékének* nevezünk, és erre $|\varrho_{\mathbb{C}}|=|\varrho|_{\mathbb{C}}$ teljesül. Tehát, ha $\mu\in\Omega_{\mathbb{C}}(L)$ valós, akkor létezik abszolút értéke akkor is, ha (T, L)-re nem teljesül a $(\mathbf{C_I})$ feltétel, és $|\mu|=|\mu|_L|_{\mathbb{C}}$.

3. Állítás *Legyen (T, L) mérhető tér, mely eleget tesz a $(\mathbf{C_{II}})$ feltételnek, $\mu\in \Omega_{\mathbb{C}}(L)$, $g\in L_{\mathbb{C}}$. Ha μ valós, vagy (T, L) eleget tesz a $(\mathbf{C_I})$ feltételnek is, akkor*

$$|\mu(g)| \leq |\mu|(|g|) \ .$$

4. Állítás *Legyen (T, L) mérhető tér, mely eleget tesz a $(\mathbf{C_I})$ feltételnek, $\mu, \nu\in \Omega_{\mathbb{C}}(L)$,$\alpha\in\mathbb{C}$. Ekkor*

$$|\mu+\nu| \leq |\mu| + |\nu| \ , \ |\alpha\cdot\mu| = |\alpha|\cdot|\mu| \ , \ |\overline{\mu}| = |\mu| \ .$$

Továbbá,

$$|\operatorname{Re}\mu| \leq |\mu| \leq |\operatorname{Re}\mu| + |\operatorname{Im}\mu| \ ,$$
$$|\operatorname{Im}\mu| \leq |\mu| \leq |\operatorname{Re}\mu| + |\operatorname{Im}\mu| \ .$$

1.2 Korlátos funkcionálok

Definíció Legyen (T, L) mérhető tér. $\mu \in L_{\mathbb{C}}^*$ esetén legyen

$$\|\mu\| := \sup_{\substack{g \in L_{\mathbb{C}}, \\ \|g\| \leq 1}} |\mu(g)| \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

a μ *normája.* μ *korlátos*, ha $\|\mu\| < +\infty$.

Megjegyzés Az előző rész $(*)$ egyenlőségéhez hasonlóan látható be, hogy ha $\varrho \in L^*$, akkor

$$\|\varrho_{\mathbb{C}}\| = \sup_{\substack{f \in L, \\ \|f\| \leq 1}} |\varrho(f)| =: \|\varrho\| ,$$

így ϱ pontosan akkor korlátos, ha $\varrho_{\mathbb{C}}$ az.

5. Állítás *Legyen (T, L) mérhető tér, mely eleget tesz a $(\mathbf{C_{II}})$ feltételnek, $\mu \in \Omega_{\mathbb{C}}(L)$, Ha μ valós, vagy (T, L) eleget tesz a $(\mathbf{C_I})$ feltételnek is, akkor*

$$\|\mu\| = \sup_{\substack{\varphi \in L_+, \\ \varphi \leq 1}} |\mu|(\varphi) .$$

Bizonyítás Ha $g \in L_{\mathbb{C}}$ olyan, hogy $\|g\| \leq 1$, akkor $|g| \in L_+$ és $|g| \leq 1$, következésképpen

$$|\mu(g)| \leq |\mu|(|g|) \leq \sup_{\substack{\varphi \in L_+, \\ \varphi \leq 1}} |\mu|(\varphi) .$$

Fordítva, $\varphi \in L_+$, $\varphi \leq 1$ esetén

$$|\mu|(\varphi) = \sup_{\substack{g \in L_{\mathbb{C}}, \\ |g| \leq \varphi}} |\mu(g)| \leq \sup_{\substack{g \in L_{\mathbb{C}}, \\ |g| \leq 1}} |\mu(g)| = \|\mu\| .$$

Következmény Az előző állítás feltételei mellett

$$\|\,|\mu|\,\| = \|\mu\| .$$

1.3 Mértékek

Definíció Legyen (T, L) mérhető tér, $\mu \in L^{\#}$.

(1) μ *pozitív mérték* (T, L) *felett*, ha minden L_+-beli monoton fogyó $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatra, melyre $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n = 0$ teljesül,

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(\varphi_n) = 0$$

is igaz. Jelölje $\mathcal{M}_+(T, L)$ a (T, L) feletti pozitív mértékek halmazát.

(2) *μ normális pozitív mérték (T, L) felett*, ha minden L_+-beli lefelé irányított H rendszer esetén, melyre $\bigwedge_{\varphi \in H} \varphi = 0$ teljesül,

$$\inf_{\varphi \in H} \mu(\varphi) = 0$$

is igaz. Jelölje $\mathcal{N}_+(T, L)$ a (T, L) feletti normális pozitív mértékek halmazát.

Megjegyzés Legyen (T, L) mérhető tér, $\mu, \nu \in L^{\#}$. Ha $\nu \leq \mu$ és μ (normális) pozitív mérték, akkor ν is az. Ha μ és ν (normális) pozitív mértékek, akkor $\mu + \nu$ (normális) pozitív mérték.

Definíció Legyen (T, L) mérhető tér.

(1) *$\mu \in \Omega(L)$ (normális) valós mérték (T, L) felett*, ha μ^+ és μ^- (normális) pozitív mértékek (T, L) felett. Jelölje $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(T, L)$ a (T, L) feletti valós mértékek, $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(T, L)$ pedig a (T, L) feletti normális valós mértékek halmazát.

(2) *$\mu \in \Omega_{\mathbb{C}}(L)$ (normális) komplex mérték (T, L) felett*, ha $(\operatorname{Re} \mu)|_L$ és $(\operatorname{Im} \mu)|_L$ (normális) valós mértékek (T, L) felett. Jelölje $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(T, L)$ a (T, L) feletti komplex mértékek, $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(T, L)$ pedig a (T, L) feletti normális komplex mértékek halmazát.

Megjegyzés Ha (T, L) mérhető tér, és $\varrho \in \Omega(L)$ (normális) valós mérték, akkor $\varrho_{\mathbb{C}} \in \Omega_{\mathbb{C}}(L)$ (normális) komplex mérték. A továbbiakban a (normális) valós mértékeket komplexifikáltjukkal azonosítva (normális) komplex mértékeknek tekintjük.

6. Állítás *Legyen (T, L) mérhető tér.*

(1) $\mu \in \Omega(L)$ pontosan akkor (normális) valós mérték, ha $|\mu|$ (normális) pozitív mérték.

(2) Legyen $\mu \in \Omega_{\mathbb{C}}(L)$. Ha μ valós, vagy (T, L) eleget tesz a $(\mathbf{C_I})$ feltételnek, akkor μ pontosan akkor (normális) komplex mérték, ha $|\mu|$ (normális) pozitív mérték.

Bizonyítás

(1) Ha μ (normális) valós mérték, akkor μ^+ és μ^- (normális) pozitív mértékek, így $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ is az.

Fordítva, ha $|\mu|$ (normális) pozitív mérték, akkor $\mu^+ \leq |\mu|$ és $\mu^- \leq |\mu|$ miatt μ^+ és μ^- is azok, így a definíció szerint μ (normális) mérték.

(2) Ha μ (normális) komplex mérték, akkor (1) szerint $|\operatorname{Re} \mu|$ és $|\operatorname{Im} \mu|$ (normális) pozitív mértékek, így a $|\mu| \leq |\operatorname{Re} \mu| + |\operatorname{Im} \mu|$ egyenlőtlenség miatt $|\mu|$ is az.

Fordítva, ha $|\mu|$ (normális) pozitív mérték, akkor a $|\operatorname{Re} \mu| \leq |\mu|$ és $|\operatorname{Im} \mu| \leq |\mu|$ egyenlőtlenségek miatt $|\operatorname{Re} \mu|$ és $|\operatorname{Im} \mu|$ (normális) pozitív mértékek, így (1) szerint $\operatorname{Re} \mu$ és $\operatorname{Im} \mu$ (normális) valós mértékek, következésképpen μ (normális) komplex mérték.

2. Fejezet

Pozitív mértékek által generált felső integrálok

A továbbiakban legyen jelölje $\mathcal{F}_+(T)$ a $T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvények halmazát. Ezenkívül, ahol az ellenkezőjét nem mondjuk, a $0 \cdot (+\infty) := 0$ megállapodással élünk.

Ebben a fejezetben mindenütt legyen (T, L) adott mérhető tér.

2.1 Pozitív mérték kiterjesztése $\overline{L}_+$-ra

Definíció Jelölje $\overline{L}_+$ az $\mathcal{F}_+(T)$ azon elemeinek halmazát, melyek előállnak monoton növő L_+-beli sorozat felső burkolójaként.

7. Állítás *$\overline{L}_+$-ra a következők teljesülnek:*

(1) $f \in \overline{L}_+$ és $\alpha > 0$ esetén $\alpha \cdot f \in \overline{L}_+$,

(2) $f, g \in \overline{L}_+$ esetén $f + g \in \overline{L}_+$,

(3) $f, g \in \overline{L}_+$ esetén $f \vee g, f \wedge g \in \overline{L}_+$,

(4) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\overline{L}_+$-beli sorozat esetén $\bigvee\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n, \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n \in \overline{L}_+$.

Bizonyítás (1)(2)(3) triviális.

(4) Tegyük fel először, hogy $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton növő. $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik monoton növő L_+-beli $(\varphi_{nm})_{m \in \mathbb{N}}$ sorozat úgy, hogy $f_n = \bigvee\limits_{m \in \mathbb{N}} \varphi_{nm}$. Legyen $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\psi_n := \bigvee_{k=0}^{n} \varphi_{kn} \ .$$

Ekkor $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton növő L_+-beli sorozat úgy, hogy $\bigvee\limits_{n \in \mathbb{N}} \psi_n = \bigvee\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$, következésképpen $\bigvee\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n \in \overline{L}_+$.

Az általános esetben, ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges $\overline{L}_+$-beli sorozat, akkor $n\in\mathbb{N}$ esetén legyen

$$g_n := \bigvee_{k=0}^{n} f_k \quad \text{illetve} \quad h_n := \sum_{k=0}^{n} f_k \ .$$

Ekkor $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ illetve $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő $\overline{L}_+$-beli sorozatok úgy, hogy

$$\bigvee_{n\in\mathbb{N}} g_n = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n \quad \text{illetve} \quad \bigvee_{n\in\mathbb{N}} h_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \ ,$$

következésképpen ez utóbbiak $\overline{L}_+$-beliek.

Legyen $\mu\in\mathcal{M}_+(T,L)$ adott.

8. Állítás *Legyen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ L_+-beli monoton növő sorozat úgy, hogy $\bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n \in L_+$. Ekkor:*

$$\mu\Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n\Big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(\varphi_n) \ .$$

Bizonyítás Legyen $\psi := \bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n$. Ekkor $(\psi-\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó L_+-beli sorozat úgy, hogy $\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} (\psi-\varphi_n)=0$, így

$$0 = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(\psi-\varphi_n) = \mu(\psi) - \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(\varphi_n) \ .$$

9. Állítás *Legyen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ két L_+-beli sorozat úgy, hogy*

$$\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n \le \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \psi_n \ .$$

Ekkor

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(\varphi_n) \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(\psi_n) \ .$$

Bizonyítás $n\in\mathbb{N}$ esetén $(\varphi_n\wedge\psi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ monoton növő L_+-beli sorozat úgy, hogy

$$\bigvee_{m\in\mathbb{N}} \varphi_n\wedge\psi_m = \varphi_n \wedge \Big(\bigvee_{m\in\mathbb{N}} \psi_m\Big) = \varphi_n \ ,$$

következésképpen

$$\mu(\varphi_n) = \sup_{m\in\mathbb{N}} \mu(\varphi_n\wedge\psi_m) \le \sup_{m\in\mathbb{N}} \mu(\psi_m) \ ,$$

így

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(\varphi_n) \le \sup_{m\in\mathbb{N}} \mu(\psi_m) \ .$$

Következmény Legyen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ két L_+-beli sorozat úgy, hogy

$$\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \psi_n \ .$$

Ekkor

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(\varphi_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(\psi_n) \ . \quad \square$$

Ezért értelmes a következő definíció:

Definíció $f{\in}\overline{L}_+$ esetén azt az egyetlen $\mu_0^{**}(f){\in}\overline{\mathbb{R}}_0$ számot, melyre teljesül az, hogy ha $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ L_+-beli monoton növő sorozat, úgy, hogy

$$f = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n \ ,$$

akkor

$$\mu_0^{**}(f) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(\varphi_n) \ ,$$

az f függvény μ *szerinti felső integráljának* nevezzük.

10. Állítás *A következők teljesülnek:*

(1) $\varphi{\in}L_+$ *esetén* $\mu_0^{**}(\varphi){=}\mu(\varphi)$,

(2) $f,g{\in}\overline{L}_+$ *és* $f{\le}g$ *esetén* $\mu_0^{**}(f){\le}\mu_0^{**}(g)$,

(3) $f{\in}\overline{L}_+$ *és* $\alpha{>}0$ *esetén* $\mu_0^{**}(\alpha{\cdot}f){=}\alpha{\cdot}\mu_0^{**}(f)$,

(4) $f,g{\in}\overline{L}_+$ *esetén* $\mu_0^{**}(f{+}g){=}\mu_0^{**}(f){+}\mu_0^{**}(g)$,

(5) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\overline{L}_+$*-beli monoton növő sorozat esetén*

$$\mu_0^{**}\Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_0^{**}(f_n) \ ,$$

(6) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\overline{L}_+$*-beli sorozat esetén*

$$\mu_0^{**}\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_0^{**}(f_n) \ .$$

Bizonyítás (1)(2)(3)(4) triviális.

(5) $n{\in}\mathbb{N}$ esetén létezik $(\varphi_{nm})_{m\in\mathbb{N}}$ monoton növő L_+-beli sorozat úgy, hogy $f_n{=}\bigvee\limits_{m\in\mathbb{N}} \varphi_{nm}$. Legyen $n{\in}\mathbb{N}$ esetén

$$\psi_n := \bigvee_{k=0}^{n} \varphi_{nm} \ .$$

Ekkor $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő L_+-beli sorozat úgy, hogy $\bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}} \psi_n{=}\bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$. $n{\in}\mathbb{N}$ esetén $\psi_n{\le}f_n$, következésképpen

$$\mu_0^{**}\Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(\psi_n) \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_0^{**}(f_n) \ ,$$

a fordított egyenlőtlenség pedig (2) szerint nyilvánvaló.

(6) Legyen $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$g_n := \sum_{k=0}^{n} f_k \ .$$

Ekkor $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő, és $\bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$, így (4) és (5) szerint:

$$\mu_0^{**}\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_0^{**}(g_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \mu_0^{**}(f_k) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_0^{**}(f_n) \ .$$

2.2 Normális pozitív mérték kiterjesztése $\overline{\overline{L}}_+$-ra

Definíció Jelölje $\overline{\overline{L}}_+$ azon $f\in\mathcal{F}_+(T)$ függvények halmazát, melyekre

$$f = \bigvee_{\substack{\varphi\in L_+ \\ \varphi\leq f}} \varphi$$

teljesül.

11. Állítás *$\overline{\overline{L}}_+$-ra a következők telesülnek:*

(1) $f\in\overline{\overline{L}}_+$ és $\alpha>0$ esetén $\alpha\cdot f\in\overline{\overline{L}}_+$,

(2) $f,g\in\overline{\overline{L}}_+$ esetén $f+g\in\overline{\overline{L}}_+$,

(3) $f,g\in\overline{\overline{L}}_+$ esetén $f\vee g, f\wedge g\in\overline{\overline{L}}_+$,

(4) $H\subset\overline{\overline{L}}_+$ esetén $\bigvee\limits_{f\in H} f$, $\sum\limits_{f\in H} f\in\overline{\overline{L}}_+$.

Bizonyítás (1) triviális.

(2) Legyen $t\in T$ és $c<f(t)+g(t)$. Ekkor létezik $\varphi,\psi\in L_+$ úgy, hogy $\varphi\leq f$,$\psi\leq g$, és

$$c < \varphi(t)+\psi(t) \ .$$

Ekkor $\varphi+\psi\leq f+g$, ezért

$$c < \sup_{\substack{\varphi\in L_+ \\ \varphi\leq f+g}} \varphi(t) \ ,$$

így

$$f(t) + g(t) \leq \sup_{\substack{\varphi\in L_+ \\ \varphi\leq f+g}} \varphi(t) \ .$$

Az ellenkező irányú egyenlőtlenség nyilvánvaló.

(3) A (2)-höz hasonlóan látható be.

(4) A. Legyen $H \subset \overline{\overline{L}}_+$, és $g := \bigvee\limits_{f \in H} f$. Nyilvánvaló, hogy $\bigvee\limits_{\substack{\varphi \in L_+ \\ \varphi \leq g}} \varphi \leq g$.

Legyen $t \in T$, és $c < g(t)$. Ekkor létezik $f \in H$ úgy, hogy $c < f(t)$, és létezik $\varphi \in L_+$ úgy, hogy $\varphi \leq f$, és $c < \varphi(t)$. Ekkor $\varphi \leq f \leq g$, így

$$c < \sup_{\substack{\varphi \in L_+ \\ \varphi \leq g}} \varphi(t) \ ,$$

következésképpen

$$g(t) \leq \sup_{\substack{\varphi \in L_+ \\ \varphi \leq g}} \varphi(t) \ .$$

B. Jelölje $\mathcal{F}(H)$ a H véges részhalmazainak halmazát, ekkor

$$\sum_{f \in H} f = \bigvee_{F \in \mathcal{F}(H)} \sum_{f \in H} f \in \overline{\overline{L}}_+$$

a (2) és az A. szerint.

Legyen $\mu \in \mathcal{N}_+(T, L)$ adott.

12. Állítás *Legyen H L_+-beli felfelé irányított rendszer úgy, hogy* $\bigvee\limits_{\varphi \in H} \varphi \in L_+$. *Ekkor:*

$$\mu\Big(\bigvee_{\varphi \in H} \varphi\Big) = \sup_{\varphi \in H} \mu(\varphi) \ .$$

Bizonyítás Legyen $\psi := \bigvee\limits_{\varphi \in H} \varphi$. Ekkor $(\psi - \varphi)_{\varphi \in H}$ lefelé irányított L_+-beli rendszer úgy, hogy $\bigwedge\limits_{\varphi \in H} (\psi - \varphi) = 0$, így

$$0 = \inf_{\varphi \in H} \mu(\psi - \varphi) = \mu(\psi) - \sup_{\varphi \in H} \mu(\varphi) \ .$$

Definíció $f \in \overline{\overline{L}}_+$ esetén

$$\mu_0^*(f) := \sup_{\substack{\varphi \in L_+ \\ \varphi \leq f}} \mu(\varphi) \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

az f függvény μ *szerinti felső integrálja.*

13. Állítás *A következők telesülnek:*

(1) $\varphi \in L_+$ *esetén* $\mu_0^*(\varphi) = \mu(\varphi)$,

(2) $f, g \in \overline{\overline{L}}_+$ *és* $f \leq g$ *esetén* $\mu_0^*(f) \leq \mu_0^*(g)$,

(3) $f \in \overline{\overline{L}}_+$ *és* $\alpha > 0$ *esetén* $\mu_0^*(\alpha \cdot f) = \alpha \cdot \mu_0^*(f)$,

(4) $f, g \in \overline{\overline{L}}_+$ *esetén* $\mu_0^*(f + g) = \mu_0^*(f) + \mu_0^*(g)$,

(5) H $\overline{\overline{L}}_+$-beli felfelé irányított rendszer esetén

$$\mu_0^*\Big(\bigvee_{f\in H} f\Big) = \sup_{f\in H} \mu_0^*(f) \ ,$$

(6) H $\overline{\overline{L}}_+$-beli rendszer esetén

$$\mu_0^*\Big(\sum_{f\in H} f\Big) = \sum_{f\in H} \mu_0^*(f) \ .$$

Bizonyítás (1)(2)(3) triviális.

(5) Legyen

$$\Phi := \bigcup_{f\in H} \{\varphi{\in}L_+ : \varphi{\leq}f\} \ ,$$

ekkor Φ felfelé irányított rendszer L_+-ban, és

$$\bigvee_{f\in H} f = \bigvee_{f\in H} \bigvee_{\substack{\varphi\in L_+ \\ \varphi\leq f}} \varphi = \bigvee_{\varphi\in\Phi} \varphi \ .$$

Legyen $\psi{\in}L_+$ úgy, hogy $\psi{\leq}\bigvee\limits_{f\in H} f$, ekkor

$$\psi = \psi \wedge \Big(\bigvee_{f\in H} f\Big) = \bigvee_{\varphi\in\Phi} (\psi{\wedge}\varphi) \ ,$$

és $(\psi{\wedge}\varphi)_{\varphi\in\Phi}$ felfelé irányított L_+-beli rendszer, következésképpen

$$\mu(\psi) = \sup_{\varphi\in\Phi} \mu(\psi{\wedge}\varphi) \ .$$

$\varphi{\in}\Phi$ esetén létezik $f{\in}H$ úgy, hogy $\varphi{\leq}f$, ekkor

$$\mu(\psi{\wedge}\varphi) \leq \mu(\varphi) \leq \mu_0^*(f) \leq \sup_{f\in H} \mu_0^*(f) \ ,$$

következésképpen

$$\mu(\psi) \leq \sup_{f\in H} \mu_0^*(f) \ ,$$

így

$$\mu_0^*\Big(\bigvee_{f\in H} f\Big) \leq \sup_{f\in H} \mu^*(f) \ ,$$

a fordított egyenlőtlenség nyilvánvaló.

(4)

$$f{+}g = \bigvee_{\substack{\varphi\in L_+ \\ \varphi\leq f}} \varphi + \bigvee_{\substack{\psi\in L_+ \\ \psi\leq g}} \psi = \bigvee_{\substack{\varphi\in L_+ \\ \varphi\leq f}} \bigvee_{\substack{\psi\in L_+ \\ \psi\leq g}} \varphi{+}\psi = \bigvee_{\substack{(\varphi,\psi)\in L_+\times L_+, \\ \varphi\leq f,\psi\leq g}} \varphi{+}\psi \ ,$$

és a képlet jobb oldalán lévő felső burkoló felfelé irányított rendszerre van, így (5) szerint

$$\mu_0^*(f+g) = \sup_{\substack{(\varphi,\psi)\in L_+\times L_+\\ \varphi\le f,\psi\le g}} \mu(\varphi+\psi) = \sup_{\substack{\varphi\in L_+\\ \varphi\le f}} \sup_{\substack{\psi\in L_+\\ \psi\le g}} \Big(\mu(\varphi)+\mu(\psi)\Big) =$$

$$= \sup_{\substack{\varphi\in L_+\\ \varphi\le f}} \mu(\varphi) + \sup_{\substack{\varphi\in L_+\\ \varphi\le f}} \mu(\varphi) = \mu_0^*(f)+\mu_0^*(g) \ .$$

(6) Jelölje $\mathcal{F}(H)$ a H véges részhalmazainak halmazát, ekkor $\Big\{\sum\limits_{f\in J} f : J\in\mathcal{F}(H)\Big\}$ felfelé irányított rendszer, így (4) és (5) szerint

$$\mu_0^*\Big(\sum_{f\in H} f\Big) = \sup_{J\in\mathcal{F}(H)} \mu_0^*\Big(\sum_{f\in J} f\Big) = \sup_{J\in\mathcal{F}(H)} \sum_{f\in J} \mu_0^*(f) = \sum_{f\in H} \mu_0^*(f) \ .$$

2.3 Pozitív mérték kiterjesztése $\mathcal{F}_+(T)$-re

Definíció Azt mondjuk, hogy az $m{:}\mathcal{F}_+(T)\to\overline{\mathbb{R}}_+$ leképezés *felső integrál T felett, ha*

(1) $f,g\in\mathcal{F}_+(T)$ és $f\le g$ esetén $m(f)\le m(g)$ (*monoton növő*),

(2) $f\in\mathcal{F}_+(T)$ és $\alpha>0$ esetén $m(\alpha\cdot f)=\alpha\cdot m(f)$ (*pozitív homogén*),

(3) $f,g\in\mathcal{F}_+(T)$ esetén $m(f+g)\le m(f)+m(g)$ (*szubadditív*),

(4) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{F}_+(T)$-beli monoton növő sorozat esetén

$$m\Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m(f_n)$$

(*monoton σ-folytonos*).

Megjegyzés Ha (T,L) mérhető tér, $f\in\overline{L}_+$, és $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ L_+-beli monoton növő sorozat úgy, hogy $f=\bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n$, akkor a monoton σ-folytonosság miatt

$$m(f) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m(\varphi_n) \ ,$$

tehát $m|_{L_+}$ egyértelműen meghatározza m $\overline{L}_+$-on felvett értékeit.

Azt mondjuk, hogy az m felső integrál *normális* (T,L) *felett*, ha minden $f\in\overline{\overline{L}}_+$ esetén

$$m(f) = \sup_{\substack{\varphi\in L_+\\ \varphi\le f}} m(\varphi) \ .$$

Ekkor tehát $m|_{L_+}$ egyértelműen meghatározza m $\overline{\overline{L}}_+$-on felvett értékeit.

14. Állítás

(1) $\mu \in \mathcal{M}_+(T,L)$ *esetén*

$$\mu^{**} : \mathcal{F}_+(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+ \ , \ f \mapsto \inf_{h \in \overline{L}_+, f \leq h} \mu_0^{**}(h)$$

felső integrál T *felett úgy hogy* $\mu^{**}|_{\overline{L}_+} = \mu_0^{**}$.

(2) $\mu \in \mathcal{N}_+(T,L)$ *esetén*

$$\mu^{*} : \mathcal{F}_+(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+ \ , \ f \mapsto \inf_{h \in \overline{\overline{L}}_+, f \leq h} \mu_0^{*}(h)$$

normális felső integrál (T,L) *felett, úgy hogy* $\mu^{*}|_{\overline{\overline{L}}_+} = \mu_0^{*}$.

Bizonyítás Az (1) és (2) pontokban kimondott két állítást egyszerre bizonyítjuk, legyen $S := \overline{L}_+$ vagy $S := \overline{\overline{L}}_+$; $S = \overline{L}_+$ és $\mu \in \mathcal{M}_+(T,L)$ esetén $m_0 := \mu_0^{**}$, $S = \overline{\overline{L}}_+$ és $\mu \in \mathcal{N}_+(T,L)$ esetén $m_0 := \mu_0^{*}$, továbbá

$$m : \mathcal{F}_+(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+ \ , \ f \mapsto \inf_{h \in S, f \leq h} m_0(h) \ .$$

Nyilvánvaló, hogy m monoton növő, pozitív homogén, és $m|_S = m_0$. m szubadditív, mert legyen $f, g \in \mathcal{F}_+(T)$ esetén $h_1, h_2 \in S$ olyan, hogy $f \leq h_1$ és $g \leq h_2$. Ekkor $h_1 + h_2 \in S$, és $f + g \leq h_1 + h_2$, ezért

$$m(f+g) \leq m_0(h_1+h_2) = m_0(h_1) + m_0(h_2) \ ,$$

következésképpen

$$m(f+g) \leq m(f) + m(g) \ .$$

Legyen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton növő $\mathcal{F}_+(T)$-beli sorozat, és $\varepsilon > 0$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik $h_n \in S$ úgy, hogy $h_n \geq f_n$, és

$$m_0(h_n) \leq m(f_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \ .$$

Legyen

$$g_n := \bigvee_{k=0}^{n} h_k \in S \ ,$$

ekkor $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton növő S-beli sorozat, n-szerinti indukcióval megmutatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$m_0(g_n) \leq m(f_n) + \varepsilon \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \ . \qquad (*)$$

Nyilvánvaló, hogy $n=0$ esetén $(*)$ teljesül. Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített, ekkor $g_n \geq f_n$ és $h_{n+1} \geq f_{n+1} \geq f_n$ miatt

$$g_n \wedge h_{n+1} \geq f_n \ ,$$

így

$$g_{n+1} = g_n \vee h_{n+1} = g_n + h_{n+1} - g_n \wedge h_{n+1}$$

miatt

$$\begin{aligned} m_0(g_{n+1}) &= m_0(g_n) + m_0(h_{n+1}) - m_0(g_n \wedge h_{n+1}) \leq \\ &\leq m(f_n) + \varepsilon \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + m(f_{n+1}) + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} - m(f_n) = \\ &= m(f_{n+1}) + \varepsilon \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n+2}}\right) , \end{aligned}$$

ezzel $(*)$-ot beláttuk, melyből

$$m\Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big) \leq m_0\Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} g_n\Big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_0(g_n) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} m(f_n) + \varepsilon$$

adódik, és ez teljesül tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén, így

$$m\Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} m(f_n)$$

teljesül, a fordított egyenlőtletség m monotonitása miatt nyilvánvaló.

Megjegyzés $\mu \in \mathcal{M}_+(T, L)$ esetén $\mu^{**}|_{\overline{L}_+} = \mu_0^{**}$ és $\mu_0^{**}|_{L_+} = \mu|_{L_+}$ miatt

$$\mu^{**}|_{L_+} = \mu|_{L_+}$$

teljesül.

Ha m felső integrál T felett úgy, hogy $m|_{L_+} = \mu|_{L_+}$, akkor a monoton σ-folytonosság miatt $m|_{\overline{L}_+} = \mu^{**}|_{\overline{L}_+}$ is teljesül, és $m \leq \mu^{**}$.

Hasonlóan, $\mu \in \mathcal{N}_+(T, L)$ esetén $\mu^*|_{\overline{\overline{L}}_+} = \mu_0^*$ és $\mu_0^*|_{L_+} = \mu|_{L_+}$ miatt

$$\mu^*|_{L_+} = \mu|_{L_+} .$$

Ha m normális felső integrál T felett úgy, hogy $m|_{L_+} = \mu|_{L_+}$, akkor $m|_{\overline{\overline{L}}_+} = \mu^*|_{\overline{\overline{L}}_+}$ is teljesül, és $m \leq \mu^*$.

Nyilvánvaló továbbá, hogy $\mu^* \leq \mu^{**}$.

Megjegyzés Legyen $(m_i)_{i\in I}$ T feletti felső integrálok rendszere. Ekkor $m := \bigvee_{i\in I} m_i$ felső integrál T felett. Ugyanis, nyilvánvaló, hogy m monoton növő, pozitív homogén és szubadditív. Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő $\mathcal{F}_+(T)$-beli sorozat. Ekkor

$$\begin{aligned} m\Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big) &= \sup_{i\in I} m_i\Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big) = \sup_{i\in I} \sup_{n\in\mathbb{N}} m_i(f_n) = \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{i\in I} m_i(f_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m(f_n) , \end{aligned}$$

tehát m monoton σ-folytonos.

Megjegyzés Legyen m felső integrál T felett, $g:T\to\overline{\mathbb{R}}_+$ leképezés. Ekkor

$$g\cdot m : \mathcal{F}_+(T)\to\overline{\mathbb{R}}_+ \ , \ f\mapsto m(g\cdot f)$$

felső integrál T felett.

15. Állítás *Legyen (T,L) mérhető tér és m felső integrál (T) felett. Ekkor*

$$m_l := \bigvee_{\varphi\in L_+} \chi_{[\varphi\neq 0]}\cdot m$$

felső integrál (T,L) felett úgy, hogy $m_l\leq m$, és

$$m_l\big|_{\overline{L}_+} = m\big|_{\overline{L}_+} \ .$$

Ha m normális, akkor m_l is normális, és

$$m_l\big|_{\overline{\overline{L}}_+} = m\big|_{\overline{\overline{L}}_+}$$

is teljesül.

Bizonyítás Az előző megjegyzések szerint m_l felső integrál T felett, a definíció szerint $\mu_l\leq m$ teljesül.

Legyen $f\in\overline{\overline{L}}_+$, és $\varphi\in L_+$ olyan, hogy $\varphi\leq f$. Ekkor

$$\varphi = \chi_{[\varphi\neq 0]}\cdot\varphi \leq \chi_{[\varphi\neq 0]}\cdot f \ ,$$

következésképpen $m(\varphi)\leq m_l(f)$. Ha m normális vagy $f\in\overline{L}_+$, akkor ebből következik, hogy $m(f)\leq m_l(f)$.

Következmény $\mu\in\mathcal{N}_+(T,L)$ esetén $\mu^\bullet:=(\mu^*)_l$ normális felső integrál (T,L) felett úgy, hogy $\mu^\bullet\leq\mu^*$, és

$$\mu^\bullet\big|_{\overline{\overline{L}}_+} = \mu^*\big|_{\overline{\overline{L}}_+} \ .$$

Megjegyzés A továbbiakban nagy fontosságuk lesz azon (μ,m) párosoknak, ahol $\mu\in\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(T,L)$ és m felső integrál T felett úgy, hogy

$$|\mu|\big|_{L_+} = m\big|_{L_+}$$

teljesül. Adott μ esetén ilyen felső integrál mindig van, például $|\mu|^{**}$, azonban általában nem egyetlen: ha μ normális, akkor lehetséges, hogy $|\mu|^{**}$, $|\mu|^*$ és $|\mu|^\bullet$ különbözők. Az előzőek szerint $|\mu|^{**}$ a legnagyobb az ilyen tulajdonságú felső integrálok között.

Ha m felső integrál T felett, melyre $m\big|_{L_+}$ véges és additív, akkor létezik egyetlen μ *pozitív* mérték (T,L) felett úgy, hogy

$$\mu\big|_{L_+} = m\big|_{L_+}$$

teljesül, mégpedig

$$\mu : L\to\mathbb{R} \ , \ \varphi\mapsto m(\varphi^+) - m(\varphi^-) \ .$$

3. Fejezet

Példák

3.1 Halmazgyűrűs mérhető terek

Megjegyzés Legyen T nem üres halmaz, $\mathcal{R}\subset\mathcal{P}(T)$ gyűrű, és ha F vektortér $\mathbb{K}$ felett, akkor jelölje $\mathcal{E}_F(T,\mathcal{R})$ a $T\to F$ $\mathcal{R}$-lépcsős függvények halmazát. A pontonkénti műveletekkel $\mathcal{E}_F(T,\mathcal{R})$ vektortér $\mathbb{K}$ felett, $\mathcal{E}_\mathbb{K}(T,\mathcal{R})$ algeba, $\mathcal{E}(T,\mathcal{R}):=\mathcal{E}_\mathbb{R}(T,\mathcal{R})$ lineáris háló, tehát $(T,\mathcal{E}(T,\mathcal{R}))$ mérhető tér. Vezessük be az $\mathcal{E}_+(T,\mathcal{R}) :=\mathcal{E}(T,\mathcal{R})_+$ jelölést.

Nyilvánvaló, hogy minden $p\geq 1$ esetén $\mathcal{E}_+(T,\mathcal{R})^p\subset\mathcal{E}_+(T,\mathcal{R})$ teljesül.

Továbbá, a $(T,\mathcal{E}(T,\mathcal{R}))$ mérhető tér $(\mathbf{C_I})$ és $(\mathbf{C_{II}})$ tulajdonságú. Ez nyilvánvaló $(\mathbf{C_{II}})$-re. Megmutatjuk $(\mathbf{C_I})$-et. Legyen $h_1,h_2\in\mathcal{E}_+(T,\mathcal{R})$ és $g\in\mathcal{E}_\mathbb{C}(T,\mathcal{R})$ úgy, hogy $|g|\leq h_1+h_2$. Ekkor

$$g_1(t) := \begin{cases} \dfrac{g(t)h_1(t)}{h_1(t)+h_2(t)} & \text{, ha } \ h_1(t)+h_2(t)\neq 0 \\ 0 & \text{, ha } \ h_1(t)+h_2(t)=0 \end{cases}$$

és

$$g_2(t) := \begin{cases} \dfrac{g(t)h_2(t)}{h_1(t)+h_2(t)} & \text{, ha } \ h_1(t)+h_2(t)\neq 0 \\ 0 & \text{, ha } \ h_1(t)+h_2(t)=0 \end{cases}$$

$\mathcal{E}_\mathbb{C}(T,\mathcal{R})$ elemei, és $g=g_1+g_2$, $|g_1|\leq h_1$, $|g_2|\leq h_2$.

Megjegyzés Legyen $\alpha:\mathcal{R}\to\mathbb{K}$ additív halmazfüggvény. Ekkor létezik egyetlen $\widehat{\alpha}:\mathcal{E}_\mathbb{K}(T,\mathcal{R})\to\mathbb{K}$ lineáris leképezés úgy, hogy minden $E\in\mathcal{R}$ esetén $\widehat{\alpha}(\chi_E)=\alpha(E)$. $\widehat{\alpha}$ pontosan akkor valós (pozitív), ha α valós (pozitív) értékű. Továbbá,

$$\operatorname{Re}\widehat{\alpha} = \widehat{\operatorname{Re}\circ\alpha} \quad \text{és} \quad \operatorname{Im}\widehat{\alpha} = \widehat{\operatorname{Im}\circ\alpha}\ .$$

Fordítva, ha $\mu:\mathcal{E}_\mathbb{K}(T,\mathcal{R})\to\mathbb{K}$ lineáris leképezés, akkor

$$\alpha : \mathcal{R} \to \mathbb{K}\ ,\ E \to \mu(\chi_E)$$

additív halmazfüggvény úgy, hogy $\mu=\widehat{\alpha}$.

Legyen $\alpha:\mathcal{R}\to\mathbb{K}$ additív halmazfüggvény. $E\in\mathcal{R}$ esetén legyen

$$|\alpha|(E) := \sup\Big\{\sum_{k=1}^{n}|E_k| : n\in\mathbb{N}, (E_k)_{1\le k\le n}\in\mathcal{R}^n \text{ diszjunkt}, \bigcup_{k=1}^{n} E_k=E\Big\} .$$

Azt mondjuk, hogy α *relatív korlátos*, ha minden $E\in\mathcal{R}$ esetén $|\alpha|(E)<+\infty$. Ekkor $|\alpha|:\mathcal{R}\to\mathbb{R}_+$ additív halmazfüggvény.

16. Állítás *Legyen $\alpha:\mathcal{R}\to\mathbb{K}$ additív halmazfüggvény. $\widehat{\alpha}$ pontosan akkor relatív korlátos, ha α relatív korlátos, és ekkor*

$$|\widehat{\alpha}| = \widehat{|\alpha|} .$$

Bizonyítás Elég azt megmutatni, hogy $E\in\mathcal{R}$ esetén

$$|\widehat{\alpha}|(\chi_E) = |\alpha|(E) .$$

Legyen $n\in\mathbb{N}$ és $(E_k)_{1\le k\le n}$ $\mathcal{R}$-beli diszjunkt rendszer úgy, hogy $\bigcup_{k=1}^{n} E_k=E$. Ekkor minden $k=1,\ldots,n$ esetén létezik $z_k\in\mathbb{T}$ úgy, hogy

$$|\alpha(E_k)|=z_k\cdot\alpha(E_k) .$$

Így

$$\sum_{k=1}^{n}|\alpha(E_k)| = \sum_{k=1}^{n} z_k\cdot\alpha(E_k) = \widehat{\alpha}\Big(\sum_{k=1}^{n} z_k\cdot\chi_{E_k}\Big) = \Big|\widehat{\alpha}\Big(\sum_{k=1}^{n} z_k\cdot\chi_{E_k}\Big)\Big| ,$$

tehát

$$\varphi := \sum_{k=1}^{n} z_k\cdot\chi_{E_k} \in \mathcal{E}_{\mathbb{K}}(T,\mathcal{R})$$

olyan, hogy

$$|\varphi| \le \sum_{k=1}^{n}\chi_{E_k} \le \chi_E ,$$

és az előző szerint

$$\sum_{k=1}^{n}|\alpha(E_k)| = |\widehat{\alpha}(\varphi)| \le |\widehat{\alpha}|(\chi_E) ,$$

így

$$|\alpha|(E) \le |\widehat{\alpha}|(\chi_E) .$$

Legyen most $c\in\mathbb{R}_+$ olyan, hogy $c<|\widehat{\alpha}|(\chi_E)$. Ekkor létezik $\varphi\in L_{\mathbb{K}}$ úgy, hogy $|\varphi|\le\chi_E$ és $c<|\widehat{\alpha}(\varphi)|$. Legyen

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\cdot\chi_{E_k} ,$$

ahol $(E_k)_{1\leq k\leq n}$ diszjunkt $\mathcal{R}$-beli rendszer, és $\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k{=}[\varphi{\neq}0]$.

$|\varphi|{\leq}\chi_E$ miatt $\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k{\subset}E$, és $|\alpha_k|{\leq}1$. Legyen

$$E_{n+1} := E \setminus \bigcup_{k=1}^{n} E_k \quad \text{és} \quad \alpha_{k+1} := 0 \ .$$

Ekkor $(E_k)_{1\leq k\leq n+1}$ $\mathcal{R}$-beli halmazokból álló partíciója E-nek, és

$$c < |\widehat{\alpha}(\varphi)| = \left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k{\cdot}\alpha(E_k)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|{\cdot}|\alpha(E_k)| \leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha(E_k)| \leq |\alpha|(E) \ ,$$

így

$$|\widehat{\alpha}|(\chi_E) \leq |\alpha|(E) \ .$$

17. Állítás *Legyen $\alpha{:}\mathcal{R}{\to}\mathbb{R}_+$ additív halmazfüggvény. Ekkor a következők ekvivalensek:*

(1) α σ-additív,

(2) ha $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó $\mathcal{R}$-beli sorozat úgy, hogy $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n{=}\emptyset$, akkor $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha(E_n){=}0$,

(3) $\widehat{\alpha}{\in}\mathcal{M}_+(T,\mathcal{E}(T,\mathcal{R}))$.

Bizonyítás Ha (1) teljesül, és $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó $\mathcal{R}$-beli sorozat úgy, hogy $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n{=}\emptyset$, akkor $(E_k{\setminus}E_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ diszjukt rendszer, és $n{\in}\mathbb{N}$ esetén

$$E_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} (E_k{\setminus}E_{k+1}) \ ,$$

következésképpen

$$\alpha(E_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha(E_k{\setminus}E_{k+1}) \ .$$

Speciálisan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha(E_k{\setminus}E_{k+1}) = \alpha(E_0) < +\infty \ ,$$

következésképpen

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \alpha(E_n) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \alpha(E_n) = 0 \ .$$

Ha (2) teljesül, és $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{E}_+(T,\mathcal{R})$-beli monoton fogyó sorozat úgy, hogy $\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n{=}0$, akkor $\varepsilon{>}0$ és $n{\in}\mathbb{N}$ esetén

$$\varphi_n \leq |||\varphi|||{\cdot}\chi_{[\varphi_n>\varepsilon]} + \varepsilon{\cdot}\chi_{[\varphi_0>0]} \ ,$$

következésképpen

$$\widehat{\alpha}(\varphi_n) \leq |||\varphi|||\cdot\alpha([\varphi_n{>}\varepsilon]) + \varepsilon\cdot\alpha([\varphi_0{>}0]) \ .$$

Azonban $([\varphi_n{>}\varepsilon])_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó, üres metszetű $\mathcal{R}$-beli sorozat, így

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \widehat{\alpha}(\varphi_n) \leq \varepsilon\cdot\alpha([\varphi_0{>}0])$$

tetszőleges $\varepsilon{>}0$ esetén, következésképpen

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \widehat{\alpha}(\varphi_n) = 0 \ .$$

Ha (3) teljesül és $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diszjunkt $\mathcal{R}$-beli sorozat úgy, hogy $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n{\in}\mathcal{R}$, és ha $n{\in}\mathbb{N}$ esetén

$$F_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \ ,$$

akkor $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó $\mathcal{R}$-beli sorozat, melynek metszete üres, következésképpen $(\chi_{F_n})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó $\mathcal{E}_+(T,\mathcal{R})$-beli sorozat úgy, hogy $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \chi_{F_n}{=}0$, így

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha(E_k) = \alpha\Big(\bigcup_{k=0}^{n} E_k\Big) = \alpha\Big(\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k\Big) - \widehat{\alpha}(\chi_{F_n}) \ ,$$

és $n{\to}{+}\infty$ esetén a jobb oldal második tagja nullához tart, így

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha(E_k) = \alpha\Big(\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k\Big) \ .$$

18. Állítás *Legyen* $\alpha{:}\mathcal{R}{\to}\mathbb{K}$ *relatív korlátos additív halmazfüggvény. Ekkor* $\widehat{\alpha}{\in}\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(T,\mathcal{E}(T,\mathcal{R}))$ *pontosan akkor teljesül, ha* α σ*-additív.*

Bizonyítás α pontosan akkor σ-additív, ha $|\alpha|$ σ-additív, ez pedig ekvivalens azzal, hogy $\widehat{|\alpha|}{=}|\widehat{\alpha}|$ pozitív mérték, azaz $\widehat{\alpha}{\in}\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(T,\mathcal{E}(T,\mathcal{R}))$.

Megjegyzés Ha $\alpha{:}\mathcal{R}{\to}\mathbb{R}$ additív halmazfüggvény, akkor

$$\alpha^{\pm} : \mathcal{R} \to \mathbb{R}_+ \ , \ E \mapsto \sup_{\substack{F\in\mathcal{R}\\ F\subset E}} (\pm\alpha(F))$$

pozitív additív halmazfüggvények úgy, hogy

$$\alpha{=}\alpha^{+}{-}\alpha^{-} \quad \text{és} \quad |\alpha|{=}\alpha^{+}{+}\alpha^{-}$$

teljesülnek, és a 16. állítás bizonyításához hasonlóan (csak még egyszerűbben) belátható, hogy

$$(\widehat{\alpha})^{\pm} = \widehat{\alpha^{\pm}} \ .$$

3.2 Topologikus mérhető terek

Megjegyzés Legyen T lokálisan kompakt tér, F topologikus vektortér $\mathbb{K}$ felett. Jelölje $\mathcal{K}_F(T)$ a $T{\to}F$ folytonos kompakt tartójú függvények halmazát. A pontonkénti műveletekkel $\mathcal{K}_F(T)$ vektortér $\mathbb{K}$ felett, $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(T)$ algeba, $\mathcal{K}(T){:=}\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(T)$ lineáris háló, tehát $(T,\mathcal{K}(T))$ mérhető tér. Vezessük be a $\mathcal{K}_+(T){:=}\mathcal{K}(T)_+$ jelölést.

Nyilvánvaló, hogy minden $p{\geq}1$ esetén $\mathcal{K}_+(T)^p{\subset}\mathcal{K}_+(T)$ teljesül.

Továbbá, a $(T,\mathcal{K}(T))$ mérhető tér $(\mathbf{C_I})$ és $(\mathbf{C_{II}})$ tulajdonságú. Ez nyilvánvaló $(\mathbf{C_{II}})$-re. Megmutatjuk $(\mathbf{C_I})$-et. Legyen $h_1,h_2{\in}\mathcal{K}_+(T)$ és $g{\in}\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(T)$ úgy, hogy $|g|{\leq}h_1{+}h_2$. Ekkor

$$g_1(t) := \begin{cases} \dfrac{g(t)h_1(t)}{h_1(t){+}h_2(t)} & \text{, ha } h_1(t){+}h_2(t){\neq}0 \\ 0 & \text{, ha } h_1(t){+}h_2(t){=}0 \end{cases}$$

és

$$g_2(t) := \begin{cases} \dfrac{g(t)h_2(t)}{h_1(t){+}h_2(t)} & \text{, ha } h_1(t){+}h_2(t){\neq}0 \\ 0 & \text{, ha } h_1(t){+}h_2(t){=}0 \end{cases}$$

$\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(T)$ elemei, és $g{=}g_1{+}g_2$, $|g_1|{\leq}h_1$, $|g_2|{\leq}h_2$. Ugyanis, ha $t{\in}[h_1{+}h_2{=}0]$, akkor $g(t){=}0$, és mivel g folytonos t-ben, minden $\varepsilon{>}0$ esetén létezik V környezete t-nek úgy, hogy $\sup\limits_{s\in V}|g(s)|{\leq}\varepsilon$. Ekkor $\sup\limits_{s\in V}|g_1(s)|{\leq}\varepsilon$ és $\sup\limits_{s\in V}|g_2(s)|{\leq}\varepsilon$, következésképpen g_1 és g_2 folytonosak t-ben. A $[h_1{+}h_2{\neq}0]$ halmazon nyilvánvaló, hogy g_1 és g_2 folytonosak, és az is, hogy kompakt tartójúak.

Megjegyzés Legyen T lokálisan kompakt tér, F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, $K{\subset}T$ kompakt kalmaz esetén

$$\mathcal{K}_F(T;K) := \{f{\in}\mathcal{K}_F(T) : \mathrm{supp}(f){\subset}K\}$$

Banach tér a sup-normára nézve, lássuk el $\mathcal{K}_F(T)$-t a

$$\{\mathcal{K}_F(T;K) : K{\subset}T \text{ kompakt}\}$$

altérrendszer generálta induktív topológiával.

19. Állítás *Legyen $\mu{:}\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(T){\to}\mathbb{K}$ lineáris leképezés. μ pontosan akkor relatív korlátos, ha folytonos $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(T)$-n az induktív topológiát tekintve.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy μ induktív folytonos, és legyen $\varphi{\in}\mathcal{K}_+(T)$. Ekkor $\mathrm{supp}(\varphi){\subset}T$ kompakt, így létezik $M{\geq}0$ úgy, hogy minden $\psi{\in}\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(T;\mathrm{supp}(\varphi))$ esetén $|\mu(\psi)|{\leq}M{\cdot}|||\psi|||$. Ha $\psi{\in}\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(T)$ olyan, hogy $|\psi|{\leq}\varphi$, akkor $\mathrm{supp}(\psi){\subset}$ $\mathrm{supp}(\varphi)$ miatt

$$|\mu(\psi)| \leq M{\cdot}|||\psi||| \leq M{\cdot}|||\varphi||| \ ,$$

így μ relatív korlátos.

Tegyük fel, hogy μ relatív korlátos, és legyen $K{\subset}T$ kompakt halmaz. Ekkor létezik $\varphi{\in}\mathcal{K}_+(T)$ úgy, hogy $0{\le}\varphi{\le}1$, és $K{\subset}[\varphi{=}1]$. A relatív korlátosság miatt

$$\sup_{\substack{\psi\in\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(T)\\ |\psi|\le\varphi}} |\mu(\psi)| =: C < +\infty \ .$$

Legyen $\psi{\in}\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(T;K)$, és tegyük fel, hogy $\psi{\ne}0$. Ekkor $\frac{\psi}{|||\psi|||}{\le}\varphi$, következésképpen

$$|\mu(\psi)| \le C{\cdot}|||\psi||| \ ,$$

tehát μ induktív folytonos.

20. Állítás *Legyen $\mu{:}\mathcal{K}(T){\to}\mathbb{R}$ pozitív lineáris funkcionál. Ekkor μ folytonos az induktív topológiára nézve.*

Bizonyítás Legyen $K{\subset}T$ kompakt halmaz. Ekkor létezik $h{\in}\mathcal{K}(T)$ úgy, hogy $0{\le}h{\le}1$ és $K{\subset}[h{=}1]$. $f{\in}\mathcal{K}(T;K)$ esetén

$$-|||f|||{\cdot}h \le f \le |||f|||{\cdot}h \ ,$$

így μ monoton növő tulajdonsága miatt

$$-|||f|||{\cdot}\mu(h) \le f \le |||f|||{\cdot}\mu(h) \ ,$$

azaz

$$|\mu(f)| \le \mu(h){\cdot}|||f||| \ .$$

21. Állítás *Legyen $\mu{:}\mathcal{K}(T){\to}\mathbb{R}$ pozitív lineáris funkcionál. Ekkor μ normális pozitív mérték $\mathcal{K}(T)$ felett.*

Bizonyítás Legyen $H{\subset}\mathcal{K}_+(T)$ lefelé irányított rendszer úgy, hogy $\bigwedge_{f\in H} f{=}0$. $g{\in}H$ esetén legyen $H_g{:=}\{f{\in}H{:}f{\le}g\}$. Ekkor $\bigwedge_{f\in H_g} f{=}0$, és minden $f{\in}H_g$ esetén $\mathrm{supp}(g){\subset}\,\mathrm{supp}(g){=:}K$. A Dini-tétel szerint ekkor

$$\inf_{f\in H_g} |||f||| = 0.$$

Mivel μ az előző állítás szerint induktív folytonos, létezik $M{\ge}0$ úgy, hogy minden $f{\in}\mathcal{K}(T;K)$ esetén

$$|\mu(f)| \le M{\cdot}|||f||| \ ,$$

így $f{\in}H_g$ esetén is

$$0 \le \mu(f) \le M{\cdot}|||f||| \ ,$$

következésképpen

$$\inf_{f\in H} \mu(f) = \inf_{f\in H_g} \mu(f) = 0 \ ,$$

tehát μ normális pozitív mérték.

22. Állítás *Legyen $\mu:\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(T)\to\mathbb{K}$ lineáris funkcionál. Ekkor a következők ekvivalensek:*

(1) μ folytonos $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(T)$ induktív topológiájára nézve,

(2) μ relatív korlátos,

(3) μ normális mérték $\mathcal{K}(T)$ felett.

Bizonyítás Ha μ induktív folytonos, akkor relatív korlátos. Ha relatív korlátos, akkor $|\mu|$ pozitív funkcionál, következésképpen normális pozitív mérték, így μ is normális mérték. Ha μ normális mérték, akkor definíció szerint relatív korlátos, következésképpen induktív folytonos.

23. Állítás *T lokálisan kompakt tér, és $f\in\mathcal{F}_+(T)$, akkor $f\in\overline{\overline{\mathcal{K}_+(T)}}$ ekvivalens azzal, hogy f alulról félig folytonos.*

Bizonyítás Ha $f\in\overline{\overline{\mathcal{K}_+(T)}}$, akkor folytonos függvények felső burkolója, következésképpen alulról félig folytonos.

Ha f alulról félig folytonos, akkor nyilvánvaló, hogy

$$\bigvee_{\substack{\varphi\in\mathcal{K}_+(T)\\ \varphi\le f}} \varphi \le f \ .$$

Legyen $t\in T$ és $c<f(t)$. Ekkor $[c<f]$ nyílt halmaz, melynek eleme t, így az Uriszon-tétel szerint létezik $\varphi\in\mathcal{K}_+(T)$, $0\le\varphi\le1$ úgy, hogy $\mathrm{supp}(\varphi)\subset[c<f]$ és $\varphi(t)=1$. Ekkor $c\cdot\varphi\in\mathcal{K}_+(T)$, $c\cdot\varphi\le f$ és $(c\cdot\varphi)(t)=c$, következésképpen

$$c\le \sup_{\substack{\varphi\in\mathcal{K}_+(T)\\ \varphi\le f}} \varphi(t) \ ,$$

így

$$f(t)\le \sup_{\substack{\varphi\in\mathcal{K}_+(T)\\ \varphi\le f}} \varphi(t) \ .$$

24. Állítás *Legyen μ pozitív lineáris forma $\mathcal{K}(T)$ felett, $f\in\mathcal{F}_+(T)$. Ekkor*

$$\mu^\bullet = \sup_{\substack{K\subset T\\ \textit{kompakt}}} \mu^*\big(\chi_K\cdot f\big) \ .$$

Bizonyítás Definíció szerint

$$\mu^\bullet(f) = \sup_{\varphi\in\mathcal{K}_+(T)} \mu^*\Big(\chi_{[\varphi\neq0]}\cdot f\Big) \le \sup_{\substack{K\subset T\\ \text{kompakt}}} \mu^*\big(\chi_K\cdot f\big) \ ,$$

mert $\varphi\in\mathcal{K}_+(T)$ esetén $[\varphi\neq0]\subset\mathrm{supp}(\varphi)$ kompakt. Fordítva, ha $K\subset T$ kompakt, akkor az Uriszon-tltel szerint létezik $\varphi\in\mathcal{K}(T)$ úgy, hogy $0\le\varphi\le1$ és $K\subset[\varphi=1]$. Ekkor $\chi_K\cdot f\le\chi_{[\varphi\neq0]}\cdot f$, így

$$\mu^*(\chi_K)\le\mu^*(\chi_{[\varphi\neq0]}\cdot f)\le\mu^\bullet(f) \ ,$$

így

$$\sup_{\substack{K\subset T\\ \text{kompakt}}} \mu^*\big(\chi_K\cdot f\big)\le\mu^\bullet(f) \ .$$

25. Állítás *Ha T σ-kompakt lokálisan kompakt tér és $\mu:\mathcal{K}(T)\to\mathbb{R}$ pozitív lineáris funkcionál, akkor $\mu^*=\mu^\bullet$.*

Bizonyítás Legyen $f\in\mathcal{F}_+(T)$, és $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakt halmazok monoton növő sorozata úgy, hogy $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n=T$. Ekkor

$$f = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \chi_{K_n}\cdot f \ ,$$

így

$$\mu^*(f) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu^*\big(\chi_{K_n}\cdot f\big) \leq \mu^\bullet(f) \ ,$$

tehát $\mu^*(f)=\mu^\bullet(f)$.

26. Állítás *Ha T σ-kompakt és metrizálható lokálisan kompakt tér, akkor*

$$\overline{\overline{\mathcal{K}_+(T)}} = \overline{\mathcal{K}_+(T)} \ ,$$

és ha $\mu:\mathcal{K}(T)\to\mathbb{R}$ pozitív lineáris funkcionál, akkor $\mu^{**}=\mu^*=\mu^\bullet$.

Bizonyítás Legyen $f\in\overline{\overline{\mathcal{K}_+(T)}}$ (azaz $T\to\overline{\mathbb{R}}_+$ alulról félig folytonos függvény), és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $T\to\mathbb{R}_+$ folytonos függvények monoton növő sorozata úgy, hogy

$$f = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n \ .$$

Legyen $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakt halmazok monoton növő sorozata úgy, hogy

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = T \ .$$

Ekkor $n\in\mathbb{N}$ esetén létezik $\varphi_n\in\mathcal{K}(T)$ úgy, hogy $0\leq\varphi_n\leq 1$ és $K_n\subset[\varphi_n=1]$.

$n\in\mathbb{N}$ esetén legyen

$$g_n := \bigvee_{\substack{k\leq n\\ l\leq n}} \varphi_l\cdot f_k \ ,$$

ekkor $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{K}_+(T)$-beli monoton növő sorozat úgy, hogy $\bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n=f$, tehát $f\in\overline{\mathcal{K}_+(T)}$.

Továbbá,

$$\mu^*(f) = \inf_{\substack{h\in\overline{\overline{\mathcal{K}_+(T)}}\\ h\geq f}} \mu^*(h) = \inf_{\substack{h\in\overline{\mathcal{K}_+(T)}\\ h\geq f}} \mu^*(h) = \mu^{**}(f) \ .$$

4. Fejezet

$\mathcal{F}^p$-terek

Ebben a fejezetben legyen T halmaz és m felső integrál T felett. $E\subset T$ esetén használni fogjuk az

$$m(E) := m(\chi_E)$$

jelölést.

4.1 Felső integrálok tulajdonságai

27. Állítás (A megszámlálható konvexitás tétele) *Tetszőleges $\mathcal{F}_+(T)$-beli $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra*

$$m\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} m(f_n) \ .$$

Bizonyítás

$$m\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big) = m\Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} f_k\Big) =$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} m\Big(\sum_{k=0}^{n} f_k\Big) \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} m(f_k) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(f_n) \ .$$

Következmény Az $m{:}\mathcal{P}(T)\to\overline{\mathbb{R}}_+$ leképezés Carathéodory-féle külső mérték, azaz

(1) $m(\emptyset)=0$,

(2) $E\subset F$ esetén $m(E)\le m(F)$,

(3) Ha $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az E részhalmazainak sorozata, akkor

$$m\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} (E_n) \ .$$

28. Állítás (Fatou-lemma) *Tetszőleges $\mathcal{F}_+(T)$-beli $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra*

$$m\Big(\liminf_{n\to+\infty} f_n\Big) \le \liminf_{n\to+\infty} m(f_n) \ .$$

Bizonyítás $n\in\mathbb{N}$ esetén m monotonitása miatt

$$m\Big(\bigwedge_{k\ge n} f_k\Big) \le \inf_{k\ge n} m(f_k) \ ,$$

és mivel a $\Big(\bigwedge_{k\ge n} f_k\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat monoton növő, így

$$m\Big(\liminf_{n\to+\infty} f_n\Big) = m\Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}}\bigwedge_{k\ge n} f_k\Big) =$$
$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} m\Big(\bigwedge_{k\ge n} f_k\Big) \le \sup_{n\in\mathbb{N}}\inf_{k\ge n} m(f_k) = \liminf_{n\to+\infty} m(f_n) \ .$$

4.2 Nullhalmazok

Definíció Azt mondjuk, hogy $E\subset T$ *m-nullhalmaz* vagy *m-eltűnő* halmaz, ha $m(E)=0$. Ha $\mathcal{A}(t)$ a T halmaz elemeire vonatkozó kijelentés, akkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}(t)$ *m-majdnem minden $t\in T$ esetén teljesül*, ha $\{t\in T : \neg\mathcal{A}(t)\}$ m-nullhalmaz.

29. Állítás *$f\in\mathcal{F}_+(T)$ esetén $m(f)=0$ pontosan akkor teljesül, ha $f(t)=0$ m-majdnem minden $t\in T$ esetén.*

Bizonyítás Ha $m(f)=0$, akkor

$$\chi_{[f\neq 0]} \le \bigvee_{n\in\mathbb{N}} (n\cdot f)$$

miatt $m([f\neq 0])=0$, azaz $f(t)=0$ m-majdnem minden $t\in T$ esetén.

Ha $f(t)=0$ m-majdnem minden $t\in T$ esetén, akkor

$$f \le \bigvee_{n\in\mathbb{N}} n\cdot\chi_{[f\neq 0]}$$

miatt $m(f)=0$.

30. Állítás *Ha $f\in\mathcal{F}_+(T)$ olyan, hogy $m(f)<+\infty$, akkor $f(t)<+\infty$ m-majdnem minden $t\in T$ esetén.*

Bizonyítás $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$\chi_{[f=+\infty]} \le \frac{1}{n} f \ ,$$

következésképpen

$$m([f=+\infty]) \le \frac{m(f)}{n} \ ,$$

ez pedig $m(f)<+\infty$ esetén csak úgy lehetséges, hogy $m([f=+\infty])=0$.

31. Állítás *Ha $f,g\in\mathcal{F}_+(T)$ olyanok, hogy $f(t)=g(t)$ m-majdnem minden $t\in T$ esetén, akkor $m(f)=m(g)$.*

Bizonyítás Legyen

$$h := (+\infty)\cdot\chi_{[f\neq g]} \ ,$$

ekkor $[h\neq 0]=[f\neq g]$ m-nullhalmaz, és $f\leq g+h$, így $m(f)\leq m(g)+m(h)=m(g)$. Hasonlóan, $g\leq f+h$ miatt $m(g)\leq m(f)+m(h)=m(f)$.

4.3 Hölder- és Minkowski-egyenlőtlenségek

Lemma *Legyenek $x,y\in\mathbb{R}_+$ és $\alpha,\beta\in[0,1]$ olyanok, hogy $\alpha+\beta=1$. Ekkor*

$$x^\alpha\cdot y^\beta \leq \alpha\cdot x + \beta\cdot y \ .$$

Bizonyítás Az $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$ függvény konvex.

32. Állítás (Hölder-egyenlőtlenség) *Ha $f,g\in\mathcal{F}_+(T)$ olyanok, hogy $m(f)<+\infty$ és $m(g)<+\infty$, és $\alpha,\beta\in[0,1]$ olyanok, hogy $\alpha+\beta=1$, akkor*

$$m(f^\alpha\cdot g^\beta) \leq m(f)^\alpha\cdot m(g)^\beta \ .$$

Bizonyítás Ha $m(g)$ és $m(f)$ valamelyike nulla, akkor az egyenlőtlenség teljesül úgy, hogy mindkét oldalán nulla áll. Legyen $m(f)>0$ és $m(g)>0$. Ekkor

$$m\left(\frac{f^\alpha\cdot g^\beta}{m(f)^\alpha\cdot m(g)^\beta}\right) = m\left(\left(\frac{f}{m(f)}\right)^\alpha\cdot\left(\frac{g}{m(g)}\right)^\beta\right) \leq$$

$$\leq m\left(\alpha\cdot\frac{f}{m(f)} + \beta\cdot\frac{g}{m(g)}\right) \leq \alpha+\beta = 1 \ ,$$

ebből átrendezéssel kapjuk a kíván egyenlőtlenséget.

Lemma *Legyenek $x,y\in\mathbb{R}_+$ és $p\geq 1$. Ekkor*

$$(x+y)^p \leq 2^{p-1}(x^p + y^p) \ .$$

Bizonyítás Az $\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $x\mapsto x^p$ függvény konvex $p\geq 1$ esetén.

Definíció Legyen $p\geq 1$.

(1) $f\in\mathcal{F}_+(T)$ esetén legyen

$$m_p(f) := \big(m(f^p)\big)^{1/p} \in \overline{\mathbb{R}}_+ \ ,$$

(2) $f:T\to\overline{\mathbb{R}}$ esetén legyen

$$m_p(f) := \big(m(|f|^p)\big)^{1/p} \in \overline{\mathbb{R}}_+ \ ,$$

(3) Ha F normált tér $\mathbb{K}$ felett és $f:T\to F$, akkor legyen

$$m_p(f) := \big(m(\|f\|^p)\big)^{1/p} \in \overline{\mathbb{R}}_+ \ .$$

33. Állítás (Minkowski-egyenlőtlenség) *Legyen $p\geq 1$ és $f,g\in\mathcal{F}_+(T)$. Ekkor*

$$m_p(f+g) \leq m_p(f) + m_p(g) \ .$$

Bizonyítás Tegyük fel, hogy $p>1$, $m(f^p)<+\infty$ és $m(g^p)<+\infty$. Ekkor az előző lemma szerint $m((f+g)^p)<+\infty$, így

$$\begin{aligned}
m((f+g)^p) = m\Big((f+g)^{p-1}\cdot f + (f+g)^{p-1}\cdot g)\Big) &\leq \\
\leq m\Big((f+g)^{p-1}\cdot f\Big) + m\Big((f+g)^{p-1}\cdot g\Big) &\leq \\
\leq m\Big(((f+g)^p)^{1-1/p}\cdot (f^p)^{1/p}\Big) + m\Big(((f+g)^p)^{1-1/p}\cdot (g^p)^{1/p}\Big) &\leq \\
\leq \Big(m((f+g)^p)\Big)^{1-1/p}\cdot (m_p(f) + m_p(g)) \ .&
\end{aligned}$$

Ha $m((f+g)^p)=0$, akkor az egyenlőtlenség igaz, mert a bal oldalán nulla áll, ha $m((f+g)^p)>0$, akkor pedig mindkét oldalt elosztva az $\Big(m((f+g)^p)\Big)^{1-1/p}$ számmal a kívánt egyenlőtlenséget kapjuk.

34. Állítás (A megszámlálható konvexitás tétele) *Legyen $p\geq 1$. Ekkor tetszőleges $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{F}_+(T)$-beli sorozat esetén*

$$m_p\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m_p(f_n) \ .$$

Bizonyítás Felhasználva,hogy az $x\mapsto x^p$ és $x\mapsto x^{1/p}$ függvények szigorúan monoton növők, m monoton σ-folytonosságát, valamint a Minkowski-egyenlőtlenséget (véges sok függvényre), kapjuk:

$$\begin{aligned}
m_p\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big) &= \left(m\left(\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big)^p\right)\right)^{1/p} = \left(m\left(\Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{n} f_k\Big)^p\right)\right)^{1/p} = \\
&= \left(m\left(\bigvee_{n\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{k=0}^{n} f_k\Big)^p\right)\right)^{1/p} = \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} m\left(\Big(\sum_{k=0}^{n} f_k\Big)^p\right)\right)^{1/p} = \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(m\left(\Big(\sum_{k=0}^{n} f_k\Big)^p\right)\right)^{1/p} = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_p\Big(\sum_{k=0}^{n} f_k\Big) \leq \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{n} m_p(f_k) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m_p(f_n) \ .
\end{aligned}$$

Következmény Ha $E\subset T$ esetén

$$m_p(E) := m_p(\chi_E) = m(E)^{1/p} \ ,$$

akkor $m_p{:}\mathcal{P}(T)\to\overline{\mathbb{R}}_+$ is Carathéodory-féle külső mérték.

4.4 $\mathcal{F}^p$-terek alaptulajdonságai

Legyen a továbbiakban $p\geq 1$.

Definíció Ha F normált tér $\mathbb{K}$ felett, vagy $\overline{\mathbb{R}}$, akkor legyen

$$\mathcal{F}_F^p(T,m) := \{f\in F^T : m_p(f)<+\infty\} \ .$$

35. Állítás *Ha F normált tér $\mathbb{K}$ felett, akkor $\mathcal{F}_F^p(T,m)$ lineáris altere F^T-nek, és m_p félnorma $\mathcal{F}_F^p(T,m)$ felett, továbbá $f\in\mathcal{F}_F^p(T,m)$ esetén $m_p(f)=0$ pontosan akkor teljesül, ha m-majdnem minden $t\in T$ esetén $f(t)=0$.*

Bizonyítás Legyen $f,g\in F^T$. A Minkowski-egyenlőtlenség szerint ekkor

$$\begin{aligned} m_p(f+g) = m_p(\|f+g\|) \leq m_p(\|f\|+\|g\|) \leq \\ \leq m_p(\|f\|)+m_p(\|g\|) = m_p(f)+m_p(g) \ , \end{aligned}$$

következésképpen $\mathcal{F}_F^p(T,m)$ zárt az összeadásra nézve, és m_p-re teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.

Legyen $f\in F^T$ és $\lambda\in\mathbb{K}$. Ekkor

$$\begin{aligned} m_p(\lambda\cdot f) = \left(m(\|\lambda\cdot f\|^p)\right)^{1/p} = \left(m(|\lambda|^p\cdot\|f\|^p)\right)^{1/p} = \\ = \left(|\lambda|^p\cdot m(\|f\|^p)\right)^{1/p} = |\lambda|\cdot\left(m(\|f\|^p)\right)^{1/p} = |\lambda|\cdot m_p(f) \ . \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy $\mathcal{F}_F^p(T,m)$ zárt a $\mathbb{K}$-beli skalárral való szorzásra, és m_p félnorma.

Mivel $[f\neq 0]=[\|f\|^p\neq 0]$, $f(t)=0$ m-majdnem minden $t\in T$ esetén ekvivalens azzal, hogy $\|f(t)\|^p=0$ m-majdnem minden $t\in T$ esetén, azaz $m(\|f\|^p)=0$, vagyis $m_p(f)=0$.

36. Állítás *Legyenek F és G normált terek, $u\in\mathcal{L}(F,G)$, $f\in\mathcal{F}_F^p(T,m)$. Ekkor $u\circ f\in\mathcal{F}_G^p(T,m)$, és*

$$m_p(u\circ f) \leq \|u\|\cdot m_p(f) \ .$$

Következmény Ha F normált tér $\mathbb{K}$ felett, akkor

$$\mathcal{F}_{\mathbb{K}}^p(T,m)\otimes F \subset \mathcal{F}_F^p(T,m) \ .$$

Bizonyítás $a\in F$ és $f\in\mathcal{F}_{\mathbb{K}}^p(T,m)$ esetén

$$u_a : \mathbb{K} \to F \ , \ \lambda \mapsto \lambda\cdot a$$

folytonos lineáris leképezés, és $f\otimes a=u_a\circ f$.

37. Állítás *Legyenek $p,q,r\geq 1$ olyanok, hogy $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$; F,G és H normált terek, $b{:}F\times G\to H$ folytonos $\mathbb{R}$-bilineáris leképezés.*

Ha $f\in\mathcal{F}_F^p(T,m)$ és $g\in\mathcal{F}_G^q(T,m)$, akkor $b\circ(f,g)\in\mathcal{F}_H^r(T,m)$, és

$$m_r(b\circ(f,g)) \leq \|b\|\cdot m_p(f)\cdot m_q(g) \ .$$

Bizonyítás Legyen $f,g{\in}\mathcal{F}_+(T)$. Ekkor az f^p és g^q függvényekre alkalmazva a Hölder-egyenlőtlenséget, felhasználva, hogy $r/p{+}r/q{=}1$, kapjuk, hogy

$$m(f^r{\cdot}g^r) \le m(f^p)^{r/p}{\cdot}m(g^q)^{r/q} \ ,$$

azaz

$$m_r(f{\cdot}g) \le m_p(f){\cdot}m_q(g) \ .$$

Ha $f{:}T{\to}F$ és $g{:}T{\to}G$ függvények, akkor

$$\|b{\circ}(f,g)\| \le \|b\|{\cdot}\|f\|{\cdot}\|g\|$$

és az előző miatt

$$m_r\big(b{\circ}(f,g)\big) \le \|b\|{\cdot}m_p(f){\cdot}m_q(g) \ .$$

Következmény Ha H Hilbert-tér, és $f,g{\in}\mathcal{F}^2_H(T,m)$, akkor $\langle f\ ,g\rangle\,{\in}\mathcal{F}^1_{\mathbb{K}}(T,m)$, és

$$m_1(\langle f\ ,g\rangle) \le m_2(f){\cdot}m_2(g) \ .$$

Megjegyzés Legyen m olyan felső integrál T felett, hogy $m(1){<}{+}\infty$, $p,r{\ge}1$ úgy, hogy $r{\le}p$. Ekkor $f{\in}\mathcal{F}_+(T)$ esetén

$$m_r(f) \le m_p(f){\cdot}m(1)^{1/r-1/p} \ .$$

Ugyanis, $r{\le}p$ miatt létezik $q{\ge}1$ úgy, hogy $\dfrac{1}{p}{+}\dfrac{1}{q}{=}\dfrac{1}{r}$, ekkor az előzőt alkalmazva az f és az 1 függvényekre kapjuk, hogy

$$m_r(f) \le m_p(f){\cdot}m_q(1) = m_p(f){\cdot}m(1)^{1/q} = m_p(f){\cdot}m(1)^{1/r-1/p} \ .$$

Következésképpen, ha F normált tér, akkor

$$\mathcal{F}^p_F(T,m) \subset \mathcal{F}^r_F(T,m) \ .$$

38. Állítás *Legyen F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{F}^p_F(T,m)$-beli sorozat úgy, hogy*

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_p(f_n) < +\infty \ .$$

Ekkor létezik $f{\in}\mathcal{F}^p_F(T,m)$ úgy, hogy m-majdnem minden $t{\in}T$ esetén

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \ ,$$

és

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

az $(\mathcal{F}^p_F(T,m), m_p)$ félnormált térben.

Bizonyítás Legyen

$$g := \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\| \ ,$$

ekkor a megszámlálható konvexitás tétele szerint

$$m_p(g) \leq \sum_{n=0}^{\infty} m_p\Big(\|f_n\|\Big) < +\infty \ ,$$

következésképpen $g{\in}\mathcal{F}^p_{\overline{\mathbb{R}}}(T,m)$, így m-majdnem minden $t{\in}T$ esetén $g(t){<}{+\infty}$. Legyen

$$H := \{t{\in}T : g(t){<}{+\infty}\} \ ,$$

ekkor $T\backslash H$ m-nullhalmaz, és $t{\in}H$ esetén $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n(t)\|{<}{+\infty}$. Ebből F teljessége miatt következik, hogy létezik $f(t){=}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$. A $t{\in}T\backslash H$ pontokban legyen $f(t){:=}0$. Ekkor $\|f\|{\leq}g$ teljesül, következésképpen $f{\in}\mathcal{F}^p_F(T,m)$. $n{\in}\mathbb{N}$ és $t{\in}H$ esetén

$$\|f(t) - \sum_{k=0}^{n} f_k(t)\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k(t)\| \ ,$$

következésképpen

$$m_p\left(f - \sum_{k=0}^{n} f_k\right) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} m_p(f_k(t)) \ .$$

A jobb oldal $n{\to}{+\infty}$ esetén nullához tart, így az egyenlőtlenség szerint a bal oldal is, tehát

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

az m_p félnorma szerint.

39. Állítás *Legyen F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat $\mathcal{F}^p_F(T,m)$-ben. Ekkor létezik $f{\in}\mathcal{F}^p_F(T,m)$, $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozat és $g{\in}\mathcal{F}^p_{\overline{\mathbb{R}}}(T,m)$ úgy, hogy*

(1) minden $k{\in}\mathbb{N}$ esetén $\|f_{n_k}\|{\leq}g$,

(2) m-majdnem minden $t{\in}T$ esetén $f(t){=}\lim\limits_k f_{n_k}(t)$,

(3) $f{=}\lim\limits_k f_{n_k}$ az m_p félnorma szerint.

Bizonyítás Mivel $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat, létezik $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozat úgy, hogy

$$m_p\big(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\big) \leq \frac{1}{2^k} \ .$$

Ekkor

$$\sum_{k=0}^{\infty} m_p\big(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\big) \leq 2 < +\infty \ ,$$

így az előző állítás szerint létezik $f \in \mathcal{F}^p_F(T,m)$ úgy, hogy m-majdnem minden $t \in T$ esetén

$$f(t) = f_{n_0}(t) + \sum_{k=0}^{\infty}\big(f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\big) \ ,$$

és

$$f = f_{n_0} + \sum_{n=0}^{\infty}\big(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\big)$$

az $(\mathcal{F}^p_F(T,m), m_p)$ félnormált térben.

Azonban $K \in \mathbb{N}$ esetén

$$f_{n_0} + \sum_{n=0}^{K-1}\big(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\big) = f_{n_K} \ , \qquad (*)$$

így m-majdnem minden $t \in T$ esetén $f(t) = \lim_k f_{n_k}(t)$, és $f = \lim_k f_{n_k}$ az m_p félnorma szerint.

Legyen

$$g := \|f_{n_0}\| + \sum_{k=0}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|$$

Ekkor a megszámlálható konvexitás tétele miatt

$$m_p(g) \leq m_p\big(f_{n_0}\big) + \sum_{k=0}^{\infty} m_p\big(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\big) < +\infty \ ,$$

így $g \in \mathcal{F}^p_{\overline{\mathbb{R}}}(T,m)$.

A $(*)$ egyenlőség szerint $K \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|f_{n_K}\| \leq \|f_{n_0}\| + \sum_{n=0}^{K-1} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| \leq g \ ,$$

így a bizonyítás teljes.

Következmény Ha F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, akkor az $(\mathcal{F}^p_F(T,m), m_p)$ félnormált tér teljes.

Bizonyítás Ha $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat $\mathcal{F}^p_F(T,m)$-ben, akkor az előző állítás szerint létezik m_p szerint konvergens részsorozata, melynek határértékéhez maga a sorozat is konvergál.

4.5 $\mathcal{F}^\infty$-terek

Definíció Legyen m felső integrál T felett.

(1) $f{\in}\mathcal{F}_+(T)$ esetén legyen

$$m_\infty(f) := \inf\big\{c{\in}\overline{\mathbb{R}}_+ : m\big([f{>}c]\big){=}0\big\} \in \overline{\mathbb{R}}_+ \ ,$$

(2) $f{:}T{\to}\overline{\mathbb{R}}$ esetén legyen

$$m_\infty(f) := m_\infty(|f|) \in \overline{\mathbb{R}}_+ \ ,$$

(3) Ha F normált tér $\mathbb{K}$ felett és $f{:}T{\to}F$, akkor legyen

$$m_\infty(f) := m_\infty(\|f\|) \in \overline{\mathbb{R}}_+ \ .$$

Azt mondjuk, hogy f *m-korlátos*, ha $m_\infty(f){<}{+}\infty$.

Definíció Ha F normált tér $\mathbb{K}$ felett, vagy $\overline{\mathbb{R}}$, akkor legyen

$$\mathcal{F}^\infty_F(T,m) := \{f{\in}F^T : m_\infty(f){<}{+}\infty\} \ .$$

40. Állítás *Ha F normált tér $\mathbb{K}$ felett, akkor $\mathcal{F}^\infty_F(T,m)$ lineáris altere F^T-nek, és m_∞ félnorma $\mathcal{F}^\infty_F(T,m)$ felett, továbbá $f{\in}\mathcal{F}^\infty_F(T,m)$ esetén $m_\infty(f){=}0$ pontosan akkor teljesül, ha m-majdnem minden $t{\in}T$ esetén $f(t){=}0$.*

41. Állítás *$f{\in}\mathcal{F}_+(T)$ esetén $f{\le}m_\infty(f)$ m-majdnem mindenütt.*

Bizonyítás Legyen $c{>}m_\infty(f)$, ekkor létezik $d{<}c$ úgy, hogy $m([f{>}d]){=}0$. Ekkor $[f{>}c]{\subset}[f{>}d]$ miatt $m([f{>}c]){=}0$ is teljesül.

Tegyük fel, hogy $m_\infty(f){<}{+}\infty$. Ekkor

$$m_\infty(f) = \inf\big\{r{\in}\mathbb{Q}_+ : r{>}m_\infty(f)\big\} \ ,$$

így

$$[f{>}m_\infty(f)] = \bigcup_{\substack{r\in\mathbb{Q}_+,\\ r>m_\infty(f)}} [f{>}r]$$

m-nullhalmaz, tehát m-majdnem mindenütt $f{\le}m_\infty(f)$.

Következmény Legyen $p{\ge}1$, F,G és H normált terek, $b{:}F{\times}G{\to}H$ folytonos $\mathbb{R}$-bilineáris leképezés.

Ha $f{\in}\mathcal{F}^p_F(T,m)$ és $g{\in}\mathcal{F}^\infty_G(T,m)$, akkor $b{\circ}(f,g){\in}\mathcal{F}^p_H(T,m)$, és

$$m_p(b{\circ}(f,g)) \le \|b\|{\cdot}m_p(f){\cdot}m_\infty(g) \ .$$

Bizonyítás Ha $f{:}T{\to}F$ és $g{:}T{\to}G$ függvények, akkor m-majdnem mindenütt

$$\|b{\circ}(f,g)\| \le \|b\|{\cdot}\|f\|{\cdot}\|g\| \le \|b\|{\cdot}\|f\|{\cdot}m_\infty(g)$$

így

$$m_p\big(b{\circ}(f,g)\big) \le \|b\|{\cdot}m_p(f){\cdot}m_\infty(g) \ .$$

42. Állítás *Legyen m felső integrál T felett, F normált tér, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{F}_F^\infty(T,m)$-beli sorozat, $f\in\mathcal{F}_F^\infty(T,m)$. Ekkor a következők ekvivalensek:*

(1) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál f-hez m_∞ szerint,

(2) Létezik $E\subset T$ úgy, hogy $m(T\setminus E)=0$, és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ E-n egyenletesen f-hez konvergál.

Bizonyítás Ha (1) teljesül akkor minden $n\in\mathbb{N}$ esetén létezik $N(n)\in\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $k\geq N(n)$ esetén

$$m_\infty(f_k-f) \leq \frac{1}{n+1} \ .$$

Ekkor

$$E_{nk} := \left[\|f-f_k\| \leq \frac{1}{n+1}\right]$$

komplementere m-nullhalmaz, és minden $k\geq N(n)$ esetén

$$\sup_{E_{nk}} \|f-f_k\| \leq \frac{1}{n+1} \ .$$

Legyen

$$E := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq N(n)} E_{nk}$$

Ekkor E komplementere m-nullhalmaz, és minden $n\in\mathbb{N}$, $k\geq N(n)$ esetén

$$\sup_{E} \|f-f_k\| \leq \sup_{E_{nk}} \|f-f_k\| \leq \frac{1}{n+1} \ ,$$

tehát $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ E-n egyenletesen f-hez konvergál.

Ha (2) teljesül, akkor $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$m_\infty(f_n-f) \leq \sup_{E} \|f_n-f\|$$

miatt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ m_∞ szerint f-hez konvergál.

43. Állítás *Legyen m felső integrál T felett, F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett. Ekkor az $(\mathcal{F}_F^\infty(T,m), m_\infty)$ félnormált tér teljes.*

Bizonyítás Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ m_∞-Cauchy-sorozat $\mathcal{F}_F^\infty(T,m)$-ben. Ekkor minden $n\in\mathbb{N}$ esetén létezik $N(n)\in\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $j,k\geq N(n)$ esetén

$$m_\infty(f_j-f_k) \leq \frac{1}{n+1} \ .$$

Ekkor

$$E_{njk} := \left[\|f_j-f_k\| \leq \frac{1}{n+1}\right]$$

komplementere m-eltűnő, és

$$\sup_{E_{njk}} \|f_j - f_k\| \leq \frac{1}{n+1} \ .$$

Legyen

$$E := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{j,k\geq N(n)} E_{njk} \ .$$

Továbbá, $n\in\mathbb{N}$ esetén a

$$H_n := [\|f_n\| \leq m_\infty(f_n)]$$

halmaz komplementere m-nullhalmaz, és f_n korlátos H_n-en, legyen

$$H := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n \ .$$

Ekkor H komplementere m-nullhalmaz, és H-n minden f_n korlátos.

Tehát $E\cap H$ komplementere m-nullhalmaz, és $\left(f_n\big|_{E\cap H}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat $\mathcal{F}^b(E\cap H, F)$-ben, következésképpen létezik $f\in\mathcal{F}^b(E\cap H, F)$, melyhez konvergál $E\cap H$-n egyenletesen. Ekkor f nullával való kiterjesztése T-re m-korlátos, és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál hozzá m_∞ szerint.

5. Fejezet

$\mathcal{L}^p$-terek és integrálás I.

A továbbiakban legyen (T, L) adott mérhető tér, F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, $p \geq 1$.

5.1 $\mathcal{L}^p$-terek alaptulajdonságai

Definíció Legyen m felső integrál T felett. Azt mondjuk, hogy m *p-integrál (T, L) felett*, ha

(1) minden $\varphi \in L_+$ esetén $m(\varphi^p) < +\infty$,

(2) minden $\varphi, \psi \in L_+$ esetén

$$m(\varphi^p) + m(\psi^p) \leq m\big((\varphi+\psi)^p\big) \ .$$

Az 1-integrálokat röviden *integráloknak* nevezzük. Az m felső integrál pontosan akkor integrál (T, L) felett, ha $m\big|_{L_+}$ véges értékű és additív.

Lemma *$x, y \in \mathbb{R}_+$ és $p \geq 1$ esetén*

$$x^p + y^p \leq (x+y)^p \ .$$

Bizonyítás Mivel

$$\frac{x}{x+y} \leq 1 \ \text{ és } \ \frac{y}{x+y} \leq 1 \ ,$$

így

$$\left(\frac{x}{x+y}\right)^p \leq \frac{x}{x+y} \ \text{ és } \ \left(\frac{y}{x+y}\right)^p \leq \frac{y}{x+y} \ ,$$

a kettőt összeadva és átrendezve kapjuk a kívánt eredményt.

Megjegyzés Ha (T, L) olyan, hogy $L_+^p \subset L_+$ teljesül, és m integrál (T, L) felett, akkor m p-integrál (T, L) felett.

Ugyanis, $\varphi, \psi \in L_+$ esetén az előző lemma szerint

$$\varphi^p + \psi^p \leq (\varphi+\psi)^p \ ,$$

és, mivel m integrál (T, L) felett, ebből következik, hogy

$$m(\varphi^p) + m(\psi^p) = m\big(\varphi^p{+}\psi^p\big) \leq m\big((\varphi{+}\psi)^p\big) \ .$$

44. Állítás *Legyen m p-integrál (T, L) felett. Ekkor $L{\otimes}F{\subset}\mathcal{F}^p_F(T, m)$.*

Bizonyítás Legyen $\sum_{k=1}^{n} \varphi_k{\otimes}z_k{\in}L{\otimes}F$. Ekkor

$$m_p\left(\sum_{k=1}^{n} \varphi_k{\otimes}z_k\right) \leq m_p\left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi_k|{\cdot}\|z_k\|\right) \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} m_p(\varphi_k){\cdot}\|z_k\| = \sum_{k=1}^{n} \big(m(|\varphi_k|^p)\big)^{1/p}{\cdot}\|z_k\| < +\infty \ .$$

Definíció Ha m p-integrál (T, L) felett, akkor jelölje $\mathcal{L}^p_F(T, L, m)$ az $L{\otimes}F{\subset}$ $\mathcal{F}^p_F(T, m)$ lineáris altér m_p félnorma szerinti lezártját. $\mathcal{L}^p_F(T, L, m)$ elemeit *p-edik hatványon (T, L, m)-integrálható függvényeknek* vagy röviden (T, L, m_p)-integrálható függvényeknek nevezzük.

Megjegyzés Az $(\mathcal{F}^p_F(T, m), m_p)$ félnormált tér teljességéből következik, hogy $(\mathcal{L}^p_F(T, L, m), m_p)$ is teljes félnormált tér. Sőt, az $\mathcal{F}^p$-terekre kimondott 39. állítás alapján $\mathcal{L}^p$-terekre a következő mondható:

45. Állítás (Riesz–Fischer-tétel) *Legyen m p-integrál (T, L) felett, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat $\mathcal{L}^p_F(T, L, m)$-ben. Ekkor létezik $f{\in}\mathcal{L}^p_F(T, m)$, $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozat és $g{\in}\mathcal{F}^p_{\overline{\mathbb{R}}}(T, m)$ úgy, hogy*

(1) minden $k{\in}\mathbb{N}$ esetén $\|f_{n_k}\|{\leq}g$,

(2) m-majdnem minden $t{\in}T$ esetén $f(t){=}\lim_k f_{n_k}(t)$,

(3) $f{=}\lim_k f_{n_k}$ az m_p félnorma szerint.

Bizonyítás Csak $f{\in}\mathcal{L}^p_F(T, L, m)$ bizonyítandó, ez azonban következik abból, hogy $\mathcal{L}^p_F(T, L, m)$ zárt (definíció szerint) $\mathcal{F}^p_F(T, m)$-ben.

Következmény Legyen m p-integrál (T, L) felett, és $f{\in}\mathcal{F}^p_F(T, L, m)$. Ekkor létezik olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $L{\otimes}F$-beli sorozat és $g{\in}\mathcal{F}^p_{\overline{\mathbb{R}}}(T, m)$ úgy, hogy

(1) minden $n{\in}\mathbb{N}$ esetén $\|f_n\|{\leq}g$,

(2) m-majdnem minden $t{\in}T$ esetén $f(t){=}\lim_n f_n(t)$,

(3) $f{=}\lim_n f_n$ az m_p félnorma szerint.

46. Állítás *Legyen m p-integrál (T, L) felett, és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{L}^p_F(T, L, m)$-beli Cauchy-sorozat, mely m-majdnem mindenütt konvergál az $f{:}T{\to}F$ függvényhez. Ekkor $f{\in}\mathcal{L}^p_F(T, L, m)$, és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál f-hez m_p szerint.*

Bizonyítás Legyen $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ a Riesz–Fischer-tétel szerinti részsorozat, és jelölje $f'\in\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$ azt a függvényt, melyhez ez a részsorozat konvergál m_p szerint is, m-majdnem mindenütt is. Mivel az eredeti sorozat konvergál f-hez m-majdnem mindenütt, így ennek az $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozata is, következésképpen f és f' m-majdnem mindenütt egyenlők, tehát $f\in\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$, és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál f-hez m_p szerint.

Definíció Ha m p-integrál (T,L) felett, akkor jelölje $\mathcal{L}^p_{\overline{\mathbb{R}}}(T,L,m)$ azon $f{:}T\to\overline{\mathbb{R}}$ függvények halmazát, melyekre létezik $g\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$ úgy, hogy m-majdnem minden $t\in T$ esetén $f(t){=}g(t)$.

Megjegyzés $\mathcal{L}^p_{\overline{\mathbb{R}}}(T,L,m)\subset\mathcal{F}^p_{\overline{\mathbb{R}}}(T,m)$ miatt az $\mathcal{L}^p_{\overline{\mathbb{R}}}(T,L,m)$ halmaz elemei m-majdnem mindenütt véges értékű függvények.

47. Állítás *Ha m p-integrál (T,L) felett, akkor $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$ lineáris háló a pontonkénti rendezésre nézve.*

Bizonyítás Legyen $f\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$ és $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ L-beli sorozat, mely konvergál f-hez m_p szerint. Ekkor az $\big||f|{-}|\varphi_n|\big|\le|f{-}\varphi_n|$ egyenlőtlenség szerint

$$m_p\big(|f|{-}|\varphi_n|\big)\le m_p\big(f{-}\varphi_n\big)\ ,$$

következésképpen $(|\varphi_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ L_+-beli sorozat, mely konvergál $|f|$-hez m_p szerint, tehát $|f|\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$.

48. Állítás *Legyen m p-integrál (T,L) felett, F és G Banach-terek, $u\in\mathcal{L}(F,G)$, $f\in\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$. Ekkor $u\circ f\in\mathcal{L}^p_G(T,L,m)$, és*

$$m_p(u\circ f)\le\|u\|{\cdot}m_p(f)\ .$$

Bizonyítás Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $L\otimes F$-beli sorozat, mely konvergál f-hez m_p szerint. Ekkor $(u\circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $L\otimes G$-beli sorozat, és $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$m_p(u\circ f{-}u\circ f_n)\le\|u\|{\cdot}m_p(f{-}f_n)\ ,$$

így $(u\circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál $u\circ f$-hez m_p szerint.

Következmény Ha F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, akkor

$$\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(T,L,m)\otimes F\subset\mathcal{L}^p_F(T,L,m)\ .$$

Bizonyítás $a\in F$ és $f\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(T,L,m)$ esetén

$$u_a:\mathbb{K}\to F\ ,\ \lambda\mapsto\lambda{\cdot}a$$

folytonos lineáris leképezés, és $f\otimes a{=}u_a\circ f$.

5.2 Beppo Levi-tétel

Lemma *Legyen m p-integrál (T,L) felett, $f,g\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$, $0{\le}f,0{\le}g$. Ekkor*

$$m(f^p)+m(g^p)\le m\big((f{+}g)^p\big)\ .$$

Bizonyítás Legyen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ két olyan L_+-beli sorozat, mely f-hez és g-hez konvergál m_p szerint. Ekkor $(\varphi_n+\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál $f+g$-hez m_p szerint.

$n\in\mathbb{N}$ esetén, mivel m p-integrál (T, L) felett,

$$m(\varphi_n^p) + m(\psi_n^p) \leq m\big((\varphi_n+\psi_n)^p\big) \ ,$$

teljesül, így

$$m(f^p) + m(g^p) = \lim_n \big(m(\varphi_n^p) + m(\psi_n^p)\big) \leq \lim_n m\big((\varphi_n+\psi_n)^p\big) = m\big((f+g)^p\big) \ .$$

1. Következmény *Ha m p-integrál a (T, L) mérhető tér felett, akkor p-integrál a $(T, \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T, L, m))$ mérhető tér felett is.*

2. Következmény *Legyen m p-integrál (T, L) felett, $f, g\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$, $0\leq f\leq g$. Ekkor*

$$m((g-f)^p) \leq m(g^p) - m(f^p) \ .$$

49. Állítás (Beppo Levi-tétel) *Legyen m p-integrál (T,L) felett, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitív $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T, L, m)$-beli függvények monoton növő sorozata. Ekkor a következők ekvivalensek*

(1) $f := \bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n \in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T, L, m)$,

(2) $\sup_{n\in\mathbb{N}} m_p(f_n) < +\infty$,

és ha ezek teljesülnek, akkor $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál f-hez m_p szerint, és

$$m_p(f) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_p(f_n) \ .$$

Bizonyítás Ha (1) teljesül, akkor

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} m_p(f_n) \leq m_p(f) < +\infty \ .$$

Ha (2) teljesül, akkor $k, j\in\mathbb{N}$, $k\leq j$ esetén $0\leq f_k\leq f_j$, így az előző lemma szerint

$$m\big((f_j-f_k)^p\big) \leq m(f_j^p) - m(f_k^p) \ ,$$

tetszőleges $j, k\in\mathbb{N}$ esetén pedig

$$m\big((f_j-f_k)^p\big) \leq |m(f_j^p) - m(f_k^p)| \ ,$$

azaz

$$\big(m_p(f_j-f_k)\big)^p \leq \big|\big(m_p(f_j)\big)^p - \big(m_p(f_k)\big)^p\big| \ . \qquad (*)$$

$(m_p(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő korlátos sorozat, így $((m_p(f_n))^p)_{n\in\mathbb{N}}$ is ilyen, következésképpen konvergens, tehát Cauchy-sorozat, így $(*)$ szerint $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is Cauchy sorozat m_p szerint. $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T, L, m)$ teljes m_p-re nézve, így létezik $f'\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T, L, m)$, melyhez $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál m_p szerint. Ekkor a Riesz–Fischer-tétel szerint $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valamely részsorozata m-majdnem mindenütt f'-höz konvergál, és mindenütt f-hez konvergál, következésképpen f és f' m-majdnem mindenütt egyenlők, így $f\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T, L, m)$, és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál f-hez m_p szerint.

1. Következmény *Legyen m p-integrál (T,L) felett, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$-beli pozitív függvények monoton fogyó sorozata. Ekkor $f:=\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} f_n\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál f-hez m_p szerint, és*

$$m_p(f)=\inf_{n\in\mathbb{N}} m_p(f_n)\ .$$

Bizonyítás Legyen $n\in\mathbb{N}$ esetén $g_n:=f_0-f_n\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$. Ekkor $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő, és

$$\bigvee_{n\in\mathbb{N}} g_n=f_0-f\ .$$

Mivel minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $g_n\leq f_0$, így

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} m_p(g_n)\leq m_p(f_0)<+\infty\ ,$$

a Beppo Levi-tétel szerint $f_0-f\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$, és $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál f_0-f-hez m_p szerint, következésképpen $f\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$, és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál f-hez m_p szerint.

Megjegyzés Igaz marad a fenti következményben kimondott állítás akkor is, ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{L}^p_{\overline{\mathbb{R}}}(T,L,m)$-beli pozitív függvények monoton fogyó sorozata. Ekkor ugyanis, ha $n\in\mathbb{N}$ esetén $f'_n\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$ olyan, hogy f_n és f'_n m-majdnem mindenütt egyenlők, akkor

$$N:=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[f_n\neq f'_n]$$

m-nullhalmaz, és ha f''_n jelöli azt a függvényt, amely N pontjaiban nulla, N-en kívül f'_n-vel egyenlő, akkor $(f''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó, $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$-beli, $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} f_n$ és $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} f''_n$ m-majdnem mindenütt egyenlők.

2. Következmény *Legyen m p-integrál (T,L) felett, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$-beli pozitív függvények sorozata. Ekkor $f:=\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} f_n\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$.*

Bizonyítás Legyen $n\in\mathbb{N}$ esetén $g_n:=\bigwedge_{k=0}^{n} f_k\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$. Ekkor $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó, és $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} f_n=\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} g_n\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$ az 1. következmény szerint.

Megjegyzés Igaz marad a fenti akkor is, ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{L}^p_{\overline{\mathbb{R}}}(T,L,m)$-beli pozitív függvények sorozata.

3. Következmény *Legyen m p-integrál (T,L) felett, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$-beli sorozat. Ekkor $f:=\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n\in\mathcal{L}^p_{\overline{\mathbb{R}}}(T,L,m)$ pontosan akkor teljesül, ha $f\in\mathcal{F}^p_{\overline{\mathbb{R}}}(T,m)$.*

Bizonyítás Mivel $n\in\mathbb{N}$ esetén $\bigvee_{k=0}^{n} f_k\geq f_0=f_0^+-f_0^-$, így

$$h_n:=\bigvee_{k=0}^{n} f_k+f_0^-\geq f_0^+\geq 0\ ,$$

és $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitív $\mathcal{L}^p_{\overline{\mathbb{R}}}(T,L,m)$-beli függvények monoton növő sorozata, úgy, hogy

$$\bigvee_{n\in\mathbb{N}} h_n = f + f_0^- ,$$

továbbá a

$$m_p(h_n) \leq m_p(f{+}f_0^-) \leq m_p(f) + m_p(f_0^-) < +\infty$$

egyenlőtlenség miatt a Beppo Levi-tétel szerint $f{+}f_0^-{\in}\mathcal{L}^p_{\overline{\mathbb{R}}}(T,L,m)$, következésképpen $f{\in}\mathcal{L}^p_{\overline{\mathbb{R}}}(T,L,m)$.

4. Következmény *Legyen m p-integrál (T,L) felett, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$-beli pozitív függvényekből álló sorozat úgy, hogy $g{:=}\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n{\in}\mathcal{F}^p_{\overline{\mathbb{R}}}(T,m)$. Ekkor*

$$\limsup_{n\to+\infty} f_n{\in}\mathcal{L}^p_{\overline{\mathbb{R}}}(T,L,m) ,$$

és

$$\limsup_{n\to+\infty} m_p(f_n) \leq m_p\Big(\limsup_{n\to+\infty} f_n\Big) .$$

Bizonyítás $n{\in}\mathbb{N}$ esetén a 3. következmény szerint

$$g_n := \bigvee_{k\geq n} f_k \in \mathcal{L}^p_{\overline{\mathbb{R}}}(T,L,m) ,$$

$(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó, így az 1. következmény szerint

$$\limsup_{n\to+\infty} f_n = \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} g_n \in \mathcal{L}^p_{\overline{\mathbb{R}}}(T,L,m) ,$$

és

$$m_p\Big(\limsup_{n\to+\infty} f_n\Big) = \inf_{n\in\mathbb{N}} m_p(g_n) \geq \inf_{n\in\mathbb{N}}\Big(\sup_{k\geq n} m_p(f_k)\Big) = \limsup_{n\to+\infty} m_p(f_n) .$$

5. Következmény *Legyen m p-integrál (T,L) felett, $f{\in}\mathcal{F}^p_{\mathbb{R}}(T,m)$. Ekkor $f{\in}$ $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$ pontosan akkor teljesül, ha létezik $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$-beli sorozat, mely m-majdnem mindenütt f-hez konvergál.*

Bizonyítás Ha $f{\in}\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$, akkor még ilyen L-beli sorozat is létezik.

Tegyük fel először, hogy $f{\geq}0$. Ekkor $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ választható pozitívnak. $n{\in}\mathbb{N}$ esetén a 2. következmény szerint

$$g_n := \bigwedge_{k\geq n} f_k \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m) ,$$

$(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő, és

$$\bigvee_{n\in\mathbb{N}} g_n = \liminf_{n\to+\infty} f_n$$

m-majdnem mindenütt egyenlő f-fel, így $n{\in}\mathbb{N}$ esetén g_n m-majdnem mindenütt kisebb-egyenlő f-nél, következésképpen $\sup_{n\in\mathbb{N}} m_p(g_n){\leq}m_p(f){<}{+\infty}$, így a Beppo Levi-tétel szerint $f{\in}\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$.

Az általános esetben $(f_n^{\pm})_{n\in\mathbb{N}}$ pozitív $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$-beli sorozat, mely m-majdnem mindenütt konvergál $f^{\pm}$-hoz, így $f^{\pm}{\in}\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$, azaz $f{\in}\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$.

5.3 Lebesgue-tétel

50. Állítás *Legyen m p-integrál (T, L) felett. Ekkor*

$$\overline{L}_+ \cap \mathcal{F}^p_{\mathbb{R}}(T, m) \subset \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T, L, m) \ .$$

Bizonyítás Legyen $f \in \overline{L}_+$, és $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő L_+-beli sorozat úgy, hogy

$$f = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n \ .$$

Ekkor

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} m_p(\varphi_n) \leq m_p(f) < +\infty \ ,$$

így a Beppo Levi-tétel szerint $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T, L, m)$.

51. Állítás *Legyen m p-integrál (T, L) felett, $f \in \mathcal{L}^p_F(T, L, m)$. Ekkor*

$$\|f\| \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T, L, m) \ .$$

Bizonyítás Tegyük fel először, hogy $f \in L \otimes F$, legyen

$$f = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \otimes z_k \ ,$$

és legyen

$$E := \sum_{k=1}^{n} \mathbb{R} \cdot z_k \subset F \ ,$$

továbbá, legyen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sűrű sorozat $E'_{\mathbb{R}}$ zárt egységgömbjében, ekkor

$$\|f\| = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} |u_n \circ f| \ ,$$

következésképpen $\|f\| \in \overline{L}_+$; valamint

$$\|f\| \leq \sum_{k=1}^{n} |\varphi_k| \cdot \|z_k\| \in L_+ \ ,$$

következésképpen $\|f\| \in \mathcal{F}^p_{\mathbb{R}}(T, m)$, így az előző állítás szerint $\|f\| \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T, L, m)$.

Az általános esetben legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $L \otimes F$-beli sorozat, mely konvergál f-hez m_p szerint. Ekkor az

$$|\, \|f\| - \|f_n\| \,| \leq \|f - f_n\|$$

egyenlőtlenség miatt

$$m_p(\|f\| - \|f_n\|) \leq m_p(f - f_n) \ ,$$

így $\|f\| \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T, L, m)$.

52. Állítás (Lebesgue-tétel) *Legyen m p-integrál (T,L) felett, és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$-beli sorozat, mely m-majdnem mindenütt konvergál az $f{:}T\to F$ függvényhez, és létezik $g\in\mathcal{F}^p_{\overline{\mathbb{R}}}(T,m)$ pozitív úgy, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ és m-majdnem minden $t\in T$ esetén $\|f_n(t)\|\le g(t)$. Ekkor $f\in\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$, és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál f-hez m_p szerint.*

Bizonyítás Ha $n\in\mathbb{N}$, akkor minden $j,k\ge n$ és m-majdnem minden $t\in T$ esetén $\|f_j(t)-f_k(t)\|\le 2g(t)$, így az előző állítás és a Beppo Levi-tétel 3. következménye szerint

$$g_n := \bigvee_{j,k\ge n} \|f_j-f_k\| \in \mathcal{L}^p_{\overline{\mathbb{R}}}(T,L,m) \ .$$

Továbbá, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó, így a Beppo Levi-tétel 1. következménye szerint $\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n\in\mathcal{L}^p_{\overline{\mathbb{R}}}(T,L,m)$, és

$$m_p\Big(\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} g_n\Big) = \inf_{n\in\mathbb{N}} m_p(g_n) \ .$$

Ha $t\in T$ olyan, hogy $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens, akkor Cauchy-sorozat is, következésképpen

$$\Big(\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} g_n\Big)(t) = \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{j,k\ge n} \|f_j(t)-f_k(t)\| = 0 \ ,$$

és, mivel a feltételek szerint $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ m-majdnem mindenütt konvergens, így $\Big(\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n\Big)$ m-majdnem mindenütt nulla, következésképpen

$$\inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{j,k\ge n} m_p\big(f_j-f_k\big) \le \inf_{n\in\mathbb{N}} m_p\Big(\bigvee_{j,k\ge n} \|f_j-f_k\|\Big) = \inf_{n\in\mathbb{N}} m_p(g_n) = 0 \ .$$

Azt kaptuk tehát, hogy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat $\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$-ben, így a 46. állítás szerint $f\in\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$, és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál f-hez m_p szerint.

5.4 Abszolút folytonosság

Definíció Legyen m és n két felső integrál T felett. Azt mondjuk, hogy m *abszolút folytonos n-re*, ha minden n-nullhalmaz m-nullahalmaz. Ekkor azt írjuk, hogy $m\ll n$

Megjegyzés Nyilvánvaló, hogy ha $m\le n$, akkor $m\ll n$ teljesül.

Megjegyzés $m\ll n$ pontosan akkor igaz, ha minden $f\in\mathcal{F}_+(T)$, $n(f)=0$ esetén $m(f)=0$. Ugyanis, $n(f)=0$ esetén $n([f\neq 0])=0$, következésképpen $m([f\neq 0])=0$, ez pedig ekvivalens azzal, hogy $m(f)=0$.

53. Állítás *Legyen m és n két p-integrál (T,L) felett úgy, hogy $m\ll n$ és emellett $m\big|_{L^p_+}=n\big|_{L^p_+}$ teljesül. Ekkor*

$$\mathcal{L}^p_F(T,L,n) \subset \mathcal{L}^p_F(T,L,m) \ ,$$

és $f\in\mathcal{L}^p_F(T,L,n)$ esetén $n_p(f)=m_p(f)$.

Bizonyítás $f\in\mathcal{L}^p_F(T,L,n)$ esetén létezik $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $L\otimes F$-beli sorozat, mely n_p szerint és n-majdnem mindenütt konvergál f-hez. Ekkor $m\ll n$ miatt ezen sorozat m-majdnem mindenütt konvergál f-hez. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n_p-Cauchy-sorozat, azaz

$$\lim_{j,k\to\infty} n_p\big(f_j-f_k\big) = 0 \ .$$

Mivel $\|f_j-f_k\|\in\overline{L}_+$, létezik $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ L_+-beli monoton növő sorozat úgy, hogy $\|f_j-f_k\|=\bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}}\varphi_n$. A Beppo Levi-tétel szerint ekkor $n_p\big(\|f_j-f_k\|\big)=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} n_p(\varphi_n)$, az $m\big|_{L^p_+}=n\big|_{L^p_+}$ feltétel miatt ebből következik, hogy $n_p(f_j-f_k)=m_p(f_j-f_k)$, következésképpen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat m_p szerint, így a 46. állítás szerint $f\in\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$, és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál f-hez m_p szerint. Továbbá, az előzőhöz hasonló gondolatmenettel $n\in\mathbb{N}$-re $\|f_n\|\in\overline{L}_+$ miatt kapjuk, hogy $n_p(f_n)=m_p(f_n)$, ebből pedig következik, hogy $n_p(f)=m_p(f)$.

Megjegyzés Ha m és n két p-integrál (T,L) felett úgy, hogy $m\le n$, akkor

$$\mathcal{L}^p_F(T,L,n)\subset\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$$

teljesül még az $m\big|_{L^p_+}=n\big|_{L^p_+}$ feltétel nélkül is.

5.5 p-edik hatványon integrálható halmazok

Definíció Ha m p-integrál (T,L) felett, akkor az

$$\mathcal{R}^p(T,L,m) := \big\{E\subset T : \chi_E\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)\big\}$$

halmaz elemeit *p-edik hatványon m-integrálható halmazoknak* nevezzük.

Megjegyzés Ha m integrál és p-integrál (T,L) felett, akkor

$$\mathcal{R}^p(T,L,m) = \mathcal{R}^1(T,L,m) \ , \qquad (*)$$

ugyanis $m_p(E)=m_1(E)^{1/p}$ miatt $\chi_E\in\mathcal{F}^p(T,m)$ és $\chi_E\in\mathcal{F}^1(T,m)$ ekvivalensek. Mivel mind $E\in\mathcal{R}^p(T,L,m)$, mind $E\in\mathcal{R}^1(T,L,m)$ esetén létezik L-beli sorozat, mely m-majdnem mindenütt konvergál χ_E-hez, így alkalmazható a Beppo Levi-tétel 5. következménye.

54. Állítás *$\mathcal{R}^p(T,L,m)$ δ-gyűrű.*

Bizonyítás Legyen $E,F\in\mathcal{R}^p(T,L,m)$, ekkor

$$\begin{aligned}
\chi_{E\cap F} &= \chi_E\wedge\chi_F = \chi_E\cdot\chi_F \ , \\
\chi_{E\cup F} &= \chi_E\vee\chi_F = \chi_E+\chi_F - \chi_E\cdot\chi_F \le \chi_E+\chi_F \ , \\
\chi_{E\setminus F} &= \chi_E - \chi_E\cdot\chi_F
\end{aligned}$$

miatt $E\cup F, E\setminus F\in\mathcal{R}^p(T,L,m)$. Ha $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{R}^p(T,L,m)$-beli sorozat, akkor

$$\chi_{\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n} = \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \chi_{E_n}$$

miatt $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n\in\mathcal{R}(T,L,m)$.

55. Állítás

(1) Ha $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó $\mathcal{R}^p(T,L,m)$-beli sorozat, akkor

$$m_p\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) = \inf_{n\in\mathbb{N}} m_p(E_n)\ .$$

(2) Ha $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő $\mathcal{R}^p(T,L,m)$-beli sorozat, akkor $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\in \mathcal{R}^p(T,L,m)$ pontosan akkor teljesül, ha $\sup_{n\in\mathbb{N}} m_p(E_n)<+\infty$, és ekkor

$$m_p\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_p(E_n)\ .$$

(3) Ha $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{R}^p(T,L,m)$-beli sorozat úgy, hogy $\sum_{n\in\mathbb{N}} m_p(E_n)<+\infty$, akkor $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\in\mathcal{R}^p(T,L,m)$, és

$$m_p\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} m_p(E_n)\ ,$$

Bizonyítás

$$\chi_{\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n} = \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \chi_{E_n}\ ,$$
$$\chi_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n} = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \chi_{E_n} \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{E_n}\ ,$$

így az állítás a Beppo Levi-tétel következménye.

5.6 Integrálás

A továbbiakban legyen adott (T,L) mérhető tér, $\mu\in\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(T,L)$, m integrál (T,L) felett, és F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett a következő tulajdonságokkal:

(1) ha μ valós, akkor F valós vagy komplex,

(2) ha μ nem valós, akkor F komplex, és (T,L)-re teljesül $(\mathbf{C_I})$ és $(\mathbf{C_{II}})$,

(3) $|\mu|\big|_{L_+}=m\big|_{L_+}$.

Definíció $\mathcal{L}^1_F(T,L,m)$ elemeit *m-integrálható függvényeknek* nevezzük.

Megjegyzés Ha F komplex vektortér, akkor az $L_{\mathbb{C}}\otimes F$ komplex tenzorszorzat azonosítható az $L\otimes F$ valós tenzorszorzattal. Ha $(\psi_k)_{1\le k\le n}$ $L_{\mathbb{C}}$-beli és $(z_k)_{1\le k\le n}$ F-beli rendszerek, akkor

$$\sum_{k=1}^{n} \psi_k\otimes z_k = \sum_{k=1}^{n}\Big((\mathrm{Re}\circ\psi_k)\otimes z_k + (\mathrm{Im}\circ\psi_k)\otimes(i\cdot z_k)\Big) \in L\otimes F\ .$$

Ezért a továbbiakban $L_{\mathbb{C}}\otimes F$ helyett egyszerűen $L\otimes F$-et írunk, és $\mu\in L^*_{\mathbb{C}}$ esetén $\mu\otimes\mathrm{id}_F : L\otimes F\to F$ $\mathbb{C}$-lineáris leképezés.

Lemma *$f\in L\otimes F$ esetén*

$$\|(\mu\otimes \mathrm{id}_F)(f)\| \leq m(\|f\|) = m_1(f) \ .$$

Bizonyítás Lássuk be először, hogy ha μ valós és $g\in L_{\mathbb{C}}$, akkor

$$|\mu(g)| \leq m(|g|)$$

teljesül akkor is, ha (T,L) nem feltétlenül $(\mathbf{C_I})$ és $(\mathbf{C_{II}})$ tulajdonságú. Ugyanis, létezik $\eta\in\mathbb{T}$ úgy, hogy $|\mu(g)|{=}\eta{\cdot}\mu(g)$. Ekkor

$$\begin{aligned}|\mu(g)| = \eta{\cdot}\mu(g) = \mu(\eta{\cdot}g) = \mu\big(\mathrm{Re}\circ(\eta{\cdot}g) + i{\cdot}\,\mathrm{Im}\circ(\eta{\cdot}g)\big) =&\\ = \mu\big(\mathrm{Re}\circ(\eta{\cdot}g)\big) + i{\cdot}\mu\big(\mathrm{Im}\circ(\eta{\cdot}g)\big) = \mu\big(\mathrm{Re}\circ(\eta{\cdot}g)\big) =&\\ = \big|\mu\big(\mathrm{Re}\circ(\eta{\cdot}g)\big)\big| \leq |\mu|\big(|\,\mathrm{Re}\circ(\eta{\cdot}g)|\big) = m\big(|\,\mathrm{Re}\circ(\eta{\cdot}g)|\big) \leq m\big(|g|\big) \ ,&\end{aligned}$$

mivel $\mathrm{Re}\circ(\eta{\cdot}g)\in L$.

Ha μ nem feltétlenül valós, de (T,L) $(\mathbf{C_I})$ és $(\mathbf{C_{II}})$ tulajdonságú, akkor $g\in L_{\mathbb{C}}$ esetén $|g|\in L_+$, így

$$|\mu(g)| \leq |\mu|(|g|) = m(|g|) \ .$$

Legyen most

$$f{=}\sum_{k=1}^{n}\varphi_k{\otimes}z_k \quad (\varphi_k{\in}L, z_k{\in}F) \ ,$$

és $u\in F'$, $\|u\|{\leq}1$. Ekkor

$$\begin{aligned}u\big((\mu\otimes \mathrm{id}_F)(f)\big) = u\Big(\sum_{k=1}^{n}\mu(\varphi_k){\cdot}z_k\Big) = \sum_{k=1}^{n}\mu(\varphi_k){\cdot}u(z_k) =&\\ = \mu\Big(\sum_{k=1}^{n}\varphi_k{\cdot}u(z_k)\Big) = \mu\Big(u{\circ}\Big(\sum_{k=1}^{n}\varphi_k{\otimes}z_k\Big)\Big) = \mu\big(u{\circ}f\big) \ ,&\end{aligned}$$

így

$$\big|u\big((\mu\otimes \mathrm{id}_F)(f)\big)\big| = |\mu\big(u{\circ}f\big)| \leq m(|u{\circ}f|) \leq m(\|f\|) \ ,$$

ebből pedig következik a Hahn–Banach-tétel szerint az, amit állítottunk.

56. Állítás *Létezik egyetlen*

$$\int(\,.\,)d(\mu,m) : \mathcal{L}^1_F(T,L,m) \to F$$

m_1-folytonos $\mathbb{K}$-lineáris leképezés, mely a $\mu\otimes \mathrm{id}_F$ kiterjesztése.

Bizonyítás Az előző lemma szerint $\mu\otimes \mathrm{id}_F$ m_1-folytonos, $L\otimes F\subset\mathcal{L}^1_F(T,L,m)$ m_1-sűrű definíció szerint.

Definíció Az előző állítás feltételei mellett, $f\in\mathcal{L}^1_F(T,L,m)$ esetén az

$$\int f d(\mu,m) \in F$$

vektort az f (μ, m)*-integráljának* nevezzük. Tehát, ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $L\otimes F$-beli sorozat, mely m_1 szerint konvergál f-hez, akkor

$$\int f d(\mu, m) = \lim_n \big(\mu\otimes \mathrm{id}_F\big)(f_n) \ .$$

Definíció Legyen $\mu\in\mathcal{M}_+(T, L)$ az egyetlen, melyre

$$\mu\big|_{L_+} = m\big|_{L_+}$$

teljesül. Ekkor $f\in\mathcal{L}^1_F(T, L, m)$ esetén az

$$\int f dm := \int f d(\mu, m) \in F$$

vektort az f m*-integráljának* nevezzük.

57. Állítás *Legyen* $f\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T, L, m)$, $f\geq 0$. *Ekkor*

$$\int f dm = m_1(f) = m(f) \ .$$

Bizonyítás

$$\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T, L, m) \to \mathbb{R} \ , \ f \mapsto \int f dm \ \text{ és}$$
$$\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T, L, m) \to \mathbb{R} \ , \ f \mapsto m_1(f)$$

folytonos függvények, melyek L_+-on megegyeznek, és L_+ sűrű az

$$\{f\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T, L, m) : f\geq 0\}$$

halmazban.

Következmény Ha $f\in\mathcal{L}^1_F(T, L, m)$, akkor $\|f\|\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T, L, m)$, és

$$\left\| \int f d(\mu, m) \right\| \leq m(\|f\|) = \int \|f\| dm \ .$$

58. Állítás *Legyenek F és G Banach-terek,* $u\in\mathcal{L}(F, G)$, $f\in\mathcal{L}^1_F(T, L, m)$. *Ekkor* $u\circ f\in\mathcal{L}^p_G(T, L, m)$, *és*

$$\int (u\circ f) d(\mu, m) = u\Big(\int f\, d(\mu, m)\Big) \ .$$

Bizonyítás Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $L\otimes F$-beli sorozat, mely konvergál f-hez m_1 szerint. Ekkor $(u\circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $L\otimes G$-beli sorozat, mely konvergál $u\circ f$-hez m_1 szerint, így az integrálás m_1-folytonosságából következik a formula.

Következmény Ha F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, $f\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(T, L, m)$, és $a\in F$, akkor

$$\int (f\otimes a)\, d(\mu, m) = \Big(\int f\, d(\mu, m)\Big)\otimes a \ .$$

59. Állítás (Beppo Levi-tétel) *Legyen* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *pozitív* $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$*-beli függvények monoton növő sorozata. Ekkor a következők ekvivalensek*

(1) $f:=\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$,

(2) $\sup_{n\in\mathbb{N}}\int f_n\,dm<+\infty$,

és ha ezek teljesülnek, akkor $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergál* f*-hez* m_1 *szerint, és*

$$\int f\,d(\mu,m)=\sup_{n\in\mathbb{N}}\int f_n\,d(\mu,m)\ .$$

Bizonyítás Az integrálokra vonatkozó formula abból a tényből következik, hogy $\int(\,.\,)\,d(\mu,m)$ folytonos az m_1 félnormára nézve, és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál f-hez m_1 szerint.

60. Állítás (Lebesgue-tétel) *Legyen* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{L}^1_F(T,L,m)$*-beli sorozat, mely* m*-majdnem mindenütt konvergál az* $f{:}T\to F$ *függvényhez, és létezik* $g\in\mathcal{F}^1_{\mathbb{R}}(T,m)$ *pozitív úgy, hogy minden* $n\in\mathbb{N}$ *és* m*-majdnem minden* $t\in T$ *esetén* $\|f_n(t)\|\le g(t)$*. Ekkor* $f\in\mathcal{L}^1_F(T,L,m)$*,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergál* f*-hez* m_1 *szerint, és*

$$\int f\,d(\mu,m)=\lim_{n\in\mathbb{N}}\int f_n\,d(\mu,m)\ .$$

Bizonyítás Az integrálokra vonatkozó formula itt is abból következik, hogy $\int(\,.\,)\,d(\mu,m)$ folytonos az m_1 félnormára nézve.

5.7 Integrálható halmazok

Definíció Az $\mathcal{R}(T,L,m){:=}\mathcal{R}^1(T,L,m)$ halmaz elemeit *m-integrálható halmazoknak* nevezzük. $E\in\mathcal{R}(T,L,m)$ esetén legyen

$$\mu(E):=\int\chi_E d(\mu,m)$$

az E halmaz *μ-mértéke.*

61. Állítás

(1) $\mathcal{R}(T,L,m)$ *δ-gyűrű,*

(2) $E,F\in\mathcal{R}(T,L,m)$*,* $E\cap F=\emptyset$ *esetén*

$$\mu(E\cup F)=\mu(E)+\mu(F)\ ,\qquad (*)$$

Bizonyítás Láttuk, hogy $\mathcal{R}(T,L,m)$ δ-gyűrű. Legyen $E,F\in\mathcal{R}(T,L,m)$, úgy, hogy $E\cap F=\emptyset$. Ekkor

$$\chi_{E\cup F}=\chi_E+\chi_F\ ,$$

következésképpen teljesül $(*)$.

62. Állítás

(1) Ha $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó $\mathcal{R}(T,L,m)$-beli sorozat, akkor

$$\mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) \ .$$

(2) Ha $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő $\mathcal{R}(T,L,m)$-beli sorozat, akkor $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n\in \mathcal{R}(T,L,m)$ pontosan akkor teljesül, ha $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} m(E_n)<+\infty$, és ekkor

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) \ .$$

(3) Ha $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{R}(T,L,m)$-beli, páronként diszjunkt halmazokból álló sorozat úgy, hogy $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} m(E_n)<+\infty$, akkor $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n\in\mathcal{R}(T,L,m)$, és

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) \ .$$

Bizonyítás

$$\chi_{\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n} = \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \chi_{E_n} \ ,$$
$$\chi_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n} = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \chi_{E_n} \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{E_n} \ ,$$

és ha $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ páronként diszjunkt rendszer, akkor

$$\chi_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{E_n} \ ,$$

így az állítás a Beppo Levi-tétel következménye.

Megjegyzés Az előzőek alapján tehát $\mathcal{R}(T,L,m)$ δ-gyűrű, és $\mu{:}\mathcal{R}(T,L,m)\to\mathbb{C}$ σ-additív halmazfüggvény, mely valós (pozitív) értékű, ha μ valós (pozitív) mérték. Ugyanis, ha $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{R}(T,L,m)$-beli, páronként diszjunkt halmazokból álló sorozat úgy, hogy $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n\in\mathcal{R}(T,L,m)$ akkor

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} m(E_n) \le m\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) < +\infty$$

miatt alkalmazható (3).

6. Fejezet

$\mathcal{L}^p$-terek és integrálás II.

6.1 A Stone-tulajdonság

Definíció Azt mondjuk, hogy a (T, L) mérhető tér *Stone-tulajdonságú*, ha minden $\varphi \in L$ esetén $\varphi \wedge 1 \in L$.

Megjegyzés

(1) Ha $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(T)$ gyűrű, akkor a $(T, \mathcal{E}(T, \mathcal{R}))$ mérhető tér Stone-tulajdonságú.

(2) Ha T lokálisan kompakt tér, akkor a $(T, \mathcal{K}(T))$ mérhető tér Stone-tulajdonságú.

Megjegyzés Ha a (T, L) mérhető tér Stone-tulajdonságú, akkor

(1) $\varphi \in L$ és $c > 0$ esetén $\varphi \wedge c \in L$,

(2) $\varphi \in L$ és $c > 0$ esetén $\varphi \vee (-c) \in L$,

(3) $\varphi \in L$ és $c > 0$ esetén $(\varphi \wedge c) \vee (-c) \in L$, és ezen függvény korlátos.

Megjegyzés A továbbiakben legyen (T, L) Stone-tulajdonságú mérhető tér, és $p \geq 1$.

63. Állítás *Legyen m p-integrál (T, L) felett, $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T, L, m)$ és $c > 0$. Ekkor $f \wedge c \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T, L, m)$.*

Bizonyítás Létezik $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ L-beli sorozat, mely konvergál f-hez m_p szerint. Ekkor

$$|f \wedge c - \varphi_n \wedge c| \leq |f - \varphi_n|$$

miatt $(\varphi_n \wedge c)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergál $f \wedge c$-hez m_p szerint.

64. Állítás *Legyen m p-integrál (T, L) felett, $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T, L, m)$ és $c > 0$. Ekkor $[f > c] \in \mathcal{R}^p(T, L, m)$, és*

$$m\big([f > c]\big) \leq \frac{1}{c^p} \cdot m(|f|^p) \ ,$$

(Csebisev-egyenlőtlenség).

Bizonyítás $n\in\mathbb{N}$ esetén legyen

$$f_n := \big(n(f-f\wedge c)\big)\wedge 1 \ .$$

Az előzőek szerint $f_n\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$, továbbá $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő függvénysorozat úgy, hogy $\bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n=\chi_{[f>c]}$. $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$f_n \le \chi_{[f>c]} \le \frac{1}{c}\cdot|f| \ ,$$

így

$$m_p(f_n) \le \frac{1}{c}\cdot m_p(f) < +\infty \ ,$$

így a Beppo Levi-tétel szerint

$$\chi_{[f>c]} \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m) \ ,$$

és a

$$\chi_{[f>c]} = \chi^p_{[f>c]} \le \frac{1}{c^p}\cdot|f|^p$$

egyenlőtlenségből következik a Csebisev-egyenlőtlenség.

65. Állítás *Legyen m p-integrál (T,L) felett, $f\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$ és $c>0$. Ekkor $[f\ge c]\in\mathcal{R}^p(T,L,m)$.*

Bizonyítás Legyen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szigorúan növő $]0,c[$-beli sorozat úgy, hogy

$$\lim_n c_n=c \ .$$

Ekkor $\big([f>c_n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó $\mathcal{R}^p(T,L,m)$-beli sorozat úgy, hogy

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[f>c_n] = [f\ge c] \ ,$$

következésképpen $[f\ge c]\in\mathcal{R}^p(T,L,m)$.

6.2 Mérhető tér halmazgyűrűje

Definíció Ha (T,L) mérhető tér, akkor a

$$\big\{[\varphi>1] : \varphi\in L_+\big\}$$

halmaz által generált gyűrűt a (T,L) *mérhető tér halmazgyűrűjének* nevezzük, és az $\mathcal{R}(T,L)$ szimbólummal jelöljük.

Megjegyzés Az előzőek szerint nyilvánvaló, hogy ha (T,L) Stone-tulajdonságú, akkor minden (T,L) feletti m p-integrál esetén $\mathcal{R}(T,L)\subset\mathcal{R}^p(T,L,m)$, következésképpen

$$\mathcal{E}(T,\mathcal{R}(T,L)) \subset \mathcal{E}(T,\mathcal{R}^p(T,L,m)) \subset \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m) \ ,$$

azaz $\mathcal{R}(T,L)$ elemei ‘univerzálisan p-edik hatványon integrálható’ halmazok.

66. Állítás *Legyen m p-integrál a Stone-tulajdonságú (T, L) mérhető tér felett, F Banach-tér. Ekkor*

$$\mathcal{L}_F^p(T, L, m) = \mathcal{L}_F^p(T, \mathcal{E}(T, \mathcal{R}(T, L)), m) \ .$$

Bizonyítás Nyilvánvaló, hogy

$$\mathcal{E}(T, \mathcal{R}(T, L)) \otimes F \subset \mathcal{E}(T, \mathcal{R}^p(T, L, m)) \otimes F \subset \mathcal{L}_F^p(T, L, m) \ ,$$

ebből következik, hogy

$$\mathcal{L}_F^p(T, \mathcal{E}(T, \mathcal{R}(T, L)), m) \subset \mathcal{L}_F^p(T, L, m) \ .$$

Most megmutatjuk, hogy

$$L \otimes F \subset \mathcal{L}_F^p(T, \mathcal{E}(T, \mathcal{R}(T, L)), m) \ .$$

Legyen $\varphi \in L_+$ és $z \in F$. $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$\varphi_n := \sum_{k=0}^{n2^n - 1} \frac{k}{2^n} \chi_{\left[\frac{k}{2^n} < \varphi \leq \frac{k+1}{2^n}\right]} \ .$$

Ekkor $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathcal{E}(T, \mathcal{R}(T, L))$-beli monoton növő sorozat úgy, hogy $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n = \varphi$. Továbbá, $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|\varphi_n \otimes z\| = |\varphi_n| \cdot \|z\| \leq |\varphi| \cdot \|z\|$$

és $\|z\| \cdot m_p(\varphi) < +\infty$, így a Lebesgue-tétel szerint $\varphi \otimes z \in \mathcal{L}_F^p(T, \mathcal{E}(T, \mathcal{R}(T, L)), m)$.

67. Állítás *Legyen L és L' két lineáris függvényháló T felett, m p-integrál (T, L) és (T, L') felett úgy, hogy $L \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p(T, L', m)$. Ekkor minden F Banach-térre*

$$\mathcal{L}_F^p(T, L, m) \subset \mathcal{L}_F^p(T, L', m) \ ,$$

és p=1 esetén, ha $f \in \mathcal{L}_F^1(T, L, m)$, akkor

$$\int_{(T,L)} f dm = \int_{(T,L')} f dm \ .$$

Bizonyítás $L \otimes F \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p(T, L', m) \otimes F \subset \mathcal{L}_F^p(T, L', m)$ miatt $L \otimes F$ m_p szerinti lezártja, azaz $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p(T, L, m)$ része $\mathcal{L}_F^p(T, L', m)$-nek.

Az integrálokra vonatkozó formula következik abból, hogy a két integrál $L \otimes F$-en megegyezik.

Definíció Legyen L és L' két lineáris függvényháló, m felső integrál T felett. Azt mondjuk, hogy (T, L) és (T, L') *m_p-ekvivalensek*, ha

(1) m p-integrál (T, L) és (T, L') felett,

(2) $L \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p(T, L', m)$ és $L' \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p(T, L, m)$.

68. Állítás *Ha (T, L) és (T, L') m_p-ekvivalensek, akkor minden minden F Banach-térre*

$$\mathcal{L}^p_F(T, L, m) = \mathcal{L}^p_F(T, L', m) \ ,$$

és p=1 esetén, ha $f \in \mathcal{L}^1_F(T, L, m)$, akkor

$$\int\limits_{(T,L)} f dm = \int\limits_{(T,L')} f dm \ .$$

Megjegyzés Nyilvánvaló, hogy ha m p-integrál a (T, L) mérhető tér felett, akkor (T, L) és $(T, \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T, L, m))$ m-ekvivalensek.

69. Állítás *Legyen m p-integrál a (T, L) Stone-tulajdonságú mérhető tér felett. Ekkor (T, L), $(T, \mathcal{E}(T, \mathcal{R}(T, L)))$ és $(T, \mathcal{E}(T, \mathcal{R}^p(T, L, m)))$ m_p-ekvivalens mérhető terek.*

Bizonyítás Nyilvánvaló, hogy

$$\mathcal{E}(T, \mathcal{R}(T, L)) \subset \mathcal{E}(T, \mathcal{R}^p(T, L, m)) \subset \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T, L, m) \ ,$$

és az előző állításban megmutattuk, hogy $L \subset \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T, \mathcal{E}(T, \mathcal{R}(T, L)), m)$.

6.3 A Hölder-egyenlőtlenség következményei

A továbbiakban legyen adott (T, L) mérhető tér, $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(T, L)$, m integrál (T, L) felett, és F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett a következő tulajdonságokkal:

(1) ha μ valós, akkor F valós vagy komplex,

(2) ha μ nem valós, akkor F komplex, és (T, L)-re teljesül $(\mathbf{C_I})$ és $(\mathbf{C_{II}})$,

(3) $|\mu|\big|_{L_+} = m\big|_{L_+}$.

70. Állítás *Legyen $p, q, r \geq 1$ úgy, hogy $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r}$; m p-integrál, q-integrál és r-integrál (T, L) felett, emellett tegyük fel, hogy a következők egyike teljesül*

(1) $L \cdot L \subset L$,

(2) (T, L) Stone-tulajdonságú,

továbbá F, G és H Banach-terek, $b{:}F \times G \to H$ folytonos $\mathbb{R}$-bilineáris leképezés.

Ha $f \in \mathcal{L}^p_F(T, L, m)$ és $g \in \mathcal{L}^q_G(T, L, m)$, akkor $b \circ (f, g) \in \mathcal{L}^r_H(T, L, m)$, és

$$m_r(b \circ (f, g)) \leq \|b\| \cdot m_p(f) \cdot m_q(g) \ .$$

Bizonyítás Legyen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (1) esetén $L \otimes F$-beli, (2) esetén $\mathcal{E}(T, \mathcal{R}(T, L)) \otimes F$-beli sorozat, mely konvergál f-hez m_p szerint, $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (1) esetén $L \otimes G$-beli, (2) esetén $\mathcal{E}(T, \mathcal{R}(T, L)) \otimes G$-beli sorozat, mely konvergál g-hez m_q szerint. Ekkor

$\big(b\circ(f_n,g_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ (1) esetén $L\otimes H$-beli, (2) esetén $\mathcal{E}(T,\mathcal{R}(T,L))\otimes H$-beli sorozat és $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} m_r\big(b\circ(f_n,g_n)-b\circ(f,g)\big) \le{}& \|b\|\cdot m_p(f_n-f)\cdot m_q(g_n-g) + \\ &+ \|b\|\cdot m_p(f_n-f)\cdot m_q(g) + \\ &+ \|b\|\cdot m_p(f)\cdot m_q(g_n-g) \ , \end{aligned}$$

így $\big(b\circ(f_n,g_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál $b\circ(f,g)$-hez m_r szerint.

Következmény Az előző feltételek mellett legyen most r=1.

Ha $f\in\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$ és $g\in\mathcal{L}^q_G(T,L,m)$, akkor $b\circ(f,g)\in\mathcal{L}^1_H(T,L,m)$, és

$$\left\|\int(b\circ(f,g))d(\mu,m)\right\| \le \|b\|\cdot m_p(f)\cdot m_q(g) \ .$$

Bizonyítás

$$\left\|\int(b\circ(f,g))d(\mu,m)\right\| \le m_1(b\circ(f,g)) \le \|b\|\cdot m_p(f)\cdot m_q(g) \ .$$

Következmény Az előző feltételek mellett legyen m integrál és 2-integrál (T,L) felett, H Hilbert-tér $\mathbb{K}$ felett. Ha $f,g\in\mathcal{L}^2_H(T,L,m)$, akkor $\langle f,g\rangle\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(T,L,m)$, és

$$\left\|\int\langle f,g\rangle\, dm\right\| \le m_2(f)\cdot m_2(g) \ ,$$

továbbá

$$\int\langle f,f\rangle\, dm = m_2(f)^2 \ ,$$

és $(f,g)\mapsto \displaystyle\int\langle f,g\rangle\, dm$ félskalárszorzat $\mathcal{L}^2_H(T,L,m)$ felett.

71. Állítás *Legyen $r,p\ge 1$ úgy, hogy $r\le p$, m p-integrál és r-integrál a (T,L) mérhető téren, úgy hogy $m(1)<+\infty$, F Banach-tér. Ekkor*

$$\mathcal{L}^p_F(T,L,m)\subset\mathcal{L}^r_F(T,L,m) \ ,$$

és $f\in\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$ esetén

$$m_r(f)\le m_p(f)\cdot m(1)^{1/r-1/p} \ .$$

Bizonyítás Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $L\otimes F$-beli sorozat, mely konvergál f-hez m_p szerint. Ekkor az

$$m_r(f-f_n)\le m_p(f-f_n)\cdot m(1)^{1/r-1/p}$$

egyenlőtlenség miatt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál f-hez m_r szerint.

6.4 A p-edik hatvány integrálhatósága

72. Állítás *Legyen m integrál (T,L) felett, $p{\geq}1$ úgy, hogy $L_+^p{\subset}L_+$, teljesül. Ekkor $f{\in}\mathcal{L}_F^p(T,L,m)$ esetén $\|f\|^p{\in}\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(T,L,m)$, és*

$$\left(\int \|f\|^p dm\right)^{1/p} = m_p(f) \ .$$

Bizonyítás Mivel $f{\in}\mathcal{L}_F^p(T,L,m)$ esetén $\|f\|{\in}\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p(T,L,m)$, így létezik $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ L_+-beli sorozat, mely m-majdnem mindenütt $\|f\|$-hez konvergál. $(\varphi_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ ekkor L_+-beli sorozat, mely m-majdnem mindenütt $\|f\|^p$-hez konvergál. Továbbá,

$$m_1(\|f\|^p) = \big(m_p(\|f\|)\big)^p < +\infty \ ,$$

így a Beppo Levi-tétel 5. következménye szerint $\|f\|^p{\in}\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(T,L,m)$.

Ezenkívül, az 57. állítás szerint

$$\int \|f\|^p dm = m(\|f\|^p) = \big(m_p(f)\big)^p \ .$$

73. Állítás *Legyen m integrál (T,L) felett, $L_+^p{\subset}L_+$, emellett tegyük fel, hogy a következők egyike teljesül*

(1) $L{\cdot}L{\subset}L{\subset}\mathcal{F}^b(T,\mathbb{R})$,

(2) (T,L) Stone-tulajdonságú,

és $f{:}T{\to}\mathbb{R}_+$ leképezés úgy, hogy $f^p{\in}\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(T,L,m)$. Ekkor $f{\in}\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p(T,L,m)$.

Bizonyítás Ha (1) teljesül és $\varphi{\in}L_+$, akkor $m_p(\varphi^{1/p}){=}m(\varphi)^{1/p}{<}{+}\infty$, azaz $\varphi^{1/p}$ ${\in}\mathcal{F}_{\mathbb{R}}^p(T,m)$. Legyen $c{:=}|||\varphi|||$. Ekkor létezik szabad tag nélküli valós polinomok $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata (Bernstein-polinomok), mely a $[0,c]$ intervallumon egyenletesen $\mathrm{id}_{[0,c]}^{1/p}$-hez konvergál. Ekkor a $(P_n{\circ}\varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat L-beli, és T-n egyenletesen $\varphi^{1/p}$-hez konvergál, így a Beppo Levi-tétel 5. következménye szerint $\varphi^{1/p}{\in}\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p(T,L,m)$.

Ha (2) teljesül, akkor $\varphi{\in}\mathcal{E}_+(T,\mathcal{R}(T,L))$ esetén

$$\varphi^{1/p} \in \mathcal{E}_+(T,\mathcal{R}(T,L)) \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(T,L,m) \ .$$

Legyen most $f{:}T{\to}\mathbb{R}_+$ olyan, hogy $f^p{\in}\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(T,L,m)$. Ekkor létezik $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (1) esetén L_+-beli, (2) esetén $\mathcal{E}_+(T,\mathcal{R}(T,L))$-beli sorozat, mely m-majdnem mindenütt f^p-hez konvergál. Ekkor $(\varphi_n^{1/p})_{n\in\mathbb{N}}$ mindkét esetben $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p(T,L,m)$-beli sorozat, mely m-majdnem mindenütt f-hez konvergál, így megint csak a Beppo Levi-tétel 5. következménye szerint $f{\in}\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p(T,L,m)$.

6.5 μ^{**} és μ^* alakú integrálok speciális tulajdonságai

Megjegyzés Legyen (T,L) mérhető tér, μ pozitív mérték illetve normális pozitív mérték (T,L) felett, $m{=}\mu^{**}$ illetve $m{=}\mu^*$, $f{\in}\mathcal{F}_+(T)$ olyan, hogy $m(f){<}{+}\infty$.

Ekkor létezik $h{\in}\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$ úgy, hogy $f{\le}h$ és $m(f){=}m(h)$. Ugyanis,

$$\mu^{**}(f)=\inf\{\mu^{**}(h) : h{\in}\overline{L}_+, f{\le}h\} \ ,$$

illetve

$$\mu^{*}(f)=\inf\{\mu^{*}(h) : h{\in}\overline{\overline{L}}_+, f{\le}h\} \ .$$

miatt mindkét esetben létezik $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$-beli monoton fogyó sorozat úgy, hogy minden $n{\in}\mathbb{N}$ esetén $f{\le}h_n$, és

$$m(f)=\inf_{n\in\mathbb{N}} m(h_n) \ ,$$

mégpedig $m{=}\mu^{**}$ esetén $\overline{L}_+$-beli, $m{=}\mu^*$ esetén $\overline{\overline{L}}_+$-beli. A Beppo Levi-tétel szerint $h{:=}\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} h_n{\in}\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$, nyilvánvaló, hogy $f{\le}h$, és

$$m(h)=\inf_{n\in\mathbb{N}} m(h_n)=m(f) \ .$$

Lemma *Legyen (T,L) mérhető tér, μ pozitív mérték illetve normális pozitív mérték (T,L) felett, $m{=}\mu^{**}$ illetve $m{=}\mu^*$. Legyen $f{\in}\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$, $g{\in}\mathcal{F}_+(T)$ olyan, hogy $g{\le}f$. Ezen feltételek mellett $g{\in}\mathcal{L}^1_+(T,L,m)$ pontosan akkor teljesül, ha*

$$m(f)=m(g)+m(f{-}g) \ . \tag{$*$}$$

Bizonyítás Nyilvánvaló, hogy $g{\in}\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$ esetén $(*)$ teljesül. Fordítva, ha $(*)$ teljesül, akkor legyen $h_1,h_2{\in}\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$ olyan, hogy $g{\le}h_1$, $m(g){=}m(h_1)$ és $f{-}g{\le}h_2{\le}f$, $m(f{-}g){=}m(h_2)$. Ekkor $f{-}h_2{\le}g{\le}h_1$, és

$$m(h_1)=m(g)=m(f)-m(f{-}g)=m(f)-m(h_2)=m(f{-}h_2) \ ,$$

így $m(f{-}h_1{-}h_2){=}0$, tehát h_1 és $f{-}h_2$ m-ekvivalensek, következésképpen g és h_1 m-ekvivalensek, tehát $g{\in}\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$.

74. Állítás *Legyen (T,L) Stone-tulajdonságú mérhető tér, μ pozitív mérték illetve normális pozitív mérték (T,L) felett, $m{=}\mu^{**}$ illetve $m{=}\mu^*$, $H{\subset}T$ olyan, hogy $m(H){<}{+}\infty$. Ekkor létezik $F{\in}\mathcal{R}(T,L,m)$ úgy, hogy $H{\subset}F$ és $m(H){=}m(F)$.*

Bizonyítás Legyen $\varepsilon{>}0$, és

$$\delta:=\frac{\varepsilon}{m(H){+}1{+}\varepsilon} \ ,$$

ekkor $0{<}\delta{<}1$, és

$$\frac{m(H){+}\delta}{1{-}\delta}=m(H){+}\varepsilon \ ,$$

továbbá létezik $h{\in}\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$ úgy, hogy $\chi_H{\le}h$, és $m(h){\le}m(H){+}\delta$ ($h{\in}\overline{L}_+$ vagy $h{\in}\overline{\overline{L}}_+$). Legyen

$$F:=[h>1{-}\delta]\in\mathcal{R}(T,L,m) \ ,$$

ekkor $H{\subset}F$, és $(1{-}\delta){\cdot}\chi_F{\leq}h$, következésképpen

$$m(F) \leq \frac{m(h)}{1{-}\delta} \leq \frac{m(H){+}\delta}{1{-}\delta} = m(H){+}\varepsilon \ .$$

Az előzőek szerint létezik $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó $\mathcal{R}(T,L,m)$-beli sorozat úgy, hogy minden $n{\in}\mathbb{N}$ esetén $H{\subset}F_n$ és $m(F_n){\leq}m(H){+}\frac{1}{n}$. Ekkor

$$F{:=}\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \in \mathcal{R}(T,L,m)$$

olyan, hogy $H{\subset}F$, és

$$m(F) = \inf_{n\in\mathbb{N}} m(F_n) = m(H) \ .$$

75. Állítás *Legyen* (T,L) *Stone-tulajdonságú mérhető tér,* μ *pozitív mérték* (T,L) *felett,* $H{\subset}T$ *olyan, hogy* $\mu^{**}(H){<}{+}\infty$. *Ekkor*

$$\mu^{**}(H) = \inf\{\mu^{**}(F) : F{\in}\mathcal{R}(T,L)_\sigma{\cap}\mathcal{R}(T,L,\mu^{**}) \text{ és } H{\subset}F\} =$$

$$= \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^{**}(F_n) : (F)_{n\in\mathbb{N}}{\in}\mathcal{R}(T,L)^{\mathbb{N}} \text{ diszjunkt, és } H{\subset}\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right\} \ .$$

Bizonyítás Legyen $\varepsilon{>}0$, és

$$\delta := \frac{\varepsilon}{\mu^{**}(H){+}1{+}\varepsilon} \ ,$$

ekkor $0{<}\delta{<}1$, és

$$\frac{\mu^{**}(H){+}\delta}{1{-}\delta} = \mu^{**}(H){+}\varepsilon \ ,$$

továbbá létezik $h{\in}\overline{L}_+$ úgy, hogy $\chi_H{\leq}h$, és $\mu^{**}(h){\leq}\mu^{**}(H){+}\delta$. Létezik $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ L_+-beli monoton növő sorozat úgy, hogy $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n{=}h$. $n{\in}\mathbb{N}$ esetén

$$E_n := [\varphi_n > 1{-}\delta] \in \mathcal{R}(T,L) \ ,$$

$(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő, legyen $F{:=}\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n{\in}\mathcal{R}(T,L)_\sigma$, ekkor $\chi_F{=}\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \chi_{E_n}$, és minden $n{\in}\mathbb{N}$ esetén $(1{-}\delta){\cdot}\chi_{E_n}{\leq}\varphi_n{\leq}h$, következésképpen

$$(1{-}\delta){\cdot}\chi_F{\leq}h \ ,$$

így

$$\mu^{**}(F) \leq \frac{\mu^{**}(h)}{1{-}\delta} \leq \frac{\mu^{**}(H){+}\delta}{1{-}\delta} = \mu^{**}(H){+}\varepsilon \ .$$

A Beppo Levi-tétel szerint $F{\in}\mathcal{R}(T,L,\mu^{**})$; $x{\in}H$ esetén $\sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(x){=}h(x){\geq}1$, így létezik $n{\in}\mathbb{N}$ úgy, hogy $\varphi_n(x){>}1{-}\delta$, ekkor $x{\in}E_n$, tehát $H{\subset}F$.

Legyen $F_1{:=}E_1$, és $n{\in}\mathbb{N}$ esetén $F_{n+1}{:=}E_{n+1}\backslash E_n$. Ekkor $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diszjunkt $\mathcal{R}(T,L)$-beli sorozat, és $n{\in}\mathbb{N}$ esetén $E_n{=}\bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$, így $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n{=}F{\supset}H$, és

$$\mu^{**}(H){+}\varepsilon \geq \mu^{**}(F) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^{**}(F_n) \ .$$

Következmény Legyen (T,L) Stone-tulajdonságú mérhető tér, μ pozitív mérték (T,L) felett, $H{\subset}T$ olyan, hogy $\mu^{**}(H){<}{+}\infty$. Ekkor létezik $F{\in}\sigma(\mathcal{R}(T,L)){\cap}\mathcal{R}(T,L,m)$ úgy, hogy $H{\subset}F$ és $\mu^{**}(H){=}\mu^{**}(F)$.

Megjegyzés Legyen (T,L) Stone-tulajdonságú mérhető tér, μ pozitív mérték (T,L) felett, $E{\in}\mathcal{R}(T,L,\mu^{**})$. Ekkor az előzőek szerint létezik $F{\in}\sigma(\mathcal{R}(T,L)){\cap}\mathcal{R}(T,L,\mu^{**})$ úgy, hogy $E{\subset}F$ és $\mu^{**}(E){=}\mu^{**}(F)$. Ekkor $\mu^{**}(F\backslash E){=}0$, így ismét az előzőek szerint létezik $G{\in}\sigma(\mathcal{R}(T,L))$ úgy, hogy $F\backslash E{\subset}G$ és $\mu^{**}(G){=}0$. Ekkor $F\backslash G{\subset}E$, következésképpen

$$E = (E\backslash G){\cup}(E{\cap}G) = (F\backslash G){\cup}(E{\cap}G) \ ,$$

és itt $F\backslash G{\in}\sigma(\mathcal{R}(T,L))$ és $\mu^{**}(E{\cap}G){=}0$, tehát E előáll egy $\sigma(\mathcal{R}(T,L))$-beli és egy μ^{**}-eltűnő halmaz diszjunkt uniójaként.

76. Állítás *Legyen (T,L) Stone-tulajdonságú mérhető tér, μ pozitív mérték illetve normális pozitív mérték (T,L) felett, $m{=}\mu^{**}$ illetve $m{=}\mu^*$, $E{\subset}T$ olyan, hogy $m(E){<}{+}\infty$. Ezen feltételek mellett $E{\in}\mathcal{R}(T,L,m)$ pontosan akkor teljesül, ha $E{\in}\mathcal{M}(T,m)$, azaz minden $H{\subset}T$ halmaz esetén*

$$m(H) = m(H{\cap}E) + m(H\backslash E) \ . \qquad (**)$$

Bizonyítás Tegyük fel, hogy $E{\in}\mathcal{R}(T,L,m)$, és legyen $H{\subset}T$ tetszőleges. m szubadditivitása miatt ekkor $m(H){\leq}m(H{\cap}E){+}m(H\backslash E)$. $m(H){=}{+}\infty$ esetén így nyilvánvaló az egyenlőség, tegyük fel tehát, hogy $m(H){<}{+}\infty$. Ekkor létezik $F{\in}R(T,L,m)$ úgy, hogy $H{\subset}F$ és $m(H){=}m(F)$. Ekkor $F{\cap}E, F\backslash E{\in}\mathcal{R}(T,L,m)$, így

$$m(H) \leq m(H{\cap}E) + m(H\backslash E) \leq m(F{\cap}E) + m(F\backslash E) = m(F) = m(H) \ ,$$

következésképpen teljesül $(**)$.

Tegyük fel, hogy minden $H{\subset}T$ halmaz esetén teljesül $(**)$. $m(E){<}{+}\infty$ miatt létezik $F{\in}\mathcal{R}(T,L,m)$ olyan, hogy $E{\subset}F$ és $m(E){=}m(F)$. Ekkor

$$m(\chi_F) = m(F) = m(E) + m(F\backslash E) = m(\chi_E) + m(\chi_F{-}\chi_E)$$

így a Lemma szerint $\chi_E{\in}\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$, azaz $E{\in}\mathcal{R}(T,L,m)$.

7. Fejezet

Integrálok integrálása

7.1 Felső integrálok felső integrálja

77. Állítás *Legyen m felső integrál T felett, $(n_t)_{t\in T}$ T' feletti felső integrálok rendszere. Ekkor*

$$n : \mathcal{F}_+(T') \to \overline{\mathbb{R}}_+ \ , \ f \mapsto m\big(t \mapsto n_t(f)\big)$$

felső integrál T' felett.

Bizonyítás Nyilvánvaló, hogy n monoton növő, pozitív homogén és szubadditív. A monoton σ-folytonosság belátásához legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{F}_+(T')$-beli monoton növő sorozat, és $f := \bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Ekkor minden $t\in T$ esetén $n_t(f) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} n_t(f_n)$, és a $(t\mapsto n_t(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat monoton növő, következésképpen

$$n(f) = m\big(t\mapsto n_t(f)\big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m\big(t\mapsto n_t(f_n)\big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} n(f_n) \ .$$

Definíció Az előző állítás feltételei mellett $\displaystyle\int n_t dm(t) := n$ az n_t felső integrálrendszer m-felső integrálja. $f\in\mathcal{F}_+(T')$ esetén tehát

$$\left(\int n_t dm(t)\right)(f) = m\big(t\mapsto n_t(f)\big) = \int^* n_t(f) dm(t) \ .$$

Megjegyzés Legyen T halmaz és $t\in T$. Ekkor

$$\varepsilon_t : \mathcal{F}_+(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+ \ , \ f \mapsto f(t)$$

felső integrál T felett, melyet *t-re koncentrált egypont felső integrálnak* nevezünk.

Megjegyzés Legyen I halmaz. Ekkor

$$\varepsilon_I : \mathcal{F}_+(I) \to \overline{\mathbb{R}}_+ \ , \ f \mapsto \sum_{i\in I} f(i)$$

felső integrál I felett, melyet *számláló felső integrálnak* nevezünk.

78. Állítás *Legyen* $(m_i)_{i\in I}$ T *feletti felső integrálok rendszere. Ekkor*

$$\sum_{i\in I} m_i : \mathcal{F}_+(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+ \ , \ f \mapsto \sum_{i\in I} m_i(f)$$

felső integrál T *felett.*

Bizonyítás

$$\sum_{i\in I} m_i = \int m_i d\varepsilon_I(i) \ .$$

79. Állítás *Legyenek* T *és* T' *halmazok,* m *felső integrál* T *felett,* $g{:}T{\to}\mathbb{R}_+$ *és* $\pi{:}T{\to}T'$ *leképezések. Ekkor*

$$\pi(g{\cdot}m) : \mathcal{F}_+(T') \to \overline{\mathbb{R}}_+ \ , \ f \mapsto m\big(g{\cdot}(f{\circ}\pi)\big)$$

felső integrál T' *felett.*

Bizonyítás

$$\pi(g{\cdot}m) = \int g(t){\cdot}\varepsilon_{\pi(t)} dm(t) \ .$$

Megjegyzés Az előző állítás feltételei mellett

$$\pi(g{\cdot}\varepsilon_t) = g(t){\cdot}\varepsilon_{\pi(t)} \ .$$

Következmény Legyen $T{\subset}T'$, m felső integrál T felett. Ekkor

$$\mathrm{in}_{(T,T')}(m) : \mathcal{F}_+(T') \to \overline{\mathbb{R}}_+ \ , \ f \mapsto m\big(f|_T\big)$$

felső integrál T' felett, az m *kanonikus kiterjesztése.*

80. Állítás *Legyen* $T{\subset}T'$, m' *felső integrál* T' *felett.* $f{\in}\mathcal{F}_+(T)$ *esetén legyen* $f^0{\in}\mathcal{F}_+(T')$ *az* f *nullával való kiterjesztése* T'*-re. Ekkor*

$$m'|_T : \mathcal{F}_+(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+ \ , \ f \mapsto m'(f^0)$$

felső integrál T *felett, melyet az* m' kanonikus leszűkítésének *nevezünk.*

Bizonyítás Legyen $s{\in}T$ rögzített, és

$$\pi_s : T' \to T \ , \ t' \mapsto \begin{cases} t' & , \text{ha } t'{\in}T \\ s & , \text{ha } t'{\notin}T \end{cases} \ ,$$

ekkor

$$m'|_T = \pi_s\Big(\chi_T{\cdot}m'\Big)$$

s-től függetlenül.

81. Állítás *Legyen* $T{\subset}T'$, m *felső integrál* T, m' *pedig* T' *felett. Ekkor*

$$\big(\mathrm{in}_{(T,T')}(m)\big)\big|_T = m \ ,$$
$$\mathrm{in}_{(T,T')}\big(m'|_T\big) = \chi_T{\cdot}m' \ .$$

Bizonyítás $f\in\mathcal{F}_+(T)$ és $f'\in\mathcal{F}_+(T')$ esetén

$$f^0|_T = f \ ,$$
$$\big(f'|_T\big)^0 = \chi_T{\cdot}f' \ .$$

82. Állítás *Legyenek T, T' halmazok, m felső integrál T, m' pedig T' felett. Ekkor*

$$m\overrightarrow{\otimes}m' : \mathcal{F}_+(T{\times}T') \to \overline{\mathbb{R}}_+ \ , \ f \mapsto m'(t'{\mapsto}m(f(\,.\,,t'))) \ ,$$
$$m\overleftarrow{\otimes}m' : \mathcal{F}_+(T{\times}T') \to \overline{\mathbb{R}}_+ \ , \ f \mapsto m(t{\mapsto}m'(f(t,\,.\,)) \ ,$$

felső integrálok $T{\times}T'$ felett.

Bizonyítás Könnyen ellenőrizhető, hogy $t\in T$ esetén

$$\varepsilon_t\overrightarrow{\otimes}m' = \varepsilon_t\overleftarrow{\otimes}m' =: \varepsilon_t{\otimes}m' \ ,$$

hasonlóan, $t'\in T'$ esetén

$$m\overrightarrow{\otimes}\varepsilon_{t'} = m\overleftarrow{\otimes}\varepsilon_{t'} =: m{\otimes}\varepsilon_{t'} \ .$$

Speciálisan, $t\in T$ és $t'\in T'$ esetén

$$\varepsilon_t{\otimes}\varepsilon_{t'} = \varepsilon_{(t,t')}$$

felső integrál $T{\times}T'$ felett, így

$$\varepsilon_t{\otimes}m' = \int \varepsilon_t{\otimes}\varepsilon_{t'}\,dm'(t') \ ,$$

és

$$m{\otimes}\varepsilon_{t'} = \int \varepsilon_t{\otimes}\varepsilon_{t'}\,dm(t) \ ,$$

felső integrálok $T{\times}T'$ felett, ebből pedig következik, hogy

$$m\overrightarrow{\otimes}m' = \int m{\otimes}\varepsilon_{t'}\,dm'(t') \ ,$$

és

$$m\overleftarrow{\otimes}m' = \int \varepsilon_t{\otimes}m'\,dm(t) \ ,$$

felső integrálok $T{\times}T'$ felett.

7.2 Integálok integrálja

Definíció Legyen m integrál a (T, L) mérhető tér felett, (T', L') mérhető tér. A (T', L') feletti integrálok $(n_t)_{t\in T}$ rendszerét (T, L, m)*-integrálhatónak* nevezzük, ha minden $\varphi\in L'_+$ esetén

$$\big(t \mapsto n_t(\varphi)\big) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T, L, m) \ .$$

83. Állítás *Legyen m integrál a (T,L) mérhető tér felett, $(n_t)_{t\in T}$ (T',L') feletti integrálok (T,L,m)-integrálható rendszere. Ekkor $n{:=}\int n_t dm(t)$ integrál (T',L') felett.*

Bizonyítás Legyen $\varphi\in L'_+$. Ekkor $\big(t\mapsto n_t(\varphi)\big)\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$, és

$$n(\varphi)=m\big(t\mapsto n_t(\varphi)\big)<+\infty\ .$$

Legyen $\varphi,\psi\in L'_+$. Ekkor $\big(t\mapsto n_t(\varphi)\big),\big(t\mapsto n_t(\psi)\big)\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$, és

$$\begin{aligned}n(\varphi+\psi)=m\big(t\mapsto n_t(\varphi+\psi)\big)=m\big(t\mapsto n_t(\varphi)+n_t(\psi)\big)=&\\ =m\big(t\mapsto n_t(\varphi)\big)+m\big(t\mapsto n_t(\psi)\big)=n(\varphi)+n(\psi)\ ,&\end{aligned}$$

tehát $n|_{L'_+}$ additív.

84. Állítás *Legyen m integrál a (T,L) mérhető tér felett, $(n_t)_{t\in T}$ (T',L') feletti integrálok (T,L,m)-integrálható rendszere, $n{:=}\int n_t dm(t)$, F Banach-tér, $f\in\mathcal{L}^1_F(T',L',n)$. Ekkor*

(1) $f\in\mathcal{L}^1_F(T',L',n_t)$ m-majdnem minden $t\in T$ esetén,

(2) ha $\hat f$ jelöli a $t\mapsto\int f dn_t$ függvény nullával való kiterjesztését T-re, akkor

$$\hat f\in\mathcal{L}^1_f(T,L,m)\ ,$$

(3) $\int\hat f dm=\int f dn$, vagy a szokásos írásmóddal

$$\int\left(\int f dn_t\right)dm(t)=\int f d\left(\int n_t dm(t)\right)\ .$$

Bizonyítás Legyen először $f{=}\sum_{k=1}^{n}\varphi_k\otimes z_k\in L'\otimes F$. Ekkor minden $t\in T$ esetén $f\in\mathcal{L}^1_F(T',L',n_t)$, és

$$\int f dn_t=\sum_{k=1}^{n}\left(\int\varphi_k dn_t\right)z_k\ .$$

Mivel a $(n_t)_{t\in T}$ rendszer (T,L,m)-integrálható,

$$t\mapsto\int f dn_t\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)\otimes F\subset\mathcal{L}^1_F(T,L,m)\ ,$$

és

$$\int\left(\int f dn_t\right)dm(t)=\sum_{k=1}^{n}\left(\int\left(\int\varphi_k dn_t\right)dm(t)\right)z_k\ =\sum_{k=1}^{n}\left(\int\varphi_k dn\right)z_k=\int f dn\ .$$

Legyen most $f\in\mathcal{L}^1_F(T',L',n)$. Ekkor létezik $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $L'\otimes F$-beli, és $g\in\mathcal{F}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(T',n)$, $g\geq 0$ úgy, hogy

(1) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál f-hez n-majdnem mindenütt és n_1 szerint,

(2) minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $\|f_n\|\leq g$.

Legyen

$$A := \{t\in T : n_t(g) = +\infty\} \ ,$$

ekkor

$$m\big(t\mapsto n_t(g)\big) = n(g) < +\infty$$

miatt A m-nullhalmaz. Legyen

$$B := \{t\in T : (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ nem konvergál } f\text{-hez } n_t\text{-majdnem mindenütt}\} \ ,$$

és

$$C := \{t'\in T' : (f_n(t'))_{n\in\mathbb{N}} \text{ nem konvergál } f(t')\text{-höz}\} \ .$$

Ekkor C a feltevés szerint n-nullhalmaz, így

$$0 = n(C) = m\big(t\mapsto n_t(C)\big) \ ,$$

következésképpen $n_t(C)=0$ m-majdnem minden $t\in T$ esetén. Mivel $n_t(C)\neq 0$ pontosan akkor teljesül, ha $t\in B$, következésképpen B m-nullhalmaz.

Legyen

$$\hat{f}_n : T \to F \ , \ t\mapsto \int f_n dn_t \ ,$$
$$\hat{g} : T \to \overline{\mathbb{R}}_+ \ , \ t\mapsto n_t(g) \ ,$$

Ha $t\in T\setminus A\cup B$, akkor $n_t(g)<+\infty$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál f-hez n_t-majdnem mindenütt, így a Lebesgue-tétel szerint $f\in\mathcal{L}^1_F(T',L',n_t)$, és

$$\lim_n \hat{f}_n(t) = \lim_n \int f_n dn_t = \int f dn_t = \hat{f}(t) \ ,$$

továbbá $m(\hat{g})=n(g)<+\infty$, így ismét a Lebesgue-tétel szerint $\hat{f}\in\mathcal{L}^1_F(T,L,m)$, és

$$\int \hat{f} dm = \lim_n \int \hat{f}_n dm = \lim_n \int f dn = \int f dn \ .$$

Megjegyzés Legyen I halmaz. Ekkor $L_I:=\mathbb{R}^{(I)}$ vektorháló, és ε_I (a számláló felső integrál) integrál az (I,L_I) mérhető tér felett, és ha F Banach-tér, akkor $\mathcal{L}^1_F(I,L_I,\varepsilon_I)$ megegyezik az $I\to F$ összegezhető függvények halmazával.

Definíció Legyen (T,L) mérhető tér. A (T,L) feletti integrálok $(m_i)_{i\in I}$ rendszerét *összegezhetőnek* nevezzük, ha (I,L_I,ε_I)-integrálható, azaz minden $\varphi\in L_+$ esetén $(i\mapsto m_i(\varphi))\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(I,L_i,\varepsilon_I)$, vagy ami ugyanezt jelenti, az $(m_i(\varphi))_{i\in I}$ rendszer összegezhető.

Megjegyzés Ha $(m_i)_{i\in I}$ összegezhető, akkor $\sum_{i\in I} m_i = \int m_i d\varepsilon_I(i)$ integrál (T,L) felett.

85. Állítás *Legyen* (T,L) *mérhető tér,* $(m_i)_{i\in I}$ (T,L) *feletti integrálok összegezhető rendszere,* $m{:=}\sum_{i\in I} m_i$*,* F *Banach-tér,* $f{\in}\mathcal{L}^1_F(T,L,m)$*. Ekkor minden* $i{\in}I$ *esetén* $f{\in}\mathcal{L}^1_F(T,L,m_i)$*,* $\left(\int f dm_i\right)_{i\in I}$ *összegezhető, és*

$$\sum_{i\in I}\int f dm_i = \int f dm \ .$$

Bizonyítás A 84. állítást alkalmazzuk az $(m_i)_{i\in I}$ (I,L_I,ε_I)-integrálható rendszerre.

Definíció Legyenek (T,L) és (T',L') mérhető terek, m integrál (T,L) felett, $g{:}T{\to}\mathbb{R}_+$ és $\pi{:}T{\to}T'$ leképezések. Azt mondjuk, hogy a (π,g) pár (T,L,m)-*adaptált*, ha a $\left(g(t){\cdot}\varepsilon_{\pi(t)}\right)_{t\in T}$ rendszer (T,L,m)-integrálható, azaz minden $\varphi{\in}L'_+$ esetén $g{\cdot}(\varphi{\circ}\pi){\in}\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$.

Megjegyzés Tehát ha a (π,g) pár (T,L,m)-adaptált, akkor

$$\pi(g{\cdot}m) = \int g(t){\cdot}\varepsilon_{\pi(t)} dm(t)$$

integrál (T',L') felett.

86. Állítás *Legyenek* (T,L) *és* (T',L') *mérhető terek,* m *integrál* (T,L) *felett,* $g{:}T{\to}\mathbb{R}_+$ *és* $\pi{:}T{\to}T'$ *leképezések úgy, hogy a* (π,g) *pár* (T,L,m)*-adaptált,* F *Banach-tér,* $f{\in}\mathcal{L}^1_F(T',L',\pi(g{\cdot}m))$*. Ekkor* $g{\cdot}(f{\circ}\pi){\in}\mathcal{L}^1_F(T,L,m)$ *és*

$$\int g{\cdot}(f{\circ}\pi) dm = \int f d(\pi(g{\cdot}m)) \ .$$

Bizonyítás A 84. állítást alkalmazzuk a $\left(g(t){\cdot}\varepsilon_{\pi(t)}\right)_{t\in T}$ (T,L,m)-integrálható rendszerre.

7.3 Integrálok szorzata

Definíció Legyen (T,L) és (T',L') két mérhető tér. Jelölje $L\widehat{\otimes}L'$ az $L{\otimes}L'$ halmaz által generált lineáris hálót $\mathbb{R}^{T\times T'}$-ben. A $(T{\times}T', L\widehat{\otimes}L')$ mérhető teret a két mérhető tér *szorzatának* nevezzük.

87. Állítás *Legyen* m' *integrál a* (T',L') *mérhető tér felett,* (T,L) *mérhető tér,* $t{\in}T$*. Ekkor az* $(\varepsilon_{(t,t')})_{t'\in T'}$ $(T{\times}T', L\widehat{\otimes}L')$ *feletti integrálrendszer* (T',L',m')*-integrálható, és*

$$\varepsilon_t{\otimes}m' = \int \varepsilon_{(t,t')} dm'(t') \ .$$

Bizonyítás Legyen

$$L_t := \{f{\in}\mathbb{R}^{T\times T'} : f(t,\,.\,){\in}\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T',L',m')\} \ ,$$

ekkor L_t vektorháló, mely nyilvánvaló módon tartalmazza $L{\otimes}L'$-t, következésképpen $L\widehat{\otimes}L'$-t is.

Megjegyzés Az előző állítás feltételei mellett, ha $f\in\mathcal{L}^1_F(T\times T', L\widehat{\otimes}L', \varepsilon_t\otimes m')$, akkor a 84. állítás szerint $f(t,.)\in\mathcal{L}^1_F(T', L', m')$, és

$$\int f(t,t')dm'(t') = \int f d(\varepsilon_t\otimes m') \ .$$

88. Állítás *Legyen m integrál (T,L) felett, m' integrál (T',L') felett, és tegyük fel, hogy teljesül a következő feltétel*

$$\textit{minden } f\in(L\widehat{\otimes}L')_+ \textit{ esetén } \ t\mapsto m'(f(t,\,.)) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m) \qquad (*)$$

Ekkor $m\overleftarrow{\otimes}m'$ integrál $(T\times T', L\widehat{\otimes}L')$ felett. Ha F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, és $f\in\mathcal{L}^1_F(T\times T', L\widehat{\otimes}L', m\overleftarrow{\otimes}m')$, akkor

(1) $f(t,\,.)\in\mathcal{L}^1_F(T',L',m')$ m-majdnem minden $t\in T$ esetén,

(2) a

$$t\mapsto \int f(t,t')dm'(t')$$

függvény nullával való kiterjesztése T-re eleme $\mathcal{L}^1_F(T,L,m)$-nek,

(3)

$$\int\left(\int f(t,t')dm'(t')\right)dm(t) = \int f d\left(m\overleftarrow{\otimes}m'\right) \ .$$

Bizonyítás A $(*)$ feltétel éppen azt jelenti, hogy az $(\varepsilon_t\otimes m')_{t\in T}$ $(T\times T', L\widehat{\otimes}L')$ feletti integrál-rendszer (T,L,m)-integrálható, és a 84. állítást alkalmazzuk az

$$m\overleftarrow{\otimes}m' = \int \varepsilon_t\otimes m' dm(t)$$

integrálra, felhasználva a előző megjegyzést.

Definíció Legyen m integrál (T,L) felett, m' integrál (T',L') felett. Azt mondjuk, hogy m és m' *szozozhatók*, ha

(1) minden $f\in(L\widehat{\otimes}L')_+$ esetén $\big(t\mapsto m'(f(t,\,.))\big)\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$,

(2) minden $f\in(L\widehat{\otimes}L')_+$ esetén $\big(t'\mapsto m(f(\,.\,,t'))\big)\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T',L',m')$,

(3)

$$m\overleftarrow{\otimes}m'|_{(L\widehat{\otimes}L')_+} = m\overrightarrow{\otimes}m'|_{(L\widehat{\otimes}L')_+} \ .$$

89. Állítás (Lebesgue–Fubini-tétel) *Legyen m integrál (T,L) felett, m' integrál (T',L') felett, tegyük fel, hogy m és m' szorozhatók, és legyen n olyan integrál $(T\times T', L\widehat{\otimes}L')$ felett, hogy $m\overleftarrow{\otimes}m'\ll n$, $m\overrightarrow{\otimes}m'\ll n$, és*

$$m\overleftarrow{\otimes}m'|_{(L\widehat{\otimes}L')_+} = m\overrightarrow{\otimes}m'|_{(L\widehat{\otimes}L')_+} = n|_{(L\widehat{\otimes}L')_+} \ .$$

Ha F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, és $f\in\mathcal{L}^1_F(T\times T', L\widehat{\otimes}L', n)$, akkor

(1) $f(t,\,.\,)\in\mathcal{L}^1_F(T',L',m')$ *m-majdnem minden* $t\in T$ *esetén, a*

$$t\mapsto\int f(t,t')dm'(t')$$

függvény nullával való kiterjesztése T-re eleme $\mathcal{L}^1_F(T,L,m)$*-nek, és*

$$\int\Big(\int f(t,t')dm'(t')\Big)dm(t)=\int f dn\ .$$

(2) $f(\,.\,,t')\in\mathcal{L}^1_F(T,L,m)$ *m′-majdnem minden* $t'\in T'$ *esetén, a*

$$t'\mapsto\int f(t,t')dm(t)$$

függvény nullával való kiterjesztése T′-re eleme $\mathcal{L}^1_F(T',L',m')$*-nek, és*

$$\int\Big(\int f(t,t')dm(t)\Big)dm'(t')=\int f dn\ .$$

90. Állítás *Legyen m integrál* (T,L) *felett, m′ integrál* (T',L') *felett, tegyük fel, hogy* $L\widehat{\otimes}L'=L\otimes L'$ *teljesül. Ekkor m és m′ szorozhatók.*

Bizonyítás Legyen $f:=\sum\limits_{k=1}\varphi_k\otimes\varphi'_k\in(L\otimes L')_+$. Ekkor

$$t\mapsto m'(f(t,\,.\,))=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k\cdot\Big(\int\varphi'_k dm'\Big)\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)\ ,$$
$$t'\mapsto m(f(\,.\,,t'))=\sum_{k=1}^{n}\Big(\int\varphi_k dm\Big)\cdot\varphi'_k\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T',L',m')\ ,$$

és

$$(m\overleftarrow{\otimes}m')(f)=\sum_{k=1}^{n}\Big(\int\varphi_k dm\Big)\cdot\Big(\int\varphi'_k dm'\Big)=(m\overrightarrow{\otimes}m')(f)\ .$$

Megjegyzés Legyenek $\mathcal{R}$ és $\mathcal{R}'$ halmazgyűrűk a T és T' halmazok felett. Ekkor

$$\mathcal{E}(T,\mathcal{R})\otimes\mathcal{E}(T',\mathcal{R}')=\mathcal{E}(T\times T',\mathcal{R}\otimes\mathcal{R}')\ ,$$

következésképpen bármely két $(T,\mathcal{R})$ és $(T',\mathcal{R}')$ feletti integrál szorozható.

Megjegyzés Legyenek T és T' lokálisan kompakt terek. Ekkor

$$\mathcal{K}(T)\otimes\mathcal{K}(T')\subset\mathcal{K}(T\times T')\ ,$$

és a jobb oldalon álló halmaz vektorháló, következésképpen

$$\mathcal{K}(T)\widehat{\otimes}\mathcal{K}(T')\subset\mathcal{K}(T\times T')\ .$$

Legyen m és m' két integrál $(T,\mathcal{K}(T))$ és $(T',\mathcal{K}(T'))$ felett. Ekkor létezik egyértelműen $\mu{:}\mathcal{K}(T)\to\mathbb{R}$ és $\mu'{:}\mathcal{K}(T')\to\mathbb{R}$ pozitív lineáris forma úgy, hogy

$$\mu\big|_{\mathcal{K}(T)_+}=m\big|_{\mathcal{K}(T)_+}\quad\text{és}\quad\mu'\big|_{\mathcal{K}(T')_+}=m'\big|_{\mathcal{K}(T')_+}\ .$$

A Bourbaki: Integrálás III. szerint a

$$\mu\otimes\mu' : \mathcal{K}(T\times T') \to \mathbb{R}\ ,\ f \mapsto \mu\big(x\mapsto\mu'(f(x,\,.\,))\big) = \mu'\big(y\mapsto\mu(f(\,.\,,y))\big)$$

leképezés pozitív lineáris funkcionál.

Legyen $f\in\mathcal{K}(T\times T')_+$. Ekkor

$$\begin{aligned}(m\overleftarrow{\otimes}m')(f) &= m\big(x\mapsto m'(f(x,\,.\,))\big) = \mu\big(x\mapsto\mu'(f(x,\,.\,))\big) = (\mu\otimes\mu')(f) = \\ &= \mu'\big(y\mapsto\mu(f(\,.\,,y))\big) = m'\big(y\mapsto m(f(\,.\,,y))\big) = (m\overrightarrow{\otimes}m')(f)\ .\end{aligned}$$

Ebből következik még, hogy

$$m\overleftarrow{\otimes}m' \le (\mu\otimes\mu')^{**} \quad \text{és} \quad m\overrightarrow{\otimes}m' \le (\mu\otimes\mu')^{**}\ ,$$

így m és m' szozozhatók.

7.4 Lokális integrálhatóság

Definíció Legyen (T,L) mérhető tér, m integrál (T,L) felett, $g{:}T\to\mathbb{R}_+$. Azt mondjuk, hogy g *lokálisan (T,L,m)-integrálható*, ha az (id_T,g) pár (T,L,m)-adaptált, azaz minden $\varphi\in L_+$ esetén $g\cdot\varphi\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$.

Ha g lokálisan (T,L,m)-integrálható, akkor $g\cdot m$ integrál (T,L) felett, és ha F Banach-tér, és $f\in\mathcal{L}^1_F(T,L,g\cdot m)$, akkor $g\cdot f\in\mathcal{L}^1_F(T,L,m)$, és

$$\int g\cdot f dm = \int f d(g\cdot m)\ .$$

Megjegyzés A fenti definíciót általánosíthatjuk Banach-tér értékű függvényekre is.

Definíció Legyen m p-integrál a (T,L) mérhető tér felett, F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett. Az $g{:}T\to F$ *p-edik hatványon lokálisan (T,L,m)-integrálható*, vagy röviden lokálisan (T,L,m_p)-integrálható, ha minden $\varphi\in L$ esetén $g\cdot\varphi\in\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$. Jelölje $\mathcal{L}^p_{F,loc}(T,L,m)$ a $T\to F$ p-edik hatványon lokálisan (T,L,m) integrálható függvények halmazát. Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{L}^p_{F,loc}(T,L,m)$ a pontonkénti műveletekkel vektortér $\mathbb{K}$ felett.

Definíció Az m integrált a (T,L) mérhető tér felett *korlátosnak* nevezzük, ha $T\in\mathcal{R}(T,L,m)$.

91. Állítás *Legyen m p-integrál a (T,L) mérhető tér felett, melyre $L\cdot L\subset L$ teljesül, F Banach tér, $g\in\mathcal{F}^\infty_F(T,m)$ olyan, hogy létezik $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $L\otimes F$-beli sorozat, mely m-majdnem mindenütt g-hez konvergál, és a következők egyike teljesül:*

(1) $F=\mathbb{R}$,

(2) létezik $h\in\mathcal{F}^\infty_{\mathbb{R}}(T,m)$ úgy, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $\|g_n\|\le h$.

Ekkor $g\in\mathcal{L}^p_{F,loc}(T,L,m)$.

Bizonyítás $\varphi{\in}L$ esetén $L{\cdot}L{\subset}L$ miatt $(g_n{\cdot}\varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ $L{\otimes}F$-beli sorozat, mely m-majdnem mindenütt $g{\cdot}\varphi$-hez konvergál, és az (1) esetben

$$m_p(g{\cdot}\varphi) \le m_\infty(g){\cdot}m_p(\varphi) < +\infty \ ,$$

így a Beppo Levi-tétel 5. következménye szerint $g{\cdot}\varphi{\in}\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$, a (2) esetben pedig

$$\|g_n{\cdot}\varphi\|{\le}h{\cdot}|\varphi| \quad \text{és} \quad m_p(h{\cdot}|\varphi|) \le m_\infty(h){\cdot}m_p(\varphi) < +\infty \ ,$$

így a Lebesgue-tétel szerint $g{\cdot}\varphi{\in}\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$.

Megjegyzés Legyen m p-integrál a (T,L) mérhető tér felett, melyre $L{\cdot}L{\subset}L$ teljesül, F Banach tér. Ekkor

$$L{\otimes}F \subset \mathcal{L}^p_{F,loc}(T,L,m) \ .$$

92. Állítás *Legyen m p-integrál a (T,L) mérhető tér felett, F,G és H Banach-terek, $b{:}F{\times}G{\to}H$ folytonos $\mathbb{R}$-bilineáris leképezés, továbbá $f{\in}\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$ és $g{\in}\mathcal{L}^p_{G,loc}(T,L,m){\cap}\mathcal{F}^\infty_G(T,m)$. Ekkor*

$$b{\circ}(f,g) \in \mathcal{L}^p_H(T,L,m) \ .$$

Bizonyítás Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $L{\otimes}F$-beli sorozat, mely konvergál f-hez m_p szerint. Mivel $g{\in}\mathcal{L}^p_{G,loc}(T,L,m)$, minden $n{\in}\mathbb{N}$ esetén $b{\circ}(f_n,g){\in}\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m){\otimes}H$. Továbbá,

$$m_p(b{\circ}(f,g){-}b{\circ}(f_n,g)) \le \|b\|{\cdot}m_p(f{-}f_n){\cdot}m_\infty(g) \ ,$$

következésképpen $b{\circ}(f,g){\in}\mathcal{L}^p_H(T,L,m)$.

1. Következmény *Legyen m p-integrál a (T,L) mérhető tér felett, F Banach-tér. Ha $E{\subset}T$ lokálisan (T,L,m_p)-integrálható halmaz, és $f{\in}\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$, akkor $\chi_E{\cdot}f{\in}\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$.*

2. Következmény *Legyen m p-integrál a (T,L) mérhető tér felett, melyre $L{\cdot}L{\subset}L$ teljesül, F Banach tér, $f{\in}\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$, $g{\in}\mathcal{F}^\infty_{\mathbb{R}}(T,m)$ olyan, hogy létezik L-beli sorozat, mely m-majdnem mindenütt g-hez konvergál. Ekkor*

$$g{\cdot}f \in \mathcal{L}^p_F(T,L,m) \ .$$

3. Következmény *Legyen m p-integrál a (T,L) mérhető tér felett, melyre $L{\cdot}L{\subset}L{\subset}\mathcal{F}^b(T,\mathbb{R})$ teljesül, F Banach tér. Ekkor*

$$\mathcal{L}^p_F(T,L,m) \subset \mathcal{L}^p_{F,loc}(T,L,m) \ .$$

93. Állítás *Legyen L és L' két lineáris függvényháló, m felső integrál T felett, úgy, hogy (T,L) és (T,L') m_p-ekvivalens mérhető terek, F Banach-tér. Ekkor*

$$\mathcal{L}^p_{F,loc}(T,L,m){\cap}\mathcal{F}^\infty_F(T,m) = \mathcal{L}^p_{F,loc}(T,L',m){\cap}\mathcal{F}^\infty_F(T,m) \ .$$

Bizonyítás Legyen $f{\in}\mathcal{L}^p_{F,loc}(T,L,m){\cap}\mathcal{F}^\infty_F(T,m)$, és $\psi{\in}L'$ tetszőleges. Ekkor $L'{\subset}\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$ és az előző állítás miatt $\psi{\cdot}f{\in}\mathcal{L}^p_F(T,L,m){\subset}\mathcal{L}^p_F(T,L',m)$ (mert

$L\subset\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L',m)$). Következésképpen $f\in\mathcal{L}^p_{F,loc}(T,L',m)$. A másik irányú tartalmazás hasonlóan látható be.

Következmény Az előző állítás feltételei mellett $E\subset T$ pontosan akkor lokálisan (T,L,m)-integrálható, ha lokálisan (T,L',m)-integrálható.

Megjegyzés Legyen m p-integrál a (T,L) mérhető tér felett. Az $f{:}T\to F$ függvény pontosan akkor lokálisan $(T,\mathcal{E}(T,\mathcal{R}(T,L)),m_p)$-integrálható, ha minden $E'\in\mathcal{R}(T,L)$ esetén $\chi_{E'}\cdot f\in\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$. Az $E\subset T$ halmaz pontosan akkor lokálisan $(T,\mathcal{E}(T,\mathcal{R}(T,L)),m_p)$-integrálható, ha minden $E'\in\mathcal{R}(T,L)$ esetén $E\cap E'\in\mathcal{R}^p(T,L,m)$.

Ha (T,L) Stone-tulajdonságú, akkor az előző állítás szerint egy halmaz pontosan akkor lokálisan $(T,\mathcal{E}(T,\mathcal{R}(T,L)),m_p)$-integrálható, ha lokálisan (T,L,m_p)-integrálható.

94. Állítás *Legyen m integrál a (T,L) mérhető tér felett, melyre a következők egyike teljesül*

(1) $L\cdot L\subset L$,

(2) (T,L) Stone-tulajdonságú,

$E\in\mathcal{R}(T,L,m)$. Ekkor E lokálisan (T,L,m)-integrálható, és $\chi_E\cdot m$ korlátos integrál (T,L) felett.

Bizonyítás Ha (1) teljesül, akkor a 91. állítás szerint E lokálisan (T,L,m)-integrálható, következésképpen $\chi_E\cdot m$ integrál (T,L) felett.

Ha (2) teljesül, akkor $E'\in\mathcal{R}(T,L)$ esetén $E'\in\mathcal{R}(T,L,m)$ a Stone-tulajdonság miatt, következésképpen $E\cap E'\in\mathcal{R}(T,L,m)$, így E lokálisan $(T,\mathcal{E}(T,\mathcal{R}(T,L)),m)$-integrálható halmaz, és ezért lokálisan (T,L,m)-integrálható ismét a Stone-tulajdonság szerint.

$\chi_E\cdot m\le m$ miatt $\chi_E\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,\chi_E\cdot m)$, és

$$(\chi_E\cdot m)(1-\chi_E)=m\left(\chi_E\cdot\chi_{T\setminus E}\right)=0$$

miatt $1-\chi_E\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,\chi_E\cdot m)$, következésképpen $1\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,\chi_E\cdot m)$.

95. Állítás *Ha m korlátos integrál a (T,L) mérhető tér felett, $f\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$ és $c\in\mathbb{R}$, akkor $[f>c]$, $[f\ge c]$, $[f<c]$, $[f\le c]$, $[f=c]$ (T,L,m)-integrálható halmazok.*

Bizonyítás $n\in\mathbb{N}$ esetén legyen

$$f_n:=\big(n(f-f\wedge c)\big)\wedge 1\ ,$$

ekkor $f_n\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$, továbbá $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő függvénysorozat úgy, hogy $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n=\chi_{[f>c]}$. $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$m\left(\chi_{[f>c]}\right)\le m(1)<+\infty\ ,$$

így a Beppo Levi-tétel 3. következménye szerint

$$\chi_{[f>c]}\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)\ ,$$

a többi halmazra a bizonyítás hasonló.

7.5 Lebesgue–Radon–Nykodim-tétel

96. Állítás *Legyen m és n két korlátos integrál a (T, L) mérhető tér felett, melyre $L{\cdot}L{\subset}L$ teljesül úgy, hogy $n{\ll}m$. Ekkor létezik $g{\in}\mathcal{L}^1_{\mathbb{R},loc}(T, L, m){\cap}\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T, L, m)$, $g{\geq}0$ úgy, hogy*

$$n|_{L_+} = (g{\cdot}m)|_{L_+} \ .$$

Bizonyítás Legyen

$$k := n + m \ ,$$

ekkor k korlátos integrál (T, L) felett, $n{\leq}k$, $m{\leq}k$. Mivel L algebra, m,n és k 2-integrálok is (T, L) felett. $f{\in}\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(T, L, k)$ esetén

$$\left|\int f dn\right| \leq n(|f|) \leq k(|f|) \leq (k(1))^{1/2}{\cdot}k_2(f) \ ,$$

következésképpen

$$\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(T, L, k) \to \mathbb{R} \ , \ f \mapsto \int f dn$$

folytonos lineáris leképezés, így a Riesz-féle reprezentációs tétel szerint létezik $g_0{\in}\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(T, L, k)$ úgy, hogy minden $f{\in}\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(T, L, k)$ esetén

$$\int f\, dn = \int f g_0\, dk \ .$$

Speciálisan, mivel $\chi_{[g_0<0]}{\in}\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(T, L, k)$,

$$\int \chi_{[g_0<0]} dn = \int \chi_{[g_0<0]}{\cdot}g_0 dk \ .$$

Az egyenlőség bal oldala $\geq$0, a jobb oldala $\leq$0, ez csak akkor lehet, ha mindkét oldal nulla. Tehát $k([g_0{<}0]){=}0$, azaz k-majdnem mindenütt $g_0{\geq}0$, így m-majdnem mindenütt $g_0{\geq}0$.

Hasonlóan, mivel $\chi_{[g_0\geq 1]}{\in}\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(T, L, k)$,

$$\int \chi_{[g_0>1]} dn = \int \chi_{[g_0>1]}{\cdot}g_0 dk \ .$$

azaz

$$\int (1{-}g_0){\cdot}\chi_{[g_0\geq 1]} dn = \int \chi_{[g_0\geq 1]}{\cdot}g_0 dm \ .$$

Az egyenlőség bal oldala $\leq$0, a jobb oldala $\geq$0, ez csak akkor lehet, ha mindkét oldal nulla. Tehát $m\big(\chi_{[g_0\geq 1]}{\cdot}g_0\big){=}0$, azaz m-majdnem mindenütt $g_0{<}1$.

A továbiakban feltehetjük, hogy $0{\leq}g_0{<}1$ mindenütt teljesül, és legyen

$$g := \frac{g_0}{1{-}g_0} \ = \sum_{n=1}^{\infty} g_0^n.$$

Legyen $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(T,L,k)$. $j \in \mathbb{N}$ esetén g_0^j korlátos függvény, és létezik L-beli sorozat, mely k-majdnem mindenütt hozzá konvergál, így $f \cdot g_0^j \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(T,L,k)$, következésképpen

$$\int f \cdot g_0^j dn = \int f \cdot g_0^{j+1} dk \ .$$

$j \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{j=0}^{n-1} \int f \cdot g_0^j dn = \sum_{j=0}^{n-1} \int f \cdot g_0^{j+1} dk = \sum_{j=0}^{n-1} \int f \cdot g_0^{j+1} dm + \sum_{j=0}^{n-1} \int f \cdot g_0^{j+1} dn \ ,$$

ezt átrendezve

$$\int f dn = \sum_{j=1}^{n} \int f \cdot g_0^j dm + \int f \cdot g_0^n dn \ ,$$

Az $(f \cdot g_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat monoton fogyó, nullához tart, így a Beppo Levi-tétel szerint

$$\lim_n \int f \cdot g_0^n dn = 0 \ ,$$

következésképpen

$$\int f dn = \sum_{j=1}^{\infty} \int f \cdot g_0^j dm \ .$$

Ismét a Beppo Levi-tétel szerint

$$f \cdot g = \sum_{j=1}^{\infty} f \cdot g_0^j \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m) \ , \tag{$*$}$$

és

$$\int f \cdot g dm = \sum_{j=1}^{\infty} \int f \cdot g_0^j dm \ ,$$

következésképpen

$$\int f dn = \int f \cdot g dm \ . \tag{$**$}$$

Mivel $(*)$ és $(**)$ fennáll minden $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(T,L,k)$ esetén, és $L \cdot L \subset L$ következtében $L \subset \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(T,L,k)$, így g lokálisan (T,L,m)-integrálható, és $n|_{L_+} = (g \cdot m)|_{L_+}$.

Továbbá, $1 \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(T,L,k)$ miatt $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$ is teljesül.

Definíció Legyen (T,L) mérhető tér. Az $(E_i)_{i \in I}$ T-beli rendszer *L-lokálisan véges (illetve megszámlálható)*, ha minden $\varphi \in L_+$ esetén

$$\{i \in I : [\varphi > 0] \cap E_i \neq \emptyset\}$$

véges (illetve megszámlálható).

97. Állítás *Legyen m integrál a (T,L) mérhető tér felett, $(E_i)_{i\in I}$ diszjunkt lokálisan (T,L,m)-integrálható halmazok L-lokálisan megszámlálható rendszere. Ekkor $E:=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_i$ lokálisan (T,L,m)-integrálható, $\big(\chi_{E_i}\cdot m\big)_{i\in I}$ összegezhető rendszer, és*

$$\Big(\sum_{i\in I}\chi_{E_i}\cdot m\Big)\Big|_{L_+}=(\chi_E\cdot m)\Big|_{L_+} .$$

Bizonyítás Legyen $\varphi\in L_+$. Ekkor

$$\chi_E\cdot\varphi=\sum_{i\in I}\chi_{E_i}\cdot\varphi ,$$

$i\in I$ esetén $\chi_{E_i}\cdot\varphi\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$, és

$$I(\varphi):=\{i\in I:[\varphi>0]\cap E_i\neq\emptyset\}$$

megszámlálható, és

$$\sum_{i\in I}\chi_{E_i}\cdot\varphi=\sum_{i\in I(\varphi)}\chi_{E_i}\cdot\varphi .$$

Emellett

$$\sum_{i\in I(\varphi)}m\big(\chi_{E_i}\cdot\varphi\big)\ =\ \sup_{\substack{J\subset I(\varphi)\\ J\text{ véges}}}\sum_{i\in J}m\big(\chi_{E_i}\cdot\varphi\big)\ =\ \sup_{\substack{J\subset I(\varphi)\\ J\text{ véges}}}m\big(\chi_{\bigcup\limits_{i\in J}E_i}\cdot\varphi\big)\ \le\ m(\varphi)\ ,$$

így a Beppo Levi-tétel szerint $\chi_E\cdot\varphi\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$, és

$$m\big(\chi_E\cdot\varphi\big)=\sum_{i\in I}m\big(\chi_{E_i}\cdot\varphi\big) .$$

98. Állítás (Lebesgue–Radon–Nykodim-tétel) *Legyen m és n két integrál a (T,L) mérhető tér felett, melyre $L\cdot L\subset L$ teljesül úgy, hogy $n\ll m$. Legyen $(E_i)_{i\in I}$ (T,L,m)-integrálható és (T,L,n)-integrálható diszjunkt halmazok L-lokálisan megszámlálható rendszere, és $E:=\bigcup\limits_{i\in I}E_i$. Ekkor E lokálisan (T,L,n)-integrálható, és létezik $g\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R},loc}(T,L,m)$, $g\geq 0$ úgy, hogy*

$$\chi_E\cdot n\big|_{L_+}=g\cdot m\big|_{L_+} .$$

Bizonyítás Az előző állítás szerint E lokálisan (T,L,n)-integrálható, $\big(\chi_{E_i}\cdot n\big)_{i\in I}$ összegezhető rendszer, és

$$\Big(\sum_{i\in I}\chi_{E_i}\cdot n\Big)\Big|_{L_+}=(\chi_E\cdot n)\Big|_{L_+} .$$

$i\in I$ esetén $n\ll m$ miatt $\chi_{E_i}\cdot n\ll\chi_{E_i}\cdot m$, és ezek korlátos integrálok, következésképpen létezik $g_i\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R},loc}(T,L,\chi_{E_i}\cdot m)$, $g\geq 0$ úgy, hogy

$$\chi_{E_i}\cdot n\Big|_{L_+}=g_i\cdot\big(\chi_{E_i}\cdot m\big)\Big|_{L_+} .$$

Mivel $(E_i)_{i\in I}$ diszjunkt rendszer, jól értelmezett a

$$g := \sum_{i\in I} g_i\cdot\chi_{E_i}$$

összeg. Legyen $\varphi\in L_+$. Ekkor

$$I(\varphi) := \{i\in I : [\varphi>0]\cap E_i\neq\emptyset\} \ .$$

megszámlálható, és

$$g\cdot\varphi = \sum_{i\in I}\varphi\cdot g_i\cdot\chi_{E_i} = \sum_{i\in I(\varphi)}\varphi\cdot g_i\cdot\chi_{E_i} \ .$$

$i\in I$ esetén $\varphi\cdot g_i\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T, L, \chi_{E_i}\cdot m)$, következésképpen $\varphi\cdot g_i\cdot\chi_{E_i}\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T, L, m)$, és

$$\sum_{i\in I(\varphi)}\int\varphi\cdot g_i\cdot\chi_{E_i}dm = \sum_{i\in I(\varphi)}\Big(g_i\cdot\big(\chi_{E_i}\cdot m\big)\Big)(\varphi) = \sum_{i\in I(\varphi)}\big(\chi_{E_i}\cdot n\big)(\varphi) =$$
$$= \sum_{i\in I(\varphi)} n\big(\chi_{E_i}\cdot\varphi\big) = \sum_{i\in I} n\big(\chi_{E_i}\cdot\varphi\big) = \sum_{i\in I}\big(\chi_{E_i}\cdot n\big)(\varphi) = \big(\chi_E\cdot n\big)(\varphi) < +\infty \ ,$$

így a Beppo Levi-tétel szerint $g\cdot\varphi\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T, L, m)$, és

$$(g\cdot m)(\varphi) = \int g\cdot\varphi\, dm = \big(\chi_E\cdot n\big)(\varphi) \ .$$

7.6 Mértékek integrálása

Definíció Legyen m integrál a (T, L) mérhető tér felett, (T', L') mérhető tér. Azt mondjuk, hogy a $(\nu_t)_{t\in T}$ $\mathcal{M}_+(T', L')$-beli rendszer (T, L, m)-*integrálható*, ha minden $\varphi\in L'$ esetén

$$\big(t\to\nu_t(\varphi)\big) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T, L, m) \ .$$

99. Állítás *Ha $(\nu_t)_{t\in T}$ (T, L, m)-integrálható rendszer $\mathcal{M}_+(T', L')$-ben, akkor*

$$\int\nu_t dm(t) : L'\to\mathbb{R} \ , \ \varphi\mapsto\int\nu_t(\varphi)dm(t)$$

mérték (T', L') felett.

Bizonyítás Hasonló az integrálokra vonatkozó hasonló állítás bizonyításához.

Megjegyzés Nyilvánvaló, hogy

$$\Big(\int\nu_t dm(t)\Big)\Big|_{L'_+} = \int\nu_t^{**}dm(t)\Big|_{L'_+} \ ,$$

és

$$\Big(\int\nu_t dm(t)\Big)^{**} \geq \int\nu_t^{**}dm(t) \ .$$

7.7 Integrálok lokalizációja

Definíció Legyen m felső integrál a (T,L) mérhető tér felett. Ekkor

$$m_L := \bigvee_{E\in\mathcal{R}(T,L)} \chi_E{\cdot}m$$

az m *L-szerinti lokalizáltja.*

Megjegyzés Nyilvánvaló, hogy m_L felső integrál T felett, és $m_L{\le}m$.

100. Állítás *Ha m p-integrál (T,L) felett, akkor m_L is p-integrál (T,L) felett úgy, hogy $m_L{\le}m$, és*

$$(m_L)_p\big|_{L_+} = m_p\big|_{L_+} \ .$$

Bizonyítás $\varphi{\in}L_+$ esetén

$$\varphi = \chi_{[\varphi>0]}{\cdot}\varphi = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \chi_{[\varphi>1/n]}{\cdot}\varphi \ ,$$

így, mivel $[\varphi{>}1/n]{\in}\mathcal{R}(T,L)$,

$$m(\varphi^p) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m\big(\chi_{[\varphi>1/n]}{\cdot}\varphi^p\big) \le \sup_{E\in\mathcal{R}(T,L)} m\big(\chi_E{\cdot}\varphi^p\big) = m_L(\varphi^p) \ ,$$

következésképpen $m(\varphi^p){=}m_L(\varphi^p)$.

Megjegyzés Ha T halmaz, és $\mathcal{H}{\subset}\mathcal{P}(T)$, akkor jelölje $\mathcal{H}_\delta$ illetve $\mathcal{H}_\sigma$ a megszámlálható sok $\mathcal{H}$-beli halmaz metszeteként illetve uniójaként előálló halmazok halmazát, $\sigma(\mathcal{H})$ pedig a $\mathcal{H}$ által generált σ-algebrát.

101. Állítás *Legyen m felső integrál a (T,L) mérhető tér felett, $E{\subset}T$ olyan, hogy létezik L-beli sorozat, mely m-majdnem mindenütt χ_E-hez konvergál. Ekkor létezik $F{\in}\mathcal{R}(T,L)_{\delta\sigma}$ úgy, hogy az $E\Delta F{:=}(E{\setminus}F){\cup}(F{\setminus}E)$ szimmetrikus különbség m-nullhalmaz.*

Bizonyítás Létezik $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ L_+-beli sorozat, mely az N m-eltűnő halmazon kívül (azaz m-majdnem mindenütt) χ_E-hez konvergál. $n{\in}\mathbb{N}$ esetén legyen

$$g_n := \bigwedge_{k\ge n} \varphi_k \ .$$

Ekkor $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő sorozat, $t{\in}T{\setminus}N$ esetén

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} g_n(t) = \liminf_{n\to+\infty} \varphi_n(t) = \chi_E(t) \ ,$$

és $k{\in}\mathbb{N}$ esetén

$$[\varphi_k{\ge}1/2] = \bigcap_{n\ge3} [\varphi_k{>}1/2-1/n] \in \mathcal{R}(T,L)_\delta \ ,$$

következésképpen

$$[g_n{\ge}1/2] = \bigcap_{n\ge k} [\varphi_k{\ge}1/2] \in \mathcal{R}(T,L)_\delta \ ,$$

és így

$$F := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [g_n \geq 1/2] \in \mathcal{R}(T,L)_{\delta\sigma} \ .$$

Ekkor $E \setminus N \subset F$ és $F \setminus N \subset E$, így $E \setminus F \subset N$ és $F \setminus E \subset N$, ezért $E \Delta F \subset N$.

Megjegyzés $[\chi_E \neq \chi_F] = E \Delta F$ miatt, ha $E \Delta F$ m-nullhalmaz, akkor χ_E és χ_F m-majdnem mindenütt egyenlők.

102. Állítás *Ha m p-integrál a Stone-tulajdonságú (T,L) mérhető tér felett, akkor*

$$m_L = \bigvee_{E\in\mathcal{R}(T,L)_{\delta\sigma}} \chi_E \cdot m = \bigvee_{E\in\mathcal{R}^p(T,L,m)} \chi_E \cdot m = \bigvee_{E\in\mathcal{R}^p(T,L,m)_\sigma} \chi_E \cdot m \ .$$

Bizonyítás

$$m_L \leq \bigvee_{E\in\mathcal{R}^p(T,L,m)} \chi_E \cdot m \leq \bigvee_{E\in\mathcal{R}^p(T,L,m)_\sigma} \chi_E \cdot m \ .$$

triviális, megmutatjuk, hogy

$$\bigvee_{E\in\mathcal{R}^p(T,L,m)_\sigma} \chi_E \cdot m \leq \bigvee_{E\in\mathcal{R}(T,L)_{\delta\sigma}} \chi_E \cdot m \leq m_L \ .$$

Legyen $f \in \mathcal{F}_+(T)$ és $E \in \mathcal{R}^p(T,L,m)_\sigma$. Ekkor létezik $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{R}^p(T,L,m)$-beli sorozat úgy, hogy $E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik $E'_n \in \mathcal{R}(T,L)_{\delta\sigma}$ úgy, hogy $m(E_n \Delta E'_n) = 0$. Ekkor $E' := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E'_n \in \mathcal{R}(T,L)_{\delta\sigma}$, $N := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \Delta E'_n$ m-nullhalmaz, és

$$\chi_E \leq \chi_N + \chi_{E'} \ ,$$

így

$$m(\chi_E \cdot f) \leq m(\chi_{E'} \cdot f) \leq \sup_{E\in\mathcal{R}(T,L)_{\delta\sigma}} m(\chi_E \cdot f) \ ,$$

tehát

$$\bigvee_{E\in\mathcal{R}^p(T,L,m)_\sigma} \chi_E \cdot m \leq \bigvee_{E\in\mathcal{R}(T,L)_{\delta\sigma}} \chi_E \cdot m \ .$$

Legyen $E \in \mathcal{R}(T,L)_{\delta\sigma}$. Ekkor létezik $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{R}(T,L)_\delta$-beli sorozat úgy, hogy $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, és $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik $F_n \in \mathcal{R}(T,L)$ úgy, hogy $E_n \subset F_n$, feltehető, hogy az $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat monoton növő. Ekkor

$$m\big(\chi_E \cdot f\big) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} m\big(\chi_{F_n} \cdot f\big) \leq m_L(f) \ ,$$

tehát

$$\bigvee_{E\in\mathcal{R}(T,L)_{\delta\sigma}} \chi_E \cdot m \leq m_L \ .$$

Következmény Legyen m p-integrál a Stone-tulajdonságú (T,L) mérhető tér felett, és $f \in \mathcal{F}_+(T)$. Ekkor

(1) Ha $m_L(f)=0$, akkor minden $E\in\mathcal{R}^p(T,L,m)_\sigma$ esetén $\chi_E\cdot f$ m-majdnem mindenütt nulla.

(2) Ha minden $E\in\mathcal{R}(T,L)$ esetén $\chi_E\cdot f$ m-majdnem mindenütt nulla, akkor $m_L(f)=0$.

103. Állítás *Legyen m p-integrál a Stone-tulajdonságú (T,L) mérhető tér felett, $f\in\mathcal{F}_+(T)$ olyan, hogy létezik $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{R}^p(T,L,m)$-beli sorozat úgy, hogy*

$$[f\neq 0]\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n\ .$$

Ekkor $m_L(f)=m(f)$.

Bizonyítás Feltehető, hogy $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő. Ekkor

$$f=\bigvee_{n\in\mathbb{N}}\chi_{E_n}\cdot f\ ,$$

következésképpen

$$m(f)=\sup_{n\in\mathbb{N}}m\Big(\chi_{E_n}\cdot f\Big)\leq m_L(f)\ .$$

104. Állítás *Legyen m p-integrál a Stone-tulajdonságú (T,L) mérhető téren, F Banach-tér, $f{:}T\to F$ leképezés. Ekkor a következők ekvivalensek:*

(1) $f\in\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$,

(2) $f\in\mathcal{L}^p_F(T,L,m_L)$, és létezik $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{R}(T,L)$-beli sorozat és $N\subset T$ m-nullhalmaz úgy, hogy

$$[f\neq 0]\subset\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n\Big)\cup N\ ,$$

(3) $f\in\mathcal{L}^p_F(T,L,m_L)$, és létezik $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{R}^p(T,L,m)$-beli sorozat úgy, hogy

$$[f\neq 0]\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n\ .$$

Bizonyítás Tegyük fel, hogy (1) teljesül. Ekkor $m_L\leq m$ miatt $f\in\mathcal{L}^p_F(T,L,m_L)$, és létezik $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{E}(T,\mathcal{R}(T,L))\otimes F$-beli sorozat, mely az N m-nullhalmazon kívül f-hez konvergál. Ekkor $n\in\mathbb{N}$ esetén $[f_n\neq 0]\in\mathcal{R}(T,L)$, és

$$[f\neq 0]\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[f_n\neq 0]\cup N\ ,$$

tehát teljesül (2).

Ha (2) teljesül, akkor, mivel $\mathcal{R}(T,L)\subset\mathcal{R}^p(T,L,m)$, és minden m-nullhalmaz eleme $\mathcal{R}^p(T,L,m)$-nek, teljesül (3).

Tegyük fel, hogy (3) teljesül, ekkor feltehetjük, hogy $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő. $f\in\mathcal{L}^p_F(T,L,m_L)$ miatt létezik $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{E}(T,\mathcal{R}(T,L))\otimes F$-beli sorozat, mely konvergál f-hez $(m_L)_p$ szerint. Legyen $n\in\mathbb{N}$, ekkor $E_n\in\mathcal{R}^p(T,L,m)$, és $\mathcal{R}(T,L)\subset\mathcal{R}^p(T,L,m)$ miatt $\chi_{E_n}\cdot f_k\in\mathcal{E}(T,\mathcal{R}^p(T,L,m))\otimes F\subset\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$, így az

$$m_p(\chi_{E_n}\cdot f-\chi_{E_n}\cdot f_k)=m\big(\chi_{E_n}\cdot\|f-f_k\|^p\big)^{1/p}\leq(m_L)_p(f-f_k)$$

egyenlőtlenség szerint $(\chi_{E_n}\cdot f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergál $\chi_{E_n}\cdot f$-hez m_p szerint, következésképpen $\chi_{E_n}\cdot f\in\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$. Emellett az

$$[f\neq 0]\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n$$

tartalmazás miatt egyrészt $(\chi_{E_n}\cdot f)_{n\in\mathbb{N}}$ pontonként konvergál f-hez úgy, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $\|\chi_{E_n}\cdot f\|\leq\|f\|$, másrészt

$$m_p(f)=(m_L)_p(f)<+\infty\ ,$$

így a Lebesgue-tétel szerint $f\in\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$.

Megjegyzés A Lebesgue tétel szerint még az is igaz, hogy $(\chi_{E_n}\cdot f)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál m_p szerint f-hez. Ennek következményeként

$$\lim_n m_p(\chi_{E_n}\cdot f)=m_p(f)\ ,$$

és innen már közvetlenül adódik, hogy

$$m_p(f)=\lim_{E\in\mathcal{R}(T,L)}m_p(\chi_E\cdot f)\ ,$$

itt az $\mathcal{R}(T,L)$ halmazon a $(\subset)$ felfelé irányított rendezést tekintjük.

Speciálisan, $p{=}1$ esetén, ha $\mu\in\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(T,L)$ olyan, hogy $|\mu|\big|_{L_+}{=}m\big|_{L_+}$, akkor

$$\int f\,d(\mu,m)=\lim_{E\in\mathcal{R}(T,L)}\int\chi_E\cdot f\,d(\mu,m)\ .$$

105. Állítás *Legyen m p-integrál a Stone-tulajdonságú (T,L) mérhető tér felett, F Banch-tér, $f\in\mathcal{L}^p_F(T,L,m_L)$. Ekkor létezik $g\in\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$ úgy, hogy f és g m_L-ekvivalensek.*

Bizonyítás Létezik $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{R}(T,L)$-beli monoton növő sorozat úgy, hogy

$$m_L(\|f\|^p)=\sup_{n\in\mathbb{N}}m\big(\chi_{E_n}\cdot\|f\|^p\big)\ .$$

Legyen

$$E:=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n\ ,$$

ekkor az előző állítás bizonyításában követetthez hasonló gondolatmenettel látható, hogy $(\chi_{E_n}\cdot f)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$-beli sorozat, mely pontonként konvergál $\chi_E\cdot f$-hez, és

$$m_p\big(\chi_E\cdot f\big)=(m_L)_p\big(\chi_E\cdot f\big)\leq(m_L)_p(f)\ ,$$

így a Lebesgue-tétel szerint $\chi_E\cdot f\in\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$. Továbbá,

$$(m_L)_p(f)=\sup_{n\in\mathbb{N}}m_p\big(\chi_{E_n}\cdot f\big)=m_p\big(\chi_E\cdot f\big)=(m_L)_p\big(\chi_E\cdot f\big)\ .$$

Azonban, $\|f\|,\chi_E\cdot\|f\|\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$, $0\leq\chi_E\cdot\|f\|\leq\|f\|$, így a Beppo Levi-tétel előtti lemma szerint

$$\Big((m_L)_p\big(\|f\|-\chi_E\cdot\|f\|\big)\Big)^p\leq\Big((m_L)_p(\|f\|)\Big)^p-\Big((m_L)_p\big(\chi_E\cdot\|f\|\big)\Big)^p=0\ ,$$

következésképpen f és $\chi_E\cdot f$ m_L-ekvivalensek.

106. Állítás *Legyen (T,L) mérhető tér, m normális integrál (T,L) felett. Ekkor m_L normális integrál (T,L) felett úgy, hogy $m_L \le m$, és*

$$m_L\big|_{\overline{\overline{L}}_+} = m\big|_{\overline{\overline{L}}_+} \ .$$

Bizonyítás Legyen $f \in \overline{\overline{L}}_+$, és $\varphi \in L_+$ olyan, hogy $\varphi \le f$. Ekkor

$$\varphi = \chi_{[\varphi \neq 0]} \cdot \varphi = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \chi_{[\varphi > 1/n]} \cdot \varphi \le \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \chi_{[\varphi>1/n]} \cdot f$$

következésképpen $m(\varphi) \le m_l(f)$. Ha m normális, akkor ebből következik, hogy $m(f) \le m_l(f)$.

107. Állítás *Legyen (T,L) Stone-tulajdonságú mérhető tér, m integrál (T,L). Ekkor*

$$m_L = m_l \ .$$

Bizonyítás Legyen $f \in \mathcal{F}_+(T)$, és $\varphi \in L_+$. Ekkor

$$\chi_{[\varphi>0]} \cdot f = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \chi_{[\varphi>1/n]} \cdot f \ ,$$

így, mivel $[\varphi > 1/n] \in \mathcal{R}(T,L)$,

$$m\big(\chi_{[\varphi>0]} \cdot f\big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m\big(\chi_{[\varphi>1/n]} \cdot f\big) = \sup_{E\in\mathcal{R}(T,L)} m\big(\chi_E \cdot f\big) \le m_L(f) \ ,$$

tehát $m_l(f) \le m_L(f)$.

Legyen $E \in \mathcal{R}(T,L) \subset \mathcal{R}(T,L,m)$, ekkor létezik $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ L_+-beli sorozat, mely az N m-eltűnő halmazon kívül χ_E-hez konvergál. $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$g_n := \bigwedge_{k \ge n} \varphi_k \ .$$

Ekkor $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő sorozat, $t \in E \setminus N$ esetén $\sup_{n\in\mathbb{N}} g_n(t) = 1$, következésképpen $E \setminus N \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [g_n \ge 1/2]$, így

$$E \subset \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [g_n \ge 1/2]\Big) \cup N \ ,$$

ezért

$$m\Big(\chi_E \cdot f\Big) \le \sup_{n\in\mathbb{N}} m\Big(\chi_{[g_n \ge 1/2]} \cdot f\Big) \le \sup_{n\in\mathbb{N}} m\Big(\chi_{[\varphi_n > 0]} \cdot f\Big) \le \mu_l(f) \ ,$$

tehát $m_L(f) \le m_l(f)$.

Következmény Legyen (T,L) Stone-tulajdonságú, és $\mu \in \mathcal{N}_+(T,L)$. Ekkor

$$(\mu^*)_L = \mu^\bullet \ .$$

8. Fejezet

$\mathcal{L}^p$-terek duálisa

8.1 $\mathcal{L}^p$-beli elemek félnormája

Lemma *Legyen F normált tér $\mathbb{K}$ felett, $z{\in}F$, $c{\in}\mathbb{R}_+$, és $\varepsilon{>}0$. Ekkor létezik $\Lambda{\in}F'$ úgy, hogy $\|\Lambda\|{=}c$ és*

$$\Lambda(z) \geq (1{-}\varepsilon)\cdot\|\Lambda\|\cdot\|z\| \ .$$

Bizonyítás Elég $z{\neq}0$ és $c{>}0$ esetére bizonyítani. A Hahn–Banach-tételből következő

$$\|z\| = \sup_{\substack{\Lambda\in F'\\ \|\Lambda\|=1}} |\Lambda(z)|$$

egyenlőség szerint létezik $\Lambda_0{\in}F'$ úgy, hogy $\|\Lambda_0\|{=}1$, és

$$|\Lambda_0(z)| \geq (1{-}\varepsilon)\cdot\|z\| \ .$$

Létezik $\eta{\in}\mathbb{T}$ úgy, hogy $|\Lambda_0(z)|{=}\eta\cdot\Lambda_0(z)$. Legyen $\Lambda{:=}c\cdot\eta\cdot\Lambda_0$, ekkor $\|\Lambda\|{=}c$ és

$$\Lambda(z) = c\cdot\eta\cdot\Lambda_0(z) = c\cdot|\Lambda_0(z)| \geq (1{-}\varepsilon)\cdot c\cdot\|z\| = (1{-}\varepsilon)\cdot\|\Lambda\|\cdot\|z\| \ .$$

108. Állítás *Legyen $p,q{>}1$ úgy, hogy $\dfrac{1}{p}{+}\dfrac{1}{q}{=}1$; m integrál, p-integrál és q-integrál a Stone-tulajdonságú (T,L) mérhető tér felett, F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, $f{\in}\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$. Ekkor*

$$m_p(f) = \sup_{\substack{g\in\mathcal{L}^q_{F'}(T,L,m)\\ m_q(g)\leq 1}} \left|\int g(f)dm\right| \ .$$

Bizonyítás Legyen $\varepsilon{>}0$ rögzített.

Legyen először $f{\in}\mathcal{E}(T,\mathcal{R}(T,L)){\otimes}F$ úgy, hogy $m_p(f){\neq}0$; legyen $(E_k)_{1\leq k\leq n}$ diszjunkt $\mathcal{R}(T,L)$-beli, $(z_k)_{1\leq k\leq n}$ F-beli rendszer úgy, hogy

$$f = \sum_{k=1}^{n} \chi_{E_k}{\otimes}z_k \ .$$

$1{\leq}k{\leq}n$ esetén az előző lemma szerint létezik $\Lambda_k{\in}F'$ úgy, hogy $\|\Lambda_k\|{=}\|z_k\|^{p/q}$, és $\Lambda_k(z_k){\geq}(1{-}\varepsilon){\cdot}\|\Lambda_k\|{\cdot}\|z_k\|{=}(1{-}\varepsilon){\cdot}\|z_k\|^p$. Ekkor

$$g := \frac{1}{m_p(f)^{p/q}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\chi_{E_k}{\otimes}\Lambda_k \in \mathcal{E}(T,\mathcal{R}(T,L)){\otimes}F' \subset \mathcal{L}^q_{F'}(T,L,m)\ ,$$

egyszerűen látható, hogy $m_q(g){=}1$, és

$$\begin{aligned}\int g(f)dm = \frac{1}{m_p(f)^{p/q}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\Lambda_k(z_k){\cdot}m(E_k) \geq \\ \geq (1{-}\varepsilon){\cdot}\frac{1}{m_p(f)^{p/q}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\|z_k\|^p{\cdot}m(E_k) = \\ = (1{-}\varepsilon){\cdot}\frac{m_p(f)^p}{m_p(f)^{p/q}} = (1{-}\varepsilon){\cdot}m_p(f)\ .\end{aligned}$$

Legyen most $f{\in}\mathcal{L}^p_F(T{,}L,m)$, hogy $m_p(f){\neq}0$. Ekkor létezik $f_1{\in}\mathcal{E}(T,\mathcal{R}(T{,}L)){\otimes}F$ úgy, hogy $m_p(f_1){\neq}0$ és $m_p(f{-}f_1){\leq}\varepsilon$. Továbbá, létezik $g{\in}\mathcal{E}(T,\mathcal{R}(T,L)){\otimes}F'$ úgy, hogy $m_q(g){=}1$ és

$$\int g(f_1)dm \geq (1{-}\varepsilon){\cdot}m_p(f_1)\ .$$

Továbbá,

$$\left|\int g(f{-}f_1)dm\right| \leq m_p(f{-}f_1){\cdot}m_q(g) \leq \varepsilon$$

miatt

$$\begin{aligned}\left|\int g(f)dm\right| \geq \int g(f_1)dm - \varepsilon \geq (1{-}\varepsilon){\cdot}m_p(f_1) - \varepsilon \geq \\ \geq (1{-}\varepsilon){\cdot}(m_p(f){-}\varepsilon) - \varepsilon = m_p(f) - \varepsilon{\cdot}(m_p(f){+}2{-}\varepsilon)\ .\end{aligned}$$

Ha $f{\in}\mathcal{L}^p_F(T{,}L,m)$ olyan, hogy $m_p(f){=}0$, akkor f m-majdnem mindenütt nulla, következésképpen minden $g{\in}\mathcal{L}^p_{F'}(T,L,m)$ esetén $g(f)$ m-majdnem mindenütt nulla, így

$$\int g(f)dm = 0\ .$$

Megjegyzés Tulajdonképpen azt bizonyítottuk, hogy

$$m_p(f) = \sup_{\substack{g\in\mathcal{E}(T,\mathcal{R}(T,L))\otimes F'\\ m_q(g)\leq 1}}\left|\int g(f)dm\right|\ .$$

Megjegyzés Legyen m integrál a Stone-tulajdonságú (T,L) mérhető tér felett, F,G és H Banach-terek, $b{:}F{\times}G{\to}H$ folytonos $\mathbb{R}$-bilineáris leképezés.

Ha $f{\in}\mathcal{L}^1_F(T,L,m)$ és $g{\in}\mathcal{E}(T,\mathcal{R}(T,L)){\otimes}G$, akkor $b{\circ}(f,g){\in}\mathcal{L}^1_H(T,L,m)$, és

$$\left\|\int b{\circ}(f,g)dm\right\| \leq \|b\|{\cdot}m_1(f){\cdot}m_\infty(g) \ .$$

Ugyanis, ha $(E_k)_{1\leq k\leq n}$ diszjunkt $\mathcal{R}(T,L)$-beli, $(g_k)_{1\leq k\leq n}$ G-beli rendszer úgy, hogy

$$g = \sum_{k=1}^n \chi_{E_k}{\cdot}g_k \ ,$$

akkor minden $k{=}1,\ldots,n$ esetén $b{\circ}(f,g_k){\in}\mathcal{L}^1_H(T,L,m)$, és

$$b{\circ}(f,g) = \sum_{k=1}^n \chi_{E_k}{\cdot}b{\circ}(f,g_k)$$

a 94. állítás szerint (T,L,m)-integrálható, és

$$\|b{\circ}(f,g)\| \leq \|b\|{\cdot}\|f\|{\cdot}\|g\| \leq \|b\|{\cdot}\|f\|{\cdot}m_\infty(g) \ .$$

109. Állítás *Legyen m integrál a Stone-tulajdonságú (T,L) mérhető tér felett, F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, $f{\in}\mathcal{L}^1_F(T,L,m)$. Ekkor*

$$m_1(f) = \sup_{\substack{g\in\mathcal{E}(T,\mathcal{R}(T,L))\otimes F' \\ m_\infty(g)\leq 1}} \left|\int g(f)dm\right| \ .$$

Bizonyítás Legyen $\varepsilon{>}0$ rögzített.

Legyen először $f{\in}\mathcal{E}(T,\mathcal{R}(T,L)){\otimes}F$ úgy, hogy $m_1(f){\neq}0$; legyen $(E_k)_{1\leq k\leq n}$ diszjunkt $\mathcal{R}(T,L)$-beli, $(z_k)_{1\leq k\leq n}$ F-beli rendszer úgy, hogy

$$f = \sum_{k=1}^n \chi_{E_k}{\otimes}z_k \ .$$

$1{\leq}k{\leq}n$ esetén a rész elején szereplő lemma szerint létezik $\Lambda_k{\in}F'$ úgy, hogy $\|\Lambda_k\|{=}1$, és $\Lambda_k(z_k){\geq}(1{-}\varepsilon){\cdot}\|\Lambda_k\|{\cdot}\|z_k\|{=}(1{-}\varepsilon){\cdot}\|z_k\|$. Ekkor

$$g := \sum_{k=1}^n \chi_{E_k}{\otimes}\Lambda_k \in \mathcal{E}(T,\mathcal{R}(T,L)){\otimes}F' \ ,$$

egyszerűen látható, hogy $m_\infty(g){=}1$, és

$$\int g(f)dm = \sum_{k=1}^n \Lambda_k(z_k){\cdot}m(E_k) \ \geq \ (1{-}\varepsilon){\cdot}\sum_{k=1}^n \|z_k\|{\cdot}m(E_k) \ = \ (1{-}\varepsilon){\cdot}m_1(f) \ .$$

Innentől a bizonyítás ugyanúgy megy, mint az előző állítás bizonyítása.

8.2 $\mathcal{L}^p$-terek duálisa korlátos integrálokra

110. Állítás *Legyen m korlátos integrál a Stone-tulajdonságú (T,L) mérhető tér felett, melyre még $L{\cdot}L{\subset}L{\subset}\mathcal{F}^b(T,\mathbb{R})$ is teljesül, $p,q{>}1$ úgy, hogy $\frac{1}{p}{+}\frac{1}{q}{=}1$, $L_+^p{\subset}L_+$, $L_+^q{\subset}L_+$,*

$$u : \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p(T,L,m) \to \mathbb{R}$$

folytonos lineáris leképezés. Ekkor létezik $g{\in}\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^q(T,L,m)$ úgy, hogy minden $f{\in}\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p(T,L,m)$ esetén

$$u(f) = \int f{\cdot}g\,dm \ ,$$

emellett $\|u\|{=}m_q(g)$ is teljesül.

Bizonyítás (1) Legyen $\mathfrak{L}{:=}\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p(T,L,m){\cap}\mathcal{F}^b(T,\mathbb{R})$, ekkor $\mathfrak{L}$ vektorháló T felett, és mivel m korlátos integrál (T,L) felett, így $1{\in}\mathfrak{L}$, következésképpen $(T,\mathfrak{L})$ olyan mérhető tér, mely felett minden integrál korlátos. Továbbá, $\mathfrak{L}{\cdot}\mathfrak{L}{\subset}\mathfrak{L}{\subset}\mathcal{F}^b(T,\mathbb{R})$ teljesül a 92. állítás 1. következménye szerint. Ismét m korlátossága miatt $\mathfrak{L}{\subset}\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(T,L,m)$ miatt m integrál a $(T,\mathfrak{L})$ mérhető tér felett, mely az előzőek szerint korlátos.

Legyen $\nu{:=}u|_{\mathfrak{L}}$. Ekkor $f{\in}\mathfrak{L}_+$ és $g{\in}\mathfrak{L}$, $|g|{\le}f$ esetén

$$|\nu(g)| = |u(g)| \le \|u\|{\cdot}m_p(g) \le \|u\|{\cdot}m_p(f)$$

miatt ν relatív korlátos, és

$$|\nu|(f) \le \|u\|{\cdot}m_p(f) \ .$$

Ebből az egyenlőtlenségből pedig a Beppo Levi-tétel segítségével kapjuk, hogy $\nu{\in}\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(T,\mathfrak{L})$.

Legyen $n_\pm$ két olyan integrál $(T,\mathfrak{L})$ felett, hogy

$$n_\pm\big|_{\mathfrak{L}_+} = \nu^\pm\big|_{\mathfrak{L}_+} \ .$$

Ekkor $E{\subset}T$, $m(E){=}0$ esetén $\chi_E{\in}\mathfrak{L}_+$, így

$$n_\pm(E) = \nu^\pm(E) \le \|u\|{\cdot}m_p(\chi_E) = 0 \ ,$$

tehát $n_\pm{\ll}m$. A korlátos integrálokra vonatkozó Lebesgue–Radon–Nykodim-tétel szerint létezik $0{\le}g_\pm{\in}\mathcal{L}_{\mathbb{R},loc}^1(T,\mathfrak{L},m){\cap}\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(T,\mathfrak{L},m)$ úgy, hogy minden $f{\in}\mathfrak{L}_+$ esetén

$$\int\limits_{(T,\mathfrak{L})} f{\cdot}g_\pm\,dm = n_\pm(f) = \nu^\pm(f) \ .$$

Legyen $g{:=}g_+{-}g_-{\in}\mathcal{L}_{\mathbb{R},loc}^1(T,\mathfrak{L},m){\cap}\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(T,\mathfrak{L},m)$. Ekkor minden $f{\in}\mathfrak{L}_+$ esetén $f{\cdot}g{\in}\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(T,\mathfrak{L},m)$, és

$$\int\limits_{(T,\mathfrak{L})} f{\cdot}g\,dm = \int\limits_{(T,\mathfrak{L})} f{\cdot}g_+\,dm - \int\limits_{(T,\mathfrak{L})} f{\cdot}g_-\,dm = n_+(f) - n_-(f) =$$

$$= \nu^+(f) - \nu^-(f) = \nu(f) = u(f) \ .$$

(2) Most megmutatjuk, hogy

$$\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathfrak{L},m)\cap\mathcal{F}^b(T,\mathbb{R}) = \mathfrak{L} \ .$$

Ugyanis, a ($\supset$) tartalmazás triviális, ha pedig $f\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathfrak{L},m)\cap\mathcal{F}^b(T,\mathbb{R})$, akkor létezik $\mathfrak{L}$-beli sorozat, mely m-majdnem mindenütt f-hez konvergál. Az

$$m_p(f) \leq |||f|||\cdot m_p(T) < +\infty$$

egyenlőtlenség és a Beppo Levi-tétel 5. következménye szerint $f\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$, így $f\in\mathcal{F}^b(T,\mathbb{R})$ miatt $f\in\mathfrak{L}$.

(3) Megmutatjuk, hogy

$$\mathfrak{L} \subset \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)\cap\mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(T,L,m) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$$

Ugyanis, ha $f\in\mathfrak{L}$, akkor $f\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$ miatt létezik L-beli sorozat, mely m-majdnem mindenütt f-hez konvergál. Az

$$m_q(f) \leq |||f|||\cdot m_q(T) < +\infty$$

egyenlőtlenség és a Beppo Levi-tétel 5. következménye szerint $f\in\mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(T,L,m)$.

(4) Megmutatjuk, hogy minden $f\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$ esetén $f\cdot g\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathfrak{L},m)$, és

$$\int_{(T,\mathfrak{L})} f\cdot g\,dm = u(f) \ .$$

Elég $f\geq 0$ esetére bizonyítani. Legyen $n\in\mathbb{N}$ esetén $f_n{:=}f\wedge n$, ekkor $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathfrak{L}_+$-beli monoton növő sorozat, mely f-hez konvergál, így a Beppo Levi-tétel szerint $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál f-hez m_p szerint, így $(u(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál $u(f)$-hez. $n\in\mathbb{N}$ esetén $f_n\cdot g_\pm\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathfrak{L},m)$, $(f_n\cdot g_\pm)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton nőve konvergál $f\cdot g_\pm$-hez, és

$$\int_{(T,\mathfrak{L})} f_n\cdot g_\pm\,dm \leq \|u\|\cdot m_p(f_n) \leq \|u\|\cdot m_p(f) < +\infty \ ,$$

így a Beppo Levi-tétel szerint $f\cdot g_\pm\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathfrak{L},m)$, és

$$\int_{(T,\mathfrak{L})} f\cdot g_\pm\,dm = \lim_n \int_{(T,\mathfrak{L})} f_n\cdot g_\pm\,dm = \lim_n \nu^\pm(f_n) \ .$$

Következésképpen $f\cdot g{=}f\cdot g_+{-}f\cdot g_-\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathfrak{L},m)$, és

$$\int_{(T,\mathfrak{L})} f\cdot g\,dm = \lim_n \nu(f_n) = \lim_n u(f_n) = u(f) \ .$$

(5) Megmutatjuk, hogy $f\in\mathfrak{L}_+$, $f\leq|g|$ esetén $m_q(f)\leq\|u\|$. Ugyanis, legyen

$$\varphi := \chi_{[g>0]} - \chi_{[g\leq 0]} \ .$$

Ekkor $\varphi\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathfrak{L},m)\cap\mathcal{F}^b(T,\mathbb{R})=\mathfrak{L}$. Továbbá, $f^q=f^{(q-1)\cdot p}\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$ miatt $f^{q-1}\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$, így $f^{q-1}\cdot\varphi\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$, következésképpen

$$m(f^q)=m(f^{q-1}\cdot f)\le m(f^{q-1}\cdot|g|)=m(f^{q-1}\cdot\varphi\cdot g)=\int\limits_{(T,\mathfrak{L})} f^{q-1}\cdot\varphi\cdot g\,dm=$$
$$=u(f^{q-1}\cdot\varphi)\le\|u\|\cdot m_p(f^{q-1}\cdot\varphi)=\|u\|\cdot m_p(f^{q-1})=\|u\|\cdot m(f^q)^{1/p}\ ,$$

ennek mindkét oldalát elosztva $m(f^q)^{1/p}$-nel kapjuk, hogy

$$m(f^q)^{1/q}\le\|u\|\ .$$

(6) $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$g_n:=(g\wedge n)\vee(-n)\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathfrak{L},m)\cap\mathcal{F}^b(T,\mathbb{R})=\mathfrak{L}\ ,$$

nyilvánvaló, hogy $g_n^\pm\le|g_n|\le|g|$, és $(g_n^\pm)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton nőve tart $g^\pm$-hoz. Az előző pont szerint $m_q(g_n^\pm)\le\|u\|$, így a Beppo Levi-tétel szerint $g^\pm\in\mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(T,L,m)$, és $(g_n^\pm)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál $g^\pm$-hoz m_q szerint, így $g=g^+-g^-\in\mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(T,L,m)$, és $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál g-hez m_q szerint, $(|g_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál $|g|$-hez m_q szerint, speciálisan

$$m_q(g)=m_q(|g|)=\lim_n m_q(|g_n|)\le\|u\|\ .$$

(7) $L\subset\mathfrak{L}$ miatt $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)\subset\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathfrak{L},m)$ teljesül, így $f\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$ esetén az $f\cdot g\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$ függvényre

$$u(f)=\int\limits_{(T,\mathfrak{L})} f\cdot g\,dm=\int\limits_{(T,L)} f\cdot g\,dm$$

igaz, és $|u(f)|\le m_p(f)\cdot m_q(g)$ miatt $\|u\|\le m_q(g)$.

111. Állítás *Legyen m korlátos integrál a Stone-tulajdonságú (T,L) mérhető tér felett, melyre még $L\cdot L\subset L\subset\mathcal{F}^b(T,\mathbb{R})$ is teljesül,*

$$u:\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)\to\mathbb{R}$$

folytonos lineáris leképezés. Ekkor létezik $g\in\mathcal{F}^\infty_{\mathbb{R}}(T,m)\cap\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$ úgy, hogy minden $f\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$ esetén

$$u(f)=\int f\cdot g\,dm\ ,$$

emellett $\|u\|=m_\infty(g)$ is teljesül.

Bizonyítás Az előző állítás bizonyításának (1)(2)(3) és (4) pontja megismételhető a $p:=1$ és $q:=\infty$ helyettesítéssel a jelen esetben is.

(5) Megmutatjuk, hogy

$$\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)=\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathfrak{L},m)$$

Ugyanis, $L\subset\mathfrak{L}$ miatt $(\subset)$, $\mathfrak{L}\subset\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$ miatt pedig $(\supset)$ triviális.

(6) Legyen $c{>}0$. Mivel $g{\in}\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$, és m korlátos integrál (T,L) felett, a $[|g|{>}c]$ halmaz (T,L,m)-integrálható, és a

$$\varphi := \chi_{[g>0]} - \chi_{[g\leq 0]}$$

függvény is az, következésképpen $\varphi{\cdot}\chi_{[|g|>c]}{\in}\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$, így

$$u\big(\varphi{\cdot}\chi_{[|g|>c]}\big) \;=\; \int \chi_{[|g|>c]}{\cdot}\varphi{\cdot}g\,dm \;=\; \int \chi_{[|g|>c]}{\cdot}|g|\,dm \;\geq\; c{\cdot}m([|g|{>}c]) \;,$$

ugyanakkor

$$u\big(\varphi{\cdot}\chi_{[|g|>c]}\big) \leq \|u\|{\cdot}m\big(\chi_{[|g|>c]}{\cdot}\varphi\big) \leq \|u\|{\cdot}m([|g|{>}c]) \;,$$

így

$$0 \leq (\|u\|{-}c){\cdot}m([|g|{>}c]) \;,$$

amiből látszik, hogy $\|u\|{<}c$ esetén $m([|g|{>}c]){=}0$, így $m_\infty(g){<}c$, következésképpen $m_\infty(g){\leq}\|u\|$. Ebből speciálisan az is látszik, hogy $g{\in}\mathcal{F}^\infty_{\mathbb{R}}(T,m)$.

(7) $f{\in}\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$ esetén az

$$|u(f)| \leq m_1(f){\cdot}m_\infty(g)$$

egyenlőtlenségből következik, hogy $\|u\|{\leq}m_\infty(g)$.

8.3 $\mathcal{L}^p$-terek duálisa moderáns integrálokra

Megjegyzés Legyen m p-integrál a (T,L) mérhető tér felett, $E{\subset}T$ lokálisan (T,L,m)-integrálható halmaz, F Banach-tér. Ekkor $f{\in}\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$ esetén $\chi_E{\cdot}f$ ${\in}\mathcal{L}^p_F(T,L,\chi_E{\cdot}m)$. Ugyanis, $\chi_E{\cdot}m{\leq}m$ miatt $f{\in}\mathcal{L}^p_F(T,L,\chi_E{\cdot}m)$, és

$$f - \chi_E{\cdot}f = \chi_{T\setminus E}{\cdot}f$$

$\chi_E{\cdot}m$-eltűnő, így $\chi_E{\cdot}f{=}f{-}(f{-}\chi_E{\cdot}f){\in}\mathcal{L}^p_F(T,L,\chi_E{\cdot}m)$. Speciálisan, ha (T,L) Stone-tulajdonságú, vagy $L{\cdot}L{\subset}L$ teljesül, akkor $E{\in}\mathcal{R}(T,L,m)$ esetén E lokálisan (T,L,m)-integrálható, így a fentiek teljesülnek.

Megjegyzés Ha m integrál a Stone-tulajdonságú (T,L) mérhető tér felett, melyre még $L^p_+{\subset}L_+$ is teljesül, $f{\in}\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$, akkor minden $E{\in}\mathcal{R}(T,L,m)$ esetén $E{\cap}[f{>}0]{\in}\mathcal{R}(T,L,m)$. Ez egyszerűen annak következménye, hogy $[f{>}0]$ előáll (T,L,m)-integrálható halmazok monoton növő sorozatának uniójaként.

Lemma *Legyen m integrál a (T,L) mérhető tér felett, melyre $L^p_+{\subset}L_+$ teljesül, F Banach-tér, $f{\in}\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$, $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{R}(T,L,m)$-beli diszjunkt sorozat úgy, hogy $T{=}\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Ekkor a $(\chi_{E_n}{\cdot}f)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat összegezhető és $f{=}\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\chi_{E_n}{\cdot}f$ az $\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$ térben, és*

$$m_p(f) = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}}\Big(m_p\big(\chi_{E_n}{\cdot}f\big)\Big)^p\right)^{1/p} \;.$$

Bizonyítás $n\in\mathbb{N}$ esetén $\chi_{E_n}\cdot f\in\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$. Legyen $n\in\mathbb{N}$. Ekkor $k=0,\dots,n$ esetén $\chi_{E_k}\cdot\|f\|^p\in\mathcal{L}^1_F(T,L,m)$, így

$$\sum_{k=0}^{n}\Big(m_p\big(\chi_{E_k}\cdot f\big)\Big)^p=\sum_{k=0}^{n}m\big(\chi_{E_k}\cdot\|f\|^p\big)=m\Big(\sum_{k=0}^{n}\chi_{E_k}\cdot\|f\|^p\Big)\le m(\|f\|^p)\qquad(*)$$

Mivel $f=\sum_{n\in\mathbb{N}}\chi_{E_n}\cdot f$ pontonként, a Lebesgue-tétel szerint

$$f=\sum_{n\in\mathbb{N}}\chi_{E_n}\cdot f$$

$\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$-ben, és

$$m_p(f)=\Big(m\Big(\sum_{k=0}^{n}\chi_{E_k}\cdot\|f\|^p\Big)\Big)^{1/p}\le\Big(\sum_{k=0}^{n}m\big(\chi_{E_k}\cdot\|f\|^p\big)\Big)^{1/p}=$$

$$=\Big(\sum_{k=0}^{n}m_p\big(\chi_{E_k}\cdot f\big)^p\Big)^{1/p}$$

a fordított egyenlőtlenség pedig $(*)$-ból következik.

Definíció Azt mondjuk, hogy az m integrál a (T,L) mérhető tér felett *moderáns*, ha T előáll megszámlálható sok (T,L,m)-integrálható halmaz uniójaként.

112. Állítás *Legyen m moderáns integrál a Stone-tulajdonságú (T,L) mérhető tér felett, melyre $L\cdot L\subset L\subset\mathcal{F}^b(T,\mathbb{R})$ teljesül, $p,q>1$ úgy, hogy $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $L^p_+\subset L_+$, $L^q_+\subset L_+$,*

$$u:\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)\to\mathbb{R}$$

folytonos lineáris leképezés. Ekkor létezik $g\in\mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(T,L,m)$ úgy, hogy minden $f\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$ esetén

$$u(f)=\int f\cdot g\,dm\ ,$$

emellett $\|u\|=m_q(g)$ is teljesül.

Bizonyítás Legyen $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (T,L,m)-integrálható halmazok diszjunkt sorozata úgy, hogy $T=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n$. Ekkor $n\in\mathbb{N}$ esetén $\chi_{E_n}\cdot m$ korlátos integrál, és az

$$u_n:\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,\chi_{E_n}\cdot m)\to\mathbb{R}\ ,\ f\mapsto u\big(\chi_{E_n}\cdot f\big)$$

leképezés folytonos lineáris, következésképpen létezik $g_n\in\mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(T,L,\chi_{E_n}\cdot m)$ úgy, hogy minden $f\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,\chi_{E_n}\cdot m)$ esetén

$$u_n(f)=\int f\cdot g_n\,d\big(\chi_{E_n}\cdot m\big)\ .$$

$f{\in}\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$ esetén $\chi_{E_n}{\cdot}f{\in}\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,\chi_{E_n}{\cdot}m)$, így $\chi_{E_n}{\cdot}f{\cdot}g_n{\in}\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,\chi_{E_n}{\cdot}m)$, és

$$\int\chi_{E_n}{\cdot}f{\cdot}g_n\,d\big(\chi_{E_n}{\cdot}m\big)=u_n\big(\chi_{E_n}{\cdot}f\big)=u\big(\chi_{E_n}{\cdot}f\big)\ ,$$

valamint $\chi_{E_n}{\cdot}f{\in}\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$, így $\chi_{E_n}{\cdot}f{\cdot}g_n{\in}\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$, és

$$\int\chi_{E_n}{\cdot}f{\cdot}g_n\,dm=\int\chi_{E_n}{\cdot}f{\cdot}g_n\,d\big(\chi_{E_n}{\cdot}m\big)=u\big(\chi_{E_n}{\cdot}f\big)\ .$$

Legyen

$$g:=\sum_{n\in\mathbb{N}}\chi_{E_n}{\cdot}g_n\ ,$$

ekkor $n{\in}\mathbb{N}$ esetén $\chi_{E_n}{\cdot}g_n{\in}\mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(T,L,m)$, és

$$\sum_{k=0}^{n}\big(m_q\big(\chi_{E_k}{\cdot}g_k\big)\big)^q=\sum_{k=0}^{n}m\big(\chi_{E_k}{\cdot}|g_k|^q\big)=\sum_{k=0}^{n}m\big(\chi_{E_k}{\cdot}|g_k|^{q-1}{\cdot}|g_k|\big)=(*)$$

Legyen k=0, … ,n esetén

$$\varphi_k:=\chi_{[g_k>0]}-\chi_{[g_k<0]}$$

Ekkor

$$(\chi_{E_k}{\cdot}|g_k|^{q-1})^p=\big(\chi_{E_k}{\cdot}|g_k|\big)^q\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)\ ,$$

következésképpen $\chi_{E_k}{\cdot}|g_k|^{q-1}{\in}\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$, így

$$\chi_{[g_k>0]}{\cdot}\chi_{E_k}{\cdot}|g_k|^{q-1}=\chi_{[g_k>0]\cap E_k}{\cdot}|g_k|^{q-1}\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)\ ,$$

hasonlóan $[g_k{<}0]$ esetén, következésképpen

$$\chi_{E_k}{\cdot}|g_k|^{q-1}{\cdot}\varphi_k\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)\ .$$

Tehát

$$\begin{aligned}(*)&=\sum_{k=0}^{n}m\big(\chi_{E_k}{\cdot}|g_k|^{q-1}{\cdot}\varphi_k{\cdot}g_k\big)=u\Big(\sum_{k=0}^{n}\chi_{E_k}{\cdot}|g_k|^{q-1}{\cdot}\varphi_k\Big)\le\\&\le\|u\|{\cdot}m_p\Big(\sum_{k=0}^{n}\chi_{E_k}{\cdot}|g_k|^{q-1}{\cdot}\varphi_k\Big)=\|u\|{\cdot}m_p\Big(\sum_{k=0}^{n}\chi_{E_k}{\cdot}|g_k|^{q-1}\Big)=\\&=\|u\|{\cdot}\Big(m\Big(\sum_{k=0}^{n}\chi_{E_k}{\cdot}|g_k|^{q}\Big)\Big)^{1/p}=\|u\|{\cdot}\Big(\sum_{k=0}^{n}\big(m_q\big(\chi_{E_k}{\cdot}g_k\big)\big)^q\Big)^{1/p}\ .\end{aligned}$$

Az egyenlőltenséget az $\|u\|$ jobb oldalon álló szorzótényezőjével végigosztva kapjuk, hogy

$$\Big(\sum_{k=0}^{n}\big(m_q\big(\chi_{E_k}{\cdot}g_k\big)\big)^q\Big)^{1/q}\le\|u\|\ ,$$

így a megszámlálható konvexitás tétele szerint

$$m(|g|^q) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} m\big(\chi_{E_k}\cdot|g_k|^q\big) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \big(m_q\big(\chi_{E_k}\cdot g_k\big)\big)^q \leq \|u\|^q \ ,$$

következésképpen $g\in\mathcal{F}^q_{\mathbb{R}}(T,m)$, így a Beppo Levi-tétel 5. következménye szerint $g\in\mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(T,L,m)$, és még $m_q(g)\leq\|u\|$ is teljesül.

$f\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$ esetén

$$f\cdot g = \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{E_n}\cdot f\cdot g_n$$

pontonként is, $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$-ben is, így

$$\int f\cdot g\,dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int \chi_{E_n}\cdot f\cdot g_n\,dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} u\big(\chi_{E_n}\cdot f\big) = u\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{E_n}\cdot f\Big) = u(f)$$

igaz, és $|u(f)| \leq m_p(f)\cdot m_q(g)$ miatt $\|u\|\leq m_q(g)$.

113. Állítás *Legyen m moderáns integrál a Stone-tulajdonságú (T,L) mérhető tér felett, melyre $L\cdot L\subset L\subset\mathcal{F}^b(T,\mathbb{R})$ teljesül,*

$$u : \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m) \to \mathbb{R}$$

folytonos lineáris leképezés. Ekkor létezik $g\in\mathcal{F}^\infty_{\mathbb{R}}(T,m)$, mely előáll $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$-beli sorozat pontonkénti limeszeként úgy, hogy minden $f\in\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$ esetén $f\cdot g\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$, és

$$u(f) = \int f\cdot g\,dm \ ,$$

emellett $\|u\|=m_\infty(g)$ is teljesül.

Bizonyítás Legyen $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (T,L,m)-integrálható halmazok diszjunkt sorozata úgy, hogy $T=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Ekkor $n\in\mathbb{N}$ esetén $\chi_{E_n}\cdot m$ korlátos integrál, és az

$$u_n : \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,\chi_{E_n}\cdot m) \to \mathbb{R} \ , \ f \mapsto u\big(\chi_{E_n}\cdot f\big)$$

leképezés folytonos lineáris, így létezik $g_n\in\mathcal{F}^\infty_{\mathbb{R}}(T,\chi_{E_n}\cdot m)\cap\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,\chi_{E_n}\cdot m)$ úgy, hogy minden $f\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,\chi_{E_n}\cdot m)$ esetén

$$u_n(f) = \int f\cdot g_n\,d\big(\chi_{E_n}\cdot m\big) \ .$$

$f\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$ esetén $\chi_{E_n}\cdot f\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,\chi_{E_n}\cdot m)$, így $\chi_{E_n}\cdot f\cdot g_n\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,\chi_{E_n}\cdot m)$, és

$$\int \chi_{E_n}\cdot f\cdot g_n\,d\big(\chi_{E_n}\cdot m\big) = u_n\big(\chi_{E_n}\cdot f\big) = u\big(\chi_{E_n}\cdot f\big) \ ,$$

valamint $\chi_{E_n}\cdot f\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$, így $\chi_{E_n}\cdot f\cdot g_n\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$, és

$$\int \chi_{E_n}\cdot f\cdot g_n\,dm = \int \chi_{E_n}\cdot f\cdot g_n\,d\big(\chi_{E_n}\cdot m\big) = u\big(\chi_{E_n}\cdot f\big) \ .$$

Legyen

$$g := \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{E_n}\cdot g_n \ ,$$

ekkor a diszjunktság miatt

$$|g| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{E_n}\cdot|g_n| \ ,$$

így

$$m_\infty(g) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_\infty\big(\chi_{E_n}\cdot g_n\big) \ .$$

Azonban egyszerűen belátható, hogy $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$m_\infty\big(\chi_{E_n}\cdot g_n\big) = \big(\chi_{E_n}\cdot m\big)_\infty\big(\chi_{E_n}\cdot g_n\big) \ ,$$

tehát

$$m_\infty(g) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\big(\chi_{E_n}\cdot m\big)_\infty\big(\chi_{E_n}\cdot g_n\big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\| \le \|u\| \ ,$$

speciálisan, $g\in\mathcal{F}^\infty_\mathbb{R}(T,m)$, emellett $g = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \chi_{E_n}\cdot g_n$ pontonként, és ezen függvények mindegyike $\mathcal{L}^1_\mathbb{R}(T,L,m)$ eleme.

Legyen $f\in\mathcal{L}^1_\mathbb{R}(T,L,m)$. Ekkor

$$f = \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{E_n}\cdot f$$

pontonként is, $\mathcal{L}^1_\mathbb{R}(T,L,m)$-ben is, így

$$u(f) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u\big(\chi_{E_n}\cdot f\big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int \chi_{E_n}\cdot f\cdot g_n \, dm$$

Azonban,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} m_1\big(\chi_{E_n}\cdot f\cdot g_n\big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m_1\big(\chi_{E_n}\cdot f\cdot \chi_{E_n}\cdot g_n\big) \le$$
$$\le \sum_{n\in\mathbb{N}} m_1\big(\chi_{E_n}\cdot f\big)\cdot m_\infty\big(\chi_{E_n}\cdot g_n\big) \le \|u\|\cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} m_1\big(\chi_{E_n}\cdot f\big) = \|u\|\cdot m_1(f) \ .$$

Tehát a $\big(\chi_{E_n}\cdot f\cdot g_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat abszolút összegezhető $\mathcal{L}^1_\mathbb{R}(T,L,m)$-ben, így ezen tér teljessége miatt összegezhető, következésképpen $f\cdot g\in\mathcal{L}^1_\mathbb{R}(T,L,m)$, és

$$\int f\cdot g \, dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int \chi_{E_n}\cdot f\cdot g_n \, dm = u(f)$$

igaz, és $|u(f)| \le m_1(f)\cdot m_\infty(g)$ miatt $\|u\|\le m_\infty(g)$.

9. Fejezet

Vektor értékű függvények integrálása

A továbbiakban legyen adott (T, L) mérhető tér, $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(T, L)$, m integrál (T, L) felett, és F szeparált lokálisan konvex tér $\mathbb{K}$ felett, a következő tulajdonságokkal:

(1) ha μ valós, akkor F valós vagy komplex,

(2) ha μ nem valós, akkor F komplex, és (T, L)-re teljesül $(\mathbf{C_I})$ és $(\mathbf{C_{II}})$,

(3) $|\mu|\big|_{L_+} = m\big|_{L_+}$.

9.1 Skalárisan integrálható függvények

Definíció Az $f{:}T \to F$ függvény *skalárisan* (T, L, m)*-integrálható*, ha minden $z' \in F'$ esetén $z' \circ f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(T, L, m)$ teljesül. Jelölje $\mathcal{L}_F(T, L, m)$ a $f{:}T \to F$ skalárisan (T, L, m)-integrálható fügyvények halmazát. Ez a pontonkénti műveletekkel $\mathbb{K}$-lineáris altere F^T-nek.

A

$$\int f d(\mu, m) : F' \to \mathbb{K} \ , \ z' \mapsto \int z' \circ f d(\mu, m)$$

leképezést az f *skaláris* (μ, m)*-integráljának* nevezzük.

Megjegyzés Tehát $f \in \mathcal{L}_F(T, L, m)$ esetén $\displaystyle\int f d(\mu, m) \in F'^*$. Tudjuk, hogy ha F szeparált lokálisan konvex tér $\mathbb{K}$ felett, akkor

$$i_F : F \to F'^* \ , \ x \mapsto (z' \mapsto z'(x))$$

lineáris injekció. Szokás F-et azonosítani az $i_F\langle F\rangle \subset F'^*$ lineáris altérrel. Tehát lehetséges az, hogy

$$\int f d(\mu, m) \in F$$

teljesül, ilyenkor tehát minden $z'{\in}F'$ esetén

$$z'\left(\int f d(\mu,m)\right) = \int z'{\circ}f d(\mu,m) \ .$$

Megjegyzés Ha F Banach-tér, akkor

$$\mathcal{L}^1_F(T,L,m){\subset}\mathcal{L}_F(T,L,m) \ ,$$

és $f{\in}\mathcal{L}_F(T,L,m)$ esetén a régi értelemben vett $\int f d(\mu,m){\in}F$ vektor megegyezik az f skaláris integráljával.

Definíció Az $f{:}T{\to}F$ függvényre azt mondjuk, hogy f(t)=0 *skalárisan m-majdnem mindenütt nulla*, ha minden $z'{\in}F'$ esetén $z'(f(t)){=}0$ m-majdnem minden $t{\in}T$ esetén.

Megjegyzés Nyilvánvaló, hogy ha $f{:}T{\to}F$ skalárisan m-majdnem mindenütt nulla függvény, akkor $f{\in}\mathcal{L}_F(T,L,m)$, és

$$\int f d(\mu,m) = 0 \ .$$

Nyilvánvaló továbbá, hogy m-majdnem mindenütt nulla függvény skalárisan m-majdnem mindenütt nulla.

114. Állítás *Ha F olyan szeparált lokálisan konvex tér, hogy F' szeparábilis a $\sigma(F',F)$ topológiára nézve, és $f{:}T{\to}F$ skalárisan m-majdnem mindenütt nulla függvény, akkor f m-majdnem mindenütt nulla.*

Bizonyítás Legyen $(z'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\sigma(F',F)$-sűrű sorozat F'-ben, és $n{\in}\mathbb{N}$ esetén $T_n{:=}[z'_n{\circ}f{\neq}0]$. Ekkor $m(T_n){=}0$, következésképpen $m\Big(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} T_n\Big){=}0$, és $t{\notin}\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} T_n$ esetén $f(t){=}0$.

115. Állítás *Legyenek F és G szeparált lokálisan konvex terek $\mathbb{K}$ felett, Ekkor $u{\in}\mathcal{L}(F,G)$ és $f{\in}\mathcal{L}_F(T,L,m)$ esetén $u{\circ}f{\in}\mathcal{L}_F(T,L,m)$, és*

$$\int u{\circ}f d(\mu,m) = u'^*\Big(\int f d(\mu,m)\Big) \ .$$

9.2 Konvexitás

Megjegyzés Legyen F szeparált lokálisan konvex tér $\mathbb{K}$ felett. Lássuk el az F'^* teret a $\sigma(F'^*,F')$ topológiával. Ekkor F'^* szeparált lokálisan konvex tér $\mathbb{K}$ felett, melynek topologikus duálisa azonosul F'-vel a

$$j : F' \to (F'^*)' \ , \ z' \mapsto (p \mapsto p(z'))$$

leképezés által.

116. Állítás *Legyen $S{\subset}T$ halmaz úgy, hogy $m(T{\setminus}S){=}0$, $D{\subset}F'^*$ nem üres zárt konvet halmaz, $f{:}T{\to}F$ függvény úgy, hogy $f\langle S\rangle{\subset}D$, $0{\leq}g{\in}\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$ olyan, hogy $m(g){>}0$, és $g{\cdot}f{\in}\mathcal{L}_F(T,L,m)$. Ekkor*

$$\frac{1}{m(g)}\int g{\cdot}f dm \in D \ .$$

Bizonyítás Legyen $z'{\in}F'$ és $\alpha{\in}\mathbb{R}$ úgy, hogy $D{\subset}[\mathrm{Re}\circ j(z'){\le}\alpha]$. Ekkor $t{\in}S$ esetén $f(t){\in}[\mathrm{Re}\circ j(z'){\le}\alpha]$, következésképpen $\mathrm{Re}\circ z'{\circ}f{\le}\alpha$ m-majdnem mindenütt, így m-majdnem mindenütt

$$\mathrm{Re}\circ z'{\circ}(g{\cdot}f) = g{\cdot}\,\mathrm{Re}\circ z'{\circ}f \le \alpha{\cdot}g \ ,$$

következésképpen

$$(\mathrm{Re}\circ j(z'))\Big(\int g{\cdot}f dm\Big) = \int \mathrm{Re}\circ z'{\circ}(g{\cdot}f)dm \le \alpha{\cdot}\int gdm \ .$$

Tehát

$$\frac{1}{m(g)}\int g{\cdot}f dm \in [\mathrm{Re}\circ j(z'){\le}\alpha] \ ,$$

ebből pedig a Hahn–Banach-tétellel következik, amit állítottunk.

Következmény Legyen m korlátos integrál (T,L) felett, $S{\subset}T$ halmaz úgy, hogy $m(T\backslash S){=}0$, $f{\in}\mathcal{L}_F(T,L,m)$ úgy, hogy létezik $A{\subset}F$ $\sigma(F,F')$-kompakt konvex halmaz úgy, hogy $f\langle S\rangle{\subset}A$. Ekkor

$$\int f dm \in m(T){\cdot}A \ .$$

Bizonyítás Az állítást kell alkalmazni a $g{:=}1$, $D{:=}A$ szereposztással. Mivel a $\sigma(F'^{*},F')$ topológia által indukált altértopológia F-en megyegyezik a $\sigma(F,F')$ topológiával, így $A{\subset}F'^{*}$ $\sigma(F'^{*},F')$-kompakt, így $\sigma(F'^{*},F')$-zárt konvex halmaz.

117. Állítás *Legyen q alulról félig folytonos félnorma F felett, $f{\in}\mathcal{L}_F(T,L,m)$ olyan, hogy $\int f dm{\in}F$. Ekkor*

$$q\Big(\int f d(\mu,m)\Big) \le m(q{\circ}f) \ .$$

Bizonyítás Legyen $A'_q{:=}\{z'{\in}F'{:}|z'|{\le}q\}$, ekkor $q{=}\bigvee_{z'\in A'_q}|z'|$ teljesül a Hahn–Banch-tétel szerint. $z'{\in}A'_q$ esetén

$$\Big|z'\Big(\int f d(\mu,m)\Big)\Big| = \Big|\int z'{\circ}f d(\mu,m)\Big| \le m(|z'{\circ}f|) \le m(q{\circ}f) \ .$$

Megjegyzés Az állításban szereplő $q{\circ}f$ függvény nem feltétlenül (T,L,m)-integrálható.

Megjegyzés Ha (T,L) Stone-tulajdonságú és $f{\in}\mathcal{L}_F(T,L,m)$, akkor

$$\int f d(\mu,m) = \lim_{E\in\mathcal{R}(T,L)}\int \chi_E{\cdot}f d(\mu,m) \ .$$

a $\sigma(F'^{*},F')$-topológia szerint.

118. Állítás *Ha (T, L) Stone-tulajdonságú és $f \in \mathcal{L}_F(T, L, m)$ olyan, hogy minden $E \in \mathcal{R}(T, L)$ esetén $f\langle E\rangle$ konvex burka relatív $\sigma(F, F')$-kompakt halmaz. Ekkor*

$$\int f dm \in F'' \ .$$

(F'' jelöli a korlátos konvergencia topológiájával ellátott F' tér topologikus duálisát).

Bizonyítás $E \in \mathcal{R}(T, L)$ esetén $\chi_E \cdot m$ korlátos integrál (T, L) felett,

$$\chi_E \cdot f \in \mathcal{L}_F(T, L, m) \subset \mathcal{L}_F(T, L, \chi_E \cdot m) \ .$$

Továbbá, $\big(\chi_E \cdot m\big)(T \setminus E) = 0$ és ha K jelöli az $f\langle E\rangle$ halmaz $\sigma(F, F')$-zárt konvex burkát, akkor K $\sigma(F, F')$-kompakt konvex halmaz úgy, hogy

$$\big(\chi_E \cdot f\big)\langle E\rangle = f\langle E\rangle \subset K \ ,$$

következésképpen

$$\int \chi_E \cdot f dm = \int \chi_E \cdot f d\big(\chi_E \cdot m\big) \in F \ .$$

Legyen

$$B := \Big\{ \int \chi_E \cdot f dm : E \in \mathcal{R}(T, L) \Big\} \subset F \ .$$

$E \in \mathcal{R}(T, L)$ és $z' \in F'$ esetén

$$\Big| z'\Big(\int \chi_E \cdot f dm \Big) \Big| \leq \int \chi_E \cdot |z' \circ f| dm \leq \int |z' \circ f| dm < +\infty \ ,$$

következésképpen B $\sigma(F, F')$-korlátos, így korlátos. Az előző megjegyzés szerint $\int f dm$ eleme a B halmaz $\sigma(F'^*, F')$-lezártjának, így eleme az F'' halmaznak.

Következmény Ha (T, L) Stone-tulajdonságú, F félreflexív, és $f \in \mathcal{L}_F(T, L, m)$ olyan, hogy minden $E \in \mathcal{R}(T, L)$ esetén $f\langle E\rangle$ korlátos halmaz. Ekkor

$$\int f dm \in F \ .$$

Bizonyítás Ha $E \in \mathcal{R}(T, L)$ esetén $f\langle E\rangle$ korlátos, akkor az $f\langle E\rangle$ konvex burka is korlátos, így $\sigma(F, F')$-korlátos, ebből pedig F félreflexivitása miatt következik, hogy relatív $\sigma(F, F')$-kompakt, így az állítás szerint

$$\int f dm \in F'' = F \ .$$

119. Állítás *Legyen m korlátos integrál a Stone-tulajdonságú (T, L) mérhető tér felett, $f \in \mathcal{L}_F(T, L, m)$, és $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathcal{R}(T, L)$-beli sorozat és $B \subset F$ konvex, kiegyensúlyozott, korlátos és teljes halmaz úgy, hogy*

(1) $m\Big(T\setminus\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}E_n\Big)=0,$

(2) $f\big\langle\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}E_n\big\rangle\subset B,$

(3) minden $n\in\mathbb{N}$ *esetén* $f\langle E_n\rangle$ *prekompakt.*

Ekkor

$$\int f dm\in m(T)\cdot B\subset F\ .$$

Bizonyítás $n\in\mathbb{N}$ esetén $\chi_{E_n}\cdot m$ korlátos integrál (T,L) felett,

$$\chi_{E_n}\cdot f\in\mathcal{L}_F(T,L,m)\subset\mathcal{L}_F(T,L,\chi_{E_n}\cdot m)\ ,$$

továbbá

$$\big(\chi_{E_n}\cdot f\big)\langle E\rangle=f\langle E_n\rangle\quad\text{és}\quad\big(\chi_{E_n}\cdot m\big)(T\setminus E_n)=0\ .$$

Jelölje A_n az $f\langle E_n\rangle$ halmaz zárt, konvex, kiegyensúlyozott burkát. Ekkor A_n prekompakt, és B konvex, kiegyensúlyozott és teljes volta miatt $A_n\subset B$, továbbá B teljessége miatt A_n teljes, következésképpen kompakt, így $\sigma(F,F')$-kompakt. Legyen

$$z_n:=\int\chi_{E_n}\cdot f dm=\int\chi_{E_n}\cdot f d\big(\chi_{E_n}\cdot m\big)\in m(E_n)\cdot A_n\ .$$

Legyen $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$s_n:=\sum_{k=0}^{n}z_k=\int\chi_{\bigcup\limits_{k=0}^{n}E_k}\cdot f dm\in m(T)\cdot B\ .$$

Legyen q folytonos félnorma F felett. Ekkor $n,p\in\mathbb{N}$ esetén

$$q(s_{n+p}-s_n)=q\Big(\int\chi_{\bigcup\limits_{k=n+1}^{n+p}E_k}\cdot f dm\Big)\leq$$

$$\leq m\Big(\chi_{\bigcup\limits_{k=n+1}^{n+p}E_k}\cdot(q\circ f)\Big)\leq\sup_{z\in B}q(z)\cdot\sum_{k=n+1}^{n+p}m(E_k)\ .$$

Mivel B korlátos, így $\sup\limits_{z\in B}q(z)<+\infty$, következésképpen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat $m(T)\cdot B$-ben, így létezik határértéke ebben a halmazban, jelölje ezt s. Ekkor $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál s-hez a $\sigma(F,F')$ topológia szerint is. $z'\in F'$ esetén

$$z'(s)=\lim_n\int\chi_{\bigcup\limits_{k=0}^{n}E_k}\cdot(z'\circ f)dm\ ,$$

a Lebesgue-tétel segítségével azt kapjuk, hogy

$$z'(s)=\int(z'\circ f)dm\ ,$$

tehát

$$\int f dm=s\in m(T)\cdot B\ .$$

9.3 GDF-terek

Megjegyzés Legyen F szeparált lokálisan konvex tér $\mathbb{K}$ felett, ekkor a $\sigma(F', F)$ topológiával ellátott F' tér is szeparált lokálisan konvex tér $\mathbb{K}$ felett, jelölje ezt F'_σ. Ekkor

$$i_F : F \to (F'_\sigma)' \ , \ x \mapsto (z' \mapsto z'(x))$$

lineáris bijekció, mely által a $(F'_\sigma)'$ teret azonosítjuk F-fel, és

$$k_F : F^* \to (F'_\sigma)'^* \ , \ P \mapsto P \circ i_F^{-1}$$

is lineáris bijekció, mely által $(F'_\sigma)'^*$-ot azonosítjuk F^*-gal.

Az $f{:}T{\to}F'_\sigma$ függvény pontosan akkor skalárisan (T, L, m)-integrálható, ha minden $x{\in}F$ esetén

$$f(x) : T \to \mathbb{K} \ , \ t \mapsto f(t)(x) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(T, L, m) \ ,$$

és ekkor $\displaystyle\int f d(\mu, m){\in}F^*$ olyan, hogy minden $x{\in}F$ esetén

$$\Big(\int f d(\mu, m)\Big)(x) = \int f(x) d(\mu, m) \ .$$

Definíció Az F lokálisan konvex tér *GDF-tér*, ha minden X Banach-tér esetén minden olyan $F{\to}X$ lineáris leképezés, melynek grafikonja sorozatzárt $F{\times}X$-ben, folytonos.

Megjegyzés A zárt grafikon tétele szeint minden Fréchet-tér GDF-tér.

120. Állítás *Legyen $(F_i)_{i\in I}$ GDF-terek nem üres rendszere, F vektortér, $i{\in}I$ esetén $u_i{:}F_i{\to}F$ lineáris leképezés. Lássuk el F-et az $(F_i, u_i)_{i\in I}$ rendszer által induktívan előállított lokálisan konvex topológiával. Ekkor F GDF-tér.*

Bizonyítás Legyen X Banach-tér, és $A{:}F{\to}X$ lineáris leképezés úgy, hogy $\mathrm{Graph}(A){\subset}F{\times}X$ sorozatzárt. Ekkor $i{\in}I$ esetén

$$\mathrm{Graph}(A{\circ}u_i) = (u_i \overset{-1}{\times} \mathrm{id}_X)\langle \mathrm{Graph}(A) \rangle \ ,$$

így $u_i{\times}\,\mathrm{id}_X$ folytonossága miatt $\mathrm{Graph}(A{\circ}u_i)$ sorozatzárt, következésképpen $A{\circ}u_i$ folytonos. Az induktív topológia alaptulajdonsága szerint ebből következik, hogy A folytonos.

Következmény Ha T lokálisan kompakt tér, akkor $\mathcal{K}(T)$ az induktív topológiával GDF-tér. Ha $U{\subset}\mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, akkor $\mathcal{D}(U)$ az induktív topológiával GDF-tér.

Megjegyzés Jelölje az $(\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(T, L, m), m_1)$ teljes félnormált térhez asszociált Banach-teret $(L^1_{\mathbb{K}}(T, L, m), \|\,.\,\|_1)$, és legyen

$$\pi : \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(T, L, m) \to L^1_{\mathbb{K}}(T, L, m)$$

a kanonikus szürjekció.

121. Állítás *Legyen F szeparált GDF-tér $\mathbb{K}$ felett, és $f{\in}\mathcal{L}_{F'_\sigma}(T,L,m)$. Ekkor az*

$$F \to L^1_{\mathbb{K}}(T,L,m)\ ,\ x \mapsto \pi(f(x))$$

lineáris leképezés folytonos.

Bizonyítás Legyen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ F-beli sorozat úgy, hogy $((x_n,\pi(f(x_n))))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens $F{\times}L^1_{\mathbb{K}}(T,L,m)$-ben, és legyen

$$(x,u) := \lim_n (x_n,\pi(f(x_n)))\ .$$

Ekkor $(\pi(f(x_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat $L^1_{\mathbb{K}}(T,L,m)$-ben, így $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(T,L,m)$-ben, következésképpen létezik $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozat és $h{\in}$ $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(T,L,m)$ úgy, hogy $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergál h-hoz m_1 szerint és m-majdnem mindenütt. Ekkor $(\pi(f(x_{n_k})))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergál $\pi(h)$-hoz $\|\,.\,\|_1$ szerint, következésképpen $\pi(h){=}u$.

Mivel $\lim_k x_{n_k}{=}x$, minden $t{\in}T$ esetén $\lim_k f(t)(x_{n_k}){=}f(t)(x)$, így h és $f(x)$ m-majdnem mindenütt megegyeznek, következésképpen

$$\pi(f(x)) = \pi(h) = u\ ,$$

tehát $x{\mapsto}\pi(f(x))$ grafikonja sorozatzárt, így ezen leképezés folytonos.

122. Állítás (Gelfand–Dunford-tétel) *Legyen F szeparált GDF-tér $\mathbb{K}$ felett, és $f{\in}\mathcal{L}_{F'_\sigma}(T,L,m)$. Ekkor*

$$\int f d(\mu,m) \in F'\ .$$

Bizonyítás

$$\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(T,L,m) \to \mathbb{K}\ ,\ g \to \int g d(\mu,m)$$

folytonos lineáris leképezés, mely faktorozálható az $L^1_{\mathbb{K}}(T,L,m)$ térre, és a faktorizált is folytonos lineáris, így ezen faktorizált, és az előző állítás szerint folytonos lineáris

$$F \to L^1_{\mathbb{K}}(T,L,m)\ ,\ x \mapsto \pi(f(x))$$

leképezés kompozíciója, azaz

$$F \to \mathbb{K}\ ,\ x \mapsto \int f(x) d(\mu,m)$$

folytonos lineáris, tehát F' eleme.

10. Fejezet

Integráloperációk és vektormértékek

10.1 Integráloperációk alaptulajdonságai

Megjegyzés Jelölje $\mathcal{I}(T,L)$ a (T,L) mérhető tér feletti integrálok halmazát.

Definíció Legyen (T,L) mérhető tér. Az

$$\mathcal{M}_+(T,L) \to \mathcal{I}(T,L)\ ,\ \mu \mapsto \mu^\circ$$

leképezés *integráloperáció*, ha

(1) $\mu{\in}\mathcal{M}_+(T,L)$ esetén $\mu^\circ|_{L_+}{=}\mu|_{L_+}$,

(2) $\mu,\nu{\in}\mathcal{M}_+(T,L)$ esetén $(\mu{+}\nu)^\circ{=}\mu^\circ{+}\nu^\circ$,

(3) $\mu,\nu{\in}\mathcal{M}_+(T,L)$ esetén

$$\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,\mu^\circ){\cap}\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,\mu^\circ){=}\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,\mu^\circ{+}\nu^\circ)\ .$$

Hasonlóan, az

$$\mathcal{N}_+(T,L) \to \mathcal{I}(T,L)\ ,\ \mu \mapsto \mu^\circ$$

leképezés *normális integráloperáció*, ha

(1) $\mu{\in}\mathcal{N}_+(T,L)$ esetén μ° normális.

(2) $\mu{\in}\mathcal{N}_+(T,L)$ esetén $\mu^\circ|_{L_+}{=}\mu|_{L_+}$,

(3) $\mu,\nu{\in}\mathcal{N}_+(T,L)$ esetén $(\mu{+}\nu)^\circ{=}\mu^\circ{+}\nu^\circ$,

(4) $\mu,\nu{\in}\mathcal{N}_+(T,L)$ esetén

$$\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,\mu^\circ){\cap}\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,\mu^\circ){=}\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,\mu^\circ{+}\nu^\circ)\ .$$

123. Állítás *Ha (T,L) mérhető tér, és*

$$\mathcal{M}_+(T,L) \to \mathcal{I}(T,L)\ ,\ \mu \mapsto \mu^\circ$$

integráloperáció, akkor

(4) $\mu,\nu\in\mathcal{M}_+(T,L), \mu\leq\nu$ *esetén* $\mu^\circ\leq\nu^\circ$*,*

(5) $\mu\in\mathcal{M}_+(T,L)$ *és* $\alpha>0$ *esetén* $(\alpha\cdot\mu)^\circ=\alpha\cdot\mu^\circ$*.*

Hasonlóan, ha

$$\mathcal{N}_+(T,L)\to\mathcal{I}(T,L)\ ,\ \mu\mapsto\mu^\circ$$

normális integráloperáció, akkor

(4) $\mu,\nu\in\mathcal{N}_+(T,L), \mu\leq\nu$ *esetén* $\mu^\circ\leq\nu^\circ$*,*

(5) $\mu\in\mathcal{N}_+(T,L)$ *és* $\alpha>0$ *esetén* $(\alpha\cdot\mu)^\circ=\alpha\cdot\mu^\circ$*.*

Bizonyítás (4) $\mu\leq\nu$ esetén $\nu-\mu\in\mathcal{M}(T,L)$, így

$$\nu^\circ=(\mu+\nu-\mu)^\circ=\mu^\circ+(\nu-\mu)^\circ\geq\mu^\circ\ .$$

(5) Az additivitásból következik, hogy (5) igaz pozitív racionális számokra, ebből és a monotonitásból pedig következik, hogy minden pozitív számra.

10.2 Nevezetes integráloperációk

124. Állítás *Legyen* (T,L) *mérhető tér. Ekkor az*

$$\mathcal{M}_+(T,L)\to\mathcal{I}(T,L)\ ,\ \mu\mapsto\mu^{**}$$

leképezés integráloperáció.

Bizonyítás Legyen $\mu,\nu\in\mathcal{M}_+(T,L)$, Ekkor

$$(\mu+\nu)^{**}\big|_{L_+}=\left(\mu^{**}+\nu^{**}\right)\big|_{L_+}\ ,$$

következésképpen

$$(\mu+\nu)^{**}\geq\mu^{**}+\nu^{**}\ .$$

Legyen $g\in\overline{L}_+$, és $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ L_+-beli monoton növő sorozat úgy, hogy $f=\bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}}\varphi_n$. Ekkor

$$(\mu+\nu)^{**}(g)=\sup_{n\in\mathbb{N}}\big(\mu(\varphi_n)+\nu(\varphi_n)\big)=\sup_{n\in\mathbb{N}}\mu(\varphi_n)+\sup_{n\in\mathbb{N}}\nu(\varphi_n)=$$
$$=\mu^{**}(g)+\nu^{**}(g)\ .$$

Legyen $f\in\mathcal{F}_+(T)$. Feltehető, hogy $\mu^{**}(f)<+\infty$ és $\nu^{**}(f)<+\infty$ (ellenkező esetben nyilvánvaló, hogy $(\mu+\nu)^{**}(f)\leq\mu^{**}(f)+\nu^{**}(f)$). Legyen $h,h'\in\overline{L}_+$ olyan, hogy $f\leq h$ és $f\leq h'$, valamint $\mu^{**}(h)<+\infty$ és $\nu^{**}(h')<+\infty$ teljesülnek. Ekkor $g:=h\wedge h'\in\overline{L}_+$, és $f\leq g$, így

$$(\mu+\nu)^{**}(f)\leq(\mu+\nu)^{**}(g)=\mu^{**}(g)+\nu^{**}(g)\leq\mu^{**}(h)+\nu^{**}(h')\ ,$$

ebből pedig következik, hogy

$$(\mu+\nu)^{**}(f)\leq\mu^{**}(f)+\nu^{**}(f)\ .$$

$\mu^{**}\leq(\mu+\nu)^{**}$ és $\nu^{**}\leq(\mu+\nu)^{**}$ miatt nyilvánvaló, hogy

$$\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,(\mu+\nu)^{**}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,\mu^{**})\cap\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,\nu^{**}) \ .$$

Legyen $0\leq f\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,\mu^{**})\cap\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,\nu^{**})$. Ekkor

$$(\mu+\nu)^{**}(f) =\leq \mu^{**}(f) + \nu^{**}(f) < +\infty,$$

következésképpen létezik $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\overline{L}_+$-beli monoton fogyó sorozat úgy, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $f\leq h_n$, $(\mu+\nu)^{**}(h_n)<+\infty$, és

$$(\mu+\nu)^{**}(f) = \inf_{n\in\mathbb{N}}(\mu+\nu)^{**}(h_n) \ .$$

Ekkor $h_n\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,(\mu+\nu)^{**})$, és

$$\begin{aligned}(\mu+\nu)^{**}(h_n-f) &= \mu^{**}(h_n-f) + \nu^{**}(h_n-f) = \\ &= \mu^{**}(h_n) - \mu^{**}(f) + \nu^{**}(h_n) - \nu^{**}(f) = (\mu+\nu)^{**}(h_n) - (\mu+\nu)^{**}(f) \ ,\end{aligned}$$

a jobb oldal pedig $n\to\infty$ esetén nullához tart, így $f\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,(\mu+\nu)^{**})$.

Megjegyzés Legyen m normális integrál a (T,L) mérhető tér felett, $g\in\overline{\overline{L}}_+$ úgy, hogy $m(g)<+\infty$. Ekkor $g\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,m)$.

Ugyanis, létezik $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ L_+-beli monoton növő sorozat úgy, hogy

$$m(g) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m(\varphi_n) \ .$$

Ekkor $n\in\mathbb{N}$ esetén, mivel m $\overline{\overline{L}}_+$-on additív,

$$m(g-\varphi_n) = m(g) - m(\varphi_n) \ ,$$

a jobb oldal pedig nullához tart.

125. Állítás *Legyen* (T,L) *mérhető tér. Ekkor az*

$$\mathcal{N}_+(T,L) \to \mathcal{I}(T,L) \ , \ \mu \mapsto \mu^*$$

leképezés normális integráloperáció.

Bizonyítás Az előző megjegyzést figyelembe véve hasonló az előző állítás bizonyításához.

Lemma *Legyen* m *és* n *két integrál* (T,L) *felett. Ekkor*

$$(m+n)_L = m_L + n_L \ .$$

Bizonyítás $f\in\mathcal{F}_+(T)$ esetén

$$\begin{aligned}(m+n)_L(f) &= \sup_{E\in\mathcal{R}(T,L)}(m(\chi_E\cdot f) + n(\chi_E\cdot f)) = \\ &= \sup_{E\in\mathcal{R}(T,L)} m(\chi_E\cdot f) + \sup_{E\in\mathcal{R}(T,L)} n(\chi_E\cdot f) = m_L(f) + n_L(f) \ ,\end{aligned}$$

mivel $\mathcal{R}(T,L)$ felfelé irányított rendszer.

Lemma *Legyen m és n két integrál a Stone-tulajdonságú (T, L) mérhető tér felett úgy, hogy*

$$\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T, L, m+n) = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T, L, m) \cap \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T, L, n) \ .$$

Ekkor

$$\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T, L, (m+n)_L) = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T, L, m_L) \cap \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T, L, n_L) \ .$$

Bizonyítás $m_L \leq (m+n)_L$ és $n_L \leq (m+n)_L$ miatt nyilvánvaló, hogy

$$\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T, L, (m+n)_L) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T, L, m_L) \cap \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T, L, n_L) \ .$$

Legyen $0 \leq f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T, L, m_L) \cap \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T, L, n_L)$. Ekkor $E \in \mathcal{R}(T, L)$ esetén

$$\chi_E \cdot f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T, L, m) \cap \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T, L, n) = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T, L, m+n) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T, L, (m+n)_L) \ ,$$

és létezik $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathcal{R}(T, L)$-beli sorozat úgy, hogy

$$(m+n)_L(f) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (m+n)\big(\chi_{E_n} \cdot f\big) \ .$$

Ekkor

$$\begin{aligned}(m+n)_L\big(f - \chi_{E_n} \cdot f\big) &= m_L\big(f - \chi_{E_n} \cdot f\big) + n_L\big(f - \chi_{E_n} \cdot f\big) = \\ &= m_L(f) - m_L\big(\chi_{E_n} \cdot f\big) + n_L(f) - n_L\big(\chi_{E_n} \cdot f\big) = \\ &= (m_L + n_L)(f) - (m_L + n_L)\big(\chi_{E_n} \cdot f\big) = \\ &= (m+n)_L(f) - (m+n)\big(\chi_{E_n} \cdot f\big) \ ,\end{aligned}$$

ennek jobb oldala pedig nullához tart, következésképpen $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T, L, (m+n)_L)$.

Következmény Legyen (T, L) Stone-tulajdonságú mérhető tér.

(1) Ha

$$\mathcal{M}_+(T, L) \to \mathcal{I}(T, L) \ , \ \mu \mapsto \mu^\circ$$

integráloperáció, akkor

$$\mathcal{M}_+(T, L) \to \mathcal{I}(T, L) \ , \ \mu \mapsto (\mu^\circ)_L$$

integráloperáció.

(2) Ha

$$\mathcal{N}_+(T, L) \to \mathcal{I}(T, L) \ , \ \mu \mapsto \mu^\circ$$

normális integráloperáció, akkor

$$\mathcal{N}_+(T, L) \to \mathcal{I}(T, L) \ , \ \mu \mapsto (\mu^\circ)_L$$

normális integráloperáció.

Következmény Legyen (T,L) Stone-tulajdonságú mérhető tér. Ekkor

$$\mathcal{N}_+(T,L) \to \mathcal{I}(T,L)\ ,\ \mu \mapsto \mu^\bullet$$

normális integráloperáció.

Megjegyzés Hasonló megállapítások tehetők a $\mu{\mapsto}(\mu^\circ)_l$ leképezésre.

10.3 Integrálás mérték szerint

A továbbiakban legyen adott (T,L) mérhető tér, és

$$\mathcal{N}_+(T,L) \to \mathcal{I}(T,L)\ ,\ \varrho \mapsto \varrho^\circ$$

integráloperáció. Továbbá, tegyük fel, hogy $\mathbb{K}{=}\mathbb{C}$ esetén a (T,L) mérhető tér eleget tesz a $(\mathbf{C_I})$ és $(\mathbf{C_{II}})$ feltételeknek.

Definíció Legyen $\mu{\in}\mathcal{M}_\mathbb{K}(T,L)$, F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, és $f{\in}\mathcal{L}^1(T,L,|\mu|^\circ)$. Ekkor a

$$\int^\circ f d\mu := \int f d(\mu,|\mu|^\circ) \in F$$

vektort *az f μ szerinti integráljának* nevezzük.

126. Állítás *Legyen $\mu{\in}\mathcal{M}_\mathbb{K}(T,L)$, $\alpha{\in}\mathbb{K}$, F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett. Ekkor*

$$\mathcal{L}^1_F(T,L,|\alpha{\cdot}\mu|^\circ) \subset \mathcal{L}^1_F(T,L,|\mu|^\circ)\ ,$$

és $f{\in}\mathcal{L}^1_F(T,L,|\mu|^\circ)$ esetén

$$\int^\circ f d(\alpha{\cdot}\mu) = \alpha{\cdot}\int^\circ f d\mu\ .$$

Megjegyzés $\alpha{\neq}0$ esetén $\mathcal{L}^1_F(T,L,|\alpha{\cdot}\mu|^\circ){=}\mathcal{L}^1_F(T,L,|\mu|^\circ)$ is teljesül.

127. Állítás *Legyen $\mu,\nu{\in}\mathcal{M}_\mathbb{K}(T,L)$ és F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett. Ekkor*

$$\mathcal{L}^1_F(T,L,|\mu|^\circ{+}|\nu|^\circ) \subset \mathcal{L}^1_F(T,L,|\mu{+}\nu|^\circ)\ ,$$
$$\mathcal{L}^1_F(T,L,|\mu|^\circ{+}|\nu|^\circ) \subset \mathcal{L}^1_F(T,L,|\mu|^\circ){\cap}\mathcal{L}^1_F(T,L,|\nu|^\circ)\ ,$$

ha F véges dimenziós, akkor a másodikban egyenlőség áll fenn, és $f{\in}\mathcal{L}^1_F(T,L,|\mu|^\circ{+}|\nu|^\circ)$ esetén

$$\int^\circ f d(\mu{+}\nu) = \int^\circ f d\mu + \int^\circ f d\nu\ .$$

Bizonyítás A tartalmazások a következő egyenlőtlenségek következményei:

$$|\mu{+}\nu| \le |\mu| + |\nu|\ ,$$
$$|\mu| \le |\mu| + |\nu|\ ,$$
$$|\nu| \le |\mu| + |\nu|\ .$$

Továbbá,

$$u : \mathcal{L}^1_F(T, L, |\mu|^\circ + |\nu|^\circ) \to F \ , \ f \mapsto \int^\circ f d(\mu+\nu)$$

és

$$v : \mathcal{L}^1_F(T, L, |\mu|^\circ + |\nu|^\circ) \to F \ , \ f \mapsto \int^\circ f d\mu + \int^\circ f d\nu$$

lineáris leképezések, és

$$\|u(f)\| \leq |\mu+\nu|^\circ(\|f\|) \leq (|\mu|^\circ + |\nu|^\circ)(\|f\|) \ ,$$
$$\|v(f)\| \leq (|\mu|^\circ + |\nu|^\circ)(\|f\|) \ ,$$

azaz u és v folytonosak, és $\varphi \in L_+$, $z \in F$ esetén

$$u(\varphi \otimes z) = (\mu+\nu)(\varphi) \cdot z = v(\varphi \otimes z) \ .$$

Tehát az u és v folytonos lineáris leképezések az $L \otimes F$ sűrű altéren megegyeznek, így egyenlők.

Következmény Legyen F véges dimenziós Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, $H \subset \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(T, L)$ lineáris altér. Ekkor minden

$$f \in \bigcap_{\mu \in H} \mathcal{L}^1_F(T, L, |\mu|^\circ)$$

esetén a

$$H \to F \ , \ \mu \mapsto \int^\circ f d\mu$$

leképezés lineáris.

Megjegyzés

(1) Legyen $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(T, L)$ és F Banach-tér $\mathbb{R}$ felett. Ekkor

$$\mathcal{L}^1_F(T, L, |\mu|^\circ) \subset \mathcal{L}^1_F(T, L, (\mu^+)^\circ) \cap \mathcal{L}^1_F(T, L, (\mu^-)^\circ) \ , \qquad (*)$$

ha F véges dimenziós, akkor egyenlőség áll fenn, és $f \in \mathcal{L}^1_F(T, L, |\mu|^\circ)$ esetén

$$\int^\circ f d\mu = \int f d(\mu^+)^\circ - \int f d(\mu^-)^\circ \ .$$

Ugyanis $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ miatt $|\mu|^\circ = (\mu^+)^\circ + (\mu^-)^\circ$, így $(*)$ teljesül, és $F = \mathbb{R}$ esetén egyenlőség áll fenn, következésképpen F véges dimenziós vektortér esetén is. Az integrálokra vonatkozó egyenlőség pedig a $\mu = \mu^+ - \mu^-$ egyenlőség és az előző állítás következménye.

(2) Legyen $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(T, L)$ és F Banach-tér $\mathbb{C}$ felett. Ekkor

$$\mathcal{L}^1_F(T, L, |\mu|^\circ) \subset \mathcal{L}^1_F(T, L, |\operatorname{Re} \mu|^\circ) \cap \mathcal{L}^1_F(T, L, |\operatorname{Im} \mu|^\circ) \ , \qquad (**)$$

és ha F véges dimenziós, akkor egyenlőség áll fenn, és $f\in\mathcal{L}^1_F(T,L,|\mu|^\circ)$ esetén

$$\int^\circ f d\mu = \int^\circ f d\,\mathrm{Re}\,\mu + i\cdot\int^\circ f d\,\mathrm{Im}\,\mu \ .$$

Ugyanis, $(**)$ a

$$|\,\mathrm{Re}\,\mu| \le |\mu| \le |\,\mathrm{Re}\,\mu| + |\,\mathrm{Im}\,\mu|$$
$$|\,\mathrm{Im}\,\mu| \le |\mu| \le |\,\mathrm{Re}\,\mu| + |\,\mathrm{Im}\,\mu|$$

egyenlőtlenségek következménye, és $F{=}\mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,|\mu|^\circ) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,|\,\mathrm{Re}\,\mu|^\circ)\cap\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,|\,\mathrm{Im}\,\mu|^\circ) = \\ = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,|\,\mathrm{Re}\,\mu|^\circ + |\,\mathrm{Im}\,\mu|^\circ) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(T,L,|\mu|^\circ) \ ,\end{aligned}$$

következésképpen itt mindenhol egyenlőség van. Nyilvánvaló, hogy ez igyaz $\mathbb{C}$, illetve minden $\mathbb{C}$ feletti véges dimenziós vektortér esetén. Az integrálokra vonatkozó egyenlőség pedig a $\mu{=}\,\mathrm{Re}\,\mu{+}i\cdot\mathrm{Im}\,\mu$ egyenlőség és az előző állítás következménye.

10.4 Vektormértékek

Legyen adott (T,L) mérhető tér, és

$$\mathcal{N}_+(T,L) \to \mathcal{I}(T,L) \ , \ \varrho \mapsto \varrho^\circ$$

integráloperáció. Továbbá, legyen F szeparált lokálisan konvex tér $\mathbb{K}$ felett. és tegyük fel, hogy $\mathbb{K}{=}\mathbb{C}$ esetén a (T,L) mérhető tér eleget tesz a $(\mathbf{C_I})$ és $(\mathbf{C_{II}})$ feltételeknek.

Definíció Az $m{:}L{\to}F$ lineáris leképezés *vektormérték* (T,L) *felett*, ha minden $z'{\in}F'$ esetén $z'{\circ}m{\in}\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(T,L)$. Jelölje $\mathcal{M}_F(T,L)$ az $L{\to}F$ vektormértékek halmazát. m *normális vektormérték* (T,L) *felett*, ha minden $z'{\in}F'$ esetén $z'{\circ}m{\in}\mathcal{N}_{\mathbb{K}}(T,L)$. Jelölje $\mathcal{N}_F(T,L)$ az $L{\to}F$ normális vektormértékek halmazát.

Legyen $m{\in}\mathcal{M}_F(T,L)$ esetén

$$\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(T,L,m,\circ) := \bigcap_{z'\in F'} \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(T,L,|z'{\circ}m|^\circ) \ ,$$

melynek elemeit *m-integrálható függvényeknek* nevezzük, és $f{\in}\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(T,L,m,\circ)$ esetén az

$$\int^\circ f dm : F' \to \mathbb{K} \ , \ z' \mapsto \int^\circ f d(z'{\circ}m)$$

lineáris leképezés az f *m szerinti integrálja.*

Megjegyzés Tehát $f{\in}\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(T,L,m,\circ)$ esetén $\displaystyle\int^\circ f dm{\in}F'^*$. Tudjuk, hogy ha F szeparált lokálisan konvex tér $\mathbb{K}$ felett, akkor

$$i_F : F \to F'^* \ , \ x \mapsto (z'{\mapsto}z'(x))$$

lineáris injekció. Szokás F-et azonosítani az $i_F\langle F\rangle\subset F'^*$ lineáris altérrel. Tehát lehetséges az, hogy

$$\int^{\circ} f dm \in F$$

teljesül, ilyenkor tehát minden $z'\in F'$ esetén

$$z'\Big(\int^{\circ} f dm\Big) = \int^{\circ} f d(z'\circ m)\ .$$

10.5 Félnorma által majorált vektormértékek

Legyen adott (T, L) mérhető tér, és

$$\mathcal{N}_+(T, L) \to \mathcal{I}(T, L)\ ,\ \varrho \mapsto \varrho^{\circ}$$

integráloperáció. Továbbá, legyen F szeparált lokálisan konvex tér $\mathbb{K}$ felett, és tegyük fel, hogy $\mathbb{K}{=}\mathbb{C}$ esetén a (T, L) mérhető tér eleget tesz a $(\mathbf{C_I})$ és $(\mathbf{C_{II}})$ feltételeknek.

Definíció Legyen $q{:}F\to\mathbb{R}_+$ alulról félig folytonos félnorma, és

$$A'_q := \{z' \in F' : |z'| \le q\}\ .$$

Azt mondjuk, hogy az $m{:}L\to F$ lineáris leképezés (vektormérték, normális vektormérték), *q-majorált*, ha létezik $\nu\in L^{\#}$ ($\nu\in\mathcal{M}_+(T, L)$, $\nu\in\mathcal{N}_+(T, L)$) úgy, hogy minden $z'\in A'_q$ esetén $|z'\circ m|\le\nu$.

Megjegyzés Ha m q-majorált, akkor az $L^{\#}$ ($\mathcal{M}_+(T, L)$,$\mathcal{N}_+(T, L)$) vektorhálók teljessége miatt létezik

$$q(m) := \sup_{z'\in A'_q} |z'\circ m| \in L^{\#}\ \ (\ \mathcal{M}_+(T, L)\ ,\ \mathcal{N}_+(T, L)\ )\ .$$

128. Állítás *Legyen $m\in\mathcal{M}_F(T, L)$ és $f\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(T, L, m, \circ)$ olyan, hogy $\int^{\circ} f dm\in F$, $q{:}F\to\mathbb{R}_+$ alulról félig folytonos félnorma. Ekkor*

$$q\Big(\int^{\circ} f dm\Big) \le \sup_{z'\in A'_q} |z'\circ m|^{\circ}(|f|)\ .$$

Bizonyítás $z'\in A'_q$ esetén

$$\Big|z'\Big(\int^{\circ} f dm\Big)\Big| \le |z'\circ m|^{\circ}(|f|)$$

ebből pedig a Hahn–Banach-tételből következő

$$q = \bigvee_{z'\in A'_p} |z'|$$

azonosság segítségével kapjuk, amit állítottunk.

Következmény Ha $m\in\mathcal{M}_F(T,L)$ q-majorált, és $f\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(T,L,m,\circ)$ olyan, hogy $\int^\circ f dm\in F$, akkor

$$q\Big(\int^\circ f dm\Big) \leq q(m)^\circ(|f|) \ .$$

Bizonyítás

$$\sup_{z'\in A'_q} |z'\circ m|^\circ \leq \Big(\sup_{z'\in A'_q} |z'\circ m|\Big)^\circ = q(m)^\circ \ .$$

Megjegyzés Az előző egyenlőtlenségben általában nincs egyenlőség.

129. Állítás *Legyen $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $q:F\to\mathbb{R}_+$ alulról félig folytonos félnorma, $m:L\to F$ q-majorált lineáris leképezés, $\varphi\in L_+$. Ekkor*

$$q(m)(\varphi) = \left\{\sum_{k=1}^n q(m(\psi_k)) : \psi_1,\dots,\psi_n\in L, \sum_{k=1}^n |\psi_k|\leq\varphi\right\} \ .$$

Bizonyítás Legyen

$$\mu_0(\varphi) := \left\{\sum_{k=1}^n q(m(\psi_k)) : \psi_1,\dots,\psi_n\in L, \sum_{k=1}^n |\psi_k|\leq\varphi\right\} \ .$$

Megmutatjuk először, hogy $\mu_0:L_+\to\mathbb{R}_+$ additív.

Legyen $\varphi_1,\varphi_2\in L_+$, továbbá $f_1,\dots,f_n,g_1,\dots,g_m\in L$ úgy, hogy $\sum\limits_{k=1}^n |f_k|\leq\varphi_1$ és $\sum\limits_{l=1}^m |g_l|\leq\varphi_2$. Ekkor

$$\sum_{k=1}^n |f_k| + \sum_{l=1}^m |g_l| \leq \varphi_1+\varphi_2 \ ,$$

következésképpen

$$\sum_{k=1}^n q(m(f_k)) + \sum_{l=1}^m q(m(g_l)) \leq \mu_0(\varphi_1+\varphi_2) \ ,$$

így

$$\mu_0(\varphi_1)+\mu_0(\varphi_2) \leq \mu_0(\varphi_1+\varphi_2) \ .$$

Legyen most $c>0$ olyan, hogy $c<\mu_0(\varphi_1+\varphi_2)$. Ekkor létezik $f_1,\dots,f_n\in L$ úgy, hogy $\sum\limits_{k=1}^n |f_k|\leq\varphi_1+\varphi_2$ és $c<\sum\limits_{k=1}^n q(m(f_k))$. A Bourbaki: Integrálás II. fejezete (Rendezett vektorterek) szerint létezik $g_1,\dots,g_n,h_1,\dots,h_n\in L$ úgy, hogy $k=$

$1,\dots,n$ esetén $f_k{=}g_k{+}h_k$, és $\sum\limits_{k=1}^{n}|g_k|{\le}\varphi_1$, $\sum\limits_{k=1}^{n}|h_k|{\le}\varphi_2$. Ekkor

$$c<\sum_{k=1}^{n}q(m(f_k))=\sum_{k=1}^{n}q(m(g_k{+}h_k))\le$$
$$\le\sum_{k=1}^{n}q(m(g_k))+\sum_{k=1}^{n}q(m(h_k))\le\mu_0(\varphi_1)+\mu_0(\varphi_2)\ ,$$

következésképpen

$$\mu_0(\varphi_1{+}\varphi_2)\le\mu_0(\varphi_1)+\mu_0(\varphi_1)\ .$$

Tehát $\mu_0{:}L_+{\to}\mathbb{R}_+$ additív, így létezik egyetlen $\mu{\in}L^\#$ úgy, hogy $\mu|_{L_+}{=}\mu_0$.
$z'{\in}A'_q$ esetén

$$|z'{\circ}m|(\varphi)=\left\{\sum_{k=1}^{n}|z'(m(\psi_k))|:\psi_1,\dots,\psi_n{\in}L,\sum_{k=1}^{n}|\psi_k|{\le}\varphi\right\}\le$$
$$\le\left\{\sum_{k=1}^{n}q(m(\psi_k)):\psi_1,\dots,\psi_n{\in}L,\sum_{k=1}^{n}|\psi_k|{\le}\varphi\right\}=\mu(\varphi)\ ,$$

következésképpen $q(m){\le}\mu$.
Legyen $\nu{\in}L^\#$ olyan, hogy minden $z'{\in}A'_q$ esetén $|z'{\circ}m|{\le}\nu$ teljesül, és legyen $c{>}0$ olyan, hogy $c{<}\mu(\varphi)$. Ekkor létezik $\psi_1,\dots,\psi_n{\in}L$ úgy, hogy $\sum\limits_{k=1}^{n}|\psi_k|{\le}\varphi$ és $c{<}\sum\limits_{k=1}^{n}q(m(\psi_k))$. Ekkor $q{=}\bigvee\limits_{z'\in A'_q}|z'|$ miatt létezik $z'_1,\dots,z'_n{\in}A'_q$ úgy, hogy $c{<}\sum\limits_{k=1}^{n}|z'_k(m(\psi_k))|$, így

$$c<\sum_{k=1}^{n}|z'_k(m(\psi_k))|\le\sum_{k=1}^{n}|z'_k{\circ}m|(|\psi_k|)\le\sum_{k=1}^{n}\nu(|\psi_k|)=\nu\Big(\sum_{k=1}^{n}|\psi_k|\Big)\le\nu(\varphi)\ ,$$

tehát $\mu(\varphi){\le}\nu(\varphi)$, így $\mu{\le}\nu$, következésképpen $\mu{\le}q(m)$.

11. Fejezet

Mérhető halmazok és függvények

11.1 Carathéodory-mérhető halmazok

Definíció Legyen T nemüres halmaz és m felső integrál T felett. Az $E\subset T$ halmaz *Carathéodory-értelemben m-mérhető*, ha minden $H\subset T$ esetén

$$m(H) = m(H\cap E) + m(H\setminus E) \ .$$

Jelölje $\mathcal{M}(T,m)$ a T Carathéodory-értelemben m-mérhető részhalmazainak halmazát.

130. Állítás *Ha T nemüres halmaz és m felső integrál T felett, akkor $\mathcal{M}(T,m)$ m-teljes σ-algebra, és $m|_{\mathcal{M}(T,m)}$ σ-additív halmazfüggvény.*

Bizonyítás Nyilvánvaló, hogy $\emptyset\in\mathcal{M}(T,m)$ és $T\in\mathcal{M}(T,m)$, valamint az, hogy $E\in\mathcal{M}(T,m)$ esetén $T\setminus E\in\mathcal{M}(T,m)$.

Legyen $E_1, E_2\in\mathcal{M}(T,m)$, és $F, H\subset T$. Ekkor

$$\begin{aligned} m(H) &= m(H\cap E_1) + m(H\setminus E_1) = \\ &= m(H\cap E_1\cap E_2) + m(H\cap E_1\setminus E_2) + m(H\setminus E_1\cap E_2) + m(H\setminus E_1\setminus E_2) \ , \end{aligned}$$

speciálisan $H{:=}F\cap(E_1\cup E_2)$ esetén

$$m(F\cap(E_1\cup E_2)) = m(F\cap E_1\cap E_2) + m(F\cap E_1\setminus E_2) + m(F\setminus E_1\cap E_2) \ , \qquad (*)$$

és $H{:=}F$ esetén

$$\begin{aligned} m(F) &= m(F\cap E_1\cap E_2) + m(F\cap E_1\setminus E_2) + m(F\setminus E_1\cap E_2) + m(F\setminus E_1\setminus E_2) = \\ &= m(F\cap(E_1\cup E_2)) + m(F\setminus(E_1\cup E_2)) \ , \end{aligned}$$

következésképpen $E_1\cup E_2\in\mathcal{M}(T,m)$, tehát $\mathcal{M}(T,m)$ halmazalgebra. Ha $E_1\cap E_2 =\emptyset$, akkor $(*)$ szerint

$$m(F\cap(E_1\cup E_2)) = m(F\cap E_1) + m(F\cap E_2) \ ,$$

speciálisan, $m|_{\mathcal{M}(T,m)}$ additív.

Legyen $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diszjunkt $\mathcal{M}(T,m)$-beli sorozat, és $F\subset T$. Ekkor n-szerinti indukcióval kapjuk, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} m(F) &= m(F\cap\Big(\bigcup_{k=0}^{n} E_k\Big) + m\Big(F\setminus\Big(\bigcup_{k=0}^{n} E_k\Big)\Big) = \\ &= \sum_{k=0}^{n} m(F\cap E_k) + m\Big(F\setminus\Big(\bigcup_{k=0}^{n} E_k\Big)\Big) \geq \\ &\geq \sum_{k=0}^{n} m(F\cap E_k) + m\Big(F\setminus\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big)\Big) \ , \end{aligned}$$

így

$$\begin{aligned} m(F) &\geq \sum_{n\in\mathbb{N}} m(F\cap E_n) + m\Big(F\setminus\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big)\Big) \geq \\ &\geq m\Big(F\cap\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big)\Big) + m\Big(F\setminus\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big)\Big) \geq m(F) \ , \end{aligned}$$

következésképpen

$$\begin{aligned} m(F) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} m(F\cap E_n) + m\Big(F\setminus\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big)\Big) = \qquad (**) \\ &= m\Big(F\cap\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big)\Big) + m\Big(F\setminus\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big)\Big) \ , \end{aligned}$$

tehát $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\in\mathcal{M}(T,m)$, így $\mathcal{M}(T,m)$ σ-algebra, és $(**)$-ba F helyére az $F\cap\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big)$ halmazt írva kapjuk, hogy

$$m\Big(F\cap\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big)\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(F\cap E_n) \ ,$$

speciálisan, $m|_{\mathcal{M}(T,m)}$ σ-additív.

Legyen $E\in\mathcal{M}(T,m)$, $m(E)=0$, és $F\subset E$. Ekkor tetszőleges $H\subset T$ esetén

$$m(H\setminus F) \geq m(H\setminus E) = m(H\setminus E) + m(H\cap E) = m(H) \geq m(H\setminus F) \ ,$$

így $m(H\cap F)\leq m(E)=0$ miatt

$$m(H) = m(H\setminus F) = m(H\setminus F) + m(H\cap F) \ ,$$

tehát $F\in\mathcal{M}(T,m)$, azaz $\mathcal{M}(T,m)$ m-teljes.

11.2 Integrál szerint mérhető halmazok

131. Állítás *Legyen m p-integrál a (T,L) mérhető tér felett, $A\subset T$. Tekintsük a következő tulajdonságokat:*

(1) minden $E \in \mathcal{R}(T, L)$ esetén $A \cap E \in \mathcal{R}^p(T, L, m)$,

(2) minden $\varphi \in L_+$ esetén $\chi_A \cdot \varphi \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T, L, m)$,
azaz 'A' lokálisan (T, L, m_p)-integrálható,

(3) minden $0 \le f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T, L, m)$ esetén $\chi_A \cdot f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T, L, m)$,

(4) minden $E \in \mathcal{R}^p(T, L, m)$ esetén $A \cap E \in \mathcal{R}^p(T, L, m)$.

Ekkor (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) teljesül, ha (T, L) Stone-tulajdonságú, akkor (4) $\Rightarrow$ (1) is. Ha (T, L) Stone-tulajdonságú, és μ pozitív mérték illetve normális pozitív mérték (T, L) felett, $m = \mu^{**}$ illetve $m = \mu^*$, akkor a fentiek $p=1$ esetén ekvivalensek a következővel:

(5) $A \in \mathcal{M}(T, m)$, azaz minden $H \subset T$ esetén $m(H) = m(H \cap A) + m(H \setminus A)$.

Bizonyítás (1) $\Rightarrow$ (2) Legyen $\varphi \in L_+$, és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\varphi_n := \sum_{k=1}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \cdot \chi_{[k/2^n < \varphi \le (k+1)/2^n]} \in \mathcal{E}_+(T, \mathcal{R}(T, L)) \ ,$$

ekkor

$$\chi_A \cdot \varphi_n = \sum_{k=1}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \cdot \chi_{A \cap [k/2^n < \varphi \le (k+1)/2^n]}$$

$\mathcal{E}_+(T, \mathcal{R}^p(T, L, m)) \subset \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T, L, m)$-beli, továbbá $(\chi_A \cdot \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton növő sorozat úgy, hogy $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \chi_A \cdot \varphi_n = \chi_A \cdot \varphi$, és

$$m_p(\chi_A \cdot \varphi_n) \le m_p(\varphi_n) \le m_p(\varphi) < +\infty \ ,$$

így a Beppo Levi-tétel szerint $\chi_A \cdot \varphi \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T, L, m)$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Legyen $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T, L, m)$, és $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ L-beli sorozat úgy, hogy $\lim_n m_p(f - \varphi_n) = 0$. Ekkor $\chi_A \cdot \varphi_n \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T, L, m)$, és

$$m_p(\chi_A \cdot f - \chi_A \cdot \varphi_n) = m_p(\chi_A \cdot (f - \varphi_n)) \le m_p(f - \varphi_n) \ ,$$

következésképpen $\chi_A \cdot f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T, L, m)$.

(3) $\Rightarrow$ (4) $E \in \mathcal{R}^p(T, L, m)$ esetén $\chi_E \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T, L, m)$, így

$$\chi_{A \cap E} = \chi_A \cdot \chi_E \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T, L, m) \ ,$$

azaz $A \cap E \in \mathcal{R}^p(T, L, m)$.

(4) $\Rightarrow$ (1) A Stone-tulajdonságból következik, hogy $\mathcal{R}(T, L) \subset \mathcal{R}^p(T, L, m)$.

Legyen $p=1$, (T, L) Stone-tulajdonságú, és μ pozitív mérték illetve normális pozitív mérték (T, L) felett, $m = \mu^{**}$ illetve $m = \mu^*$.

(5) $\Rightarrow$ (4) Legyen $E \in \mathcal{R}(T, L, m)$, ekkor (5) szerint:

$$m(\chi_E) = m(E) = m(E \cap A) + m(E \setminus A) = m(\chi_{E \cap A}) + m(\chi_E - \chi_{E \cap A}) \ ,$$

így a 6.5. lemma szerint $E{\cap}A{\in}\mathcal{R}(T,L,m)$.

(4) $\Rightarrow$ (5) Legyen $H{\subset}T$ tetszőleges. Ha $m(H){=}{+}\infty$, akkor nyilvánvaló, hogy $m(H){=}m(H{\cap}A){+}m(H{\setminus}A)$ teljesül, ha $m(H){<}{+}\infty$, akkor létezik $F{\in}\mathcal{R}(T,L,m)$ úgy, hogy $H{\subset}F$ és $m(H){=}m(F)$. Ekkor $F{\cap}A, F{\setminus}A{\in}\mathcal{R}(T,L,m)$, így

$$m(H) \le m(H{\cap}A) + m(H{\setminus}A) \le m(F{\cap}A) + m(F{\setminus}A) = m(F) = m(H)\ ,$$

következésképpen teljesül $m(H){=}m(H{\cap}A){+}m(H{\setminus}A)$.

132. Állítás *Legyen m p-integrál a (T,L) mérhető tér felett, $A{\subset}T$. Tekintsük a következő tulajdonságokat:*

(1) minden $E{\in}\mathcal{R}(T,L)$ esetén $m(A{\cap}E){=}0$,

(2) minden $\varphi{\in}L_+$ esetén $m_p\big(\chi_A{\cdot}\varphi\big){=}0$,

(3) minden $0{\le}f{\in}\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(T,L,m)$ esetén $m_p\big(\chi_A{\cdot}f\big){=}0$,

(4) minden $E{\in}\mathcal{R}^p(T,L,m)$ esetén $m(A{\cap}E){=}0$.

Ekkor (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) teljesül, ha (T,L) Stone-tulajdonságú, akkor (4) $\Rightarrow$ (1) is.

Bizonyítás Hasonló az előzőhöz.

Definíció Legyen m p-integrál a (T,L) mérhető tér felett. Az $A{\subset}T$ halmaz *p-edik hatványon (T,L,m)-mérhető*, illetve *p-edik hatványon (T,L,m)-lokálisan m-eltűnő*, vagy röviden (T,L,m_p)-mérhető, illetve (T,L,m_p)-lokálisan m-eltűnő, ha minden $E{\in}\mathcal{R}^p(T,L,m)$ esetén $A{\cap}E$ (T,L,m_p)-integrálható illetve m-eltűnő.

Megjegyzés Ha m integrál és p-integrál a (T,L) mérhető tér felett, akkor $\mathcal{R}^p(T,L,m){=}\mathcal{R}(T,L,m)$ miatt a (T,L,m_p)-mérhető illetve (T,L,m_p)-lokálisan m-eltűnő halmazok megegyeznek a (T,L,m)-mérhető illetve (T,L,m)-lokálisan m-eltűnő halmazokkal.

Megjegyzés Legyen m p-integrál a (T,L) mérhető tér felett. Ekkor a T-beli (T,L,m_p)-mérhető illetve (T,L,m_p)-lokálisan m-eltűnő halmazok σ-algebrát illetve σ-gyűrűt alkotnak. Ha (T,L) Stone-tulajdonságú, akkor $\sigma(\mathcal{R}(T,L))$ minden eleme (T,L,m_p)-mérhető.

133. Állítás *Legyen (T,L) Stone-tulajdonságú mérhető tér, μ pozitív mérték illetve normális pozitív mérték (T,L) felett, $m{=}\mu^{**}$ illetve $m{=}\mu^{*}$; $E{\subset}T$. Ezen feltételek mellett $E{\in}\mathcal{R}(T,L,m)$ pontosan akkor teljesül, ha E (T,L,m)-mérhető és $m(E){<}{+}\infty$.*

Bizonyítás Legyen $E{\subset}T$ (T,L,m)-mérhető és $m(E){<}{+}\infty$. Ekkor létezik $F{\in}\mathcal{R}(T,L,m)$ úgy, hogy $E{\subset}F$, így $E{=}E{\cap}F{\in}\mathcal{R}(T,L,m)$.

Megjegyzés Ha m integrál a (T,L) Stone-tulajdonságú mérhető tér felett, mely nem $m{=}\mu^{**}$ illetve $m{=}\mu^{*}$ alakú (μ pozitív mérték illetve normális pozitív mérték), akkor $E{\subset}T$, $m(E){<}{+}\infty$ esetén nem feltétlenül létezik E-t tartalmazó (T,L,m)-integrálható halmaz, így az előző állítás sem feltétlenül igaz. Általában (lásd később) az teljesül hogy $E{\in}\mathcal{R}(T,L,m)$ pontosan akkor, ha E (T,L,m)-mérhető, (T,L,m)-moderáns és $m(E){<}{+}\infty$.

11.3 Mérhető függvények alaptulajdonságai

Definíció Legyen m p-integrál a (T, L) mérhető tér felett, X halmaz. Az $f{:}T{\to}X$ leképezés *p-edik hatványon (T,L,m)-mérhető lépcsősfüggvény*, vagy röviden (T, L, m_p)-mérhető lépcsősfüggvény, ha $\mathrm{Im}(f)$ nem üres véges halmaz, és minden $y{\in}\,\mathrm{Im}(f)$ esetén $\overset{-1}{f}\langle\{y\}\rangle$ (T, L, m_p)-mérhető.

Definíció Legyen m p-integrál a (T, L) mérhető tér felett, F metrizálható topologikus tér. Az $f{:}T{\to}F$ leképezés *p-edik hatványon (T, L, m)-mérhető*, vagy röviden (T, L, m_p)-mérhető, ha minden $K{\in}\mathcal{R}^p(T, L, m)$ esetén létezik (T, L, m_p)-mérhető lépcsősfüggvény-sorozat, mely K-n m-majdnem mindenütt f-hez konvergál.

Megjegyzés Ha m integrál és p-integrál a (T, L) mérhető tér felett, akkor $\mathcal{R}^p(T, L, m){=}\mathcal{R}(T, L, m)$ miatt a (T, L, m_p)-mérhető függvények megegyeznek a (T, L, m)-mérhető függvényekkel.

134. Állítás *Legyen m p-integrál a (T, L) mérhető tér felett, $(F_k)_{1\le k\le n}$ és G metrizálható topologikus terek, $k{\in}\{1, \dots , n\}$ esetén $f_k{:}T{\to}F_k$ (T, L, m_p)-mérhető függvény, és $u{:}\,\mathrm{Im}((f_k)_{1\le k\le n}){\to}G$ folytonos leképezés. Ekkor az $u{\circ}(f_k)_{1\le k\le n}$ leképezés (T, L, m_p)-mérhető.*

Következmény Legyen m p-integrál a (T, L) mérhető tér felett, F normált tér $\mathbb{K}$ felett, $f, g{:}T{\to}F$, $\varphi{:}T{\to}\mathbb{K}$ (T, L, m_p)-mérhető függvények. Ekkor $f{+}g$, $\varphi{\cdot}f$, $\|f\|$ (T, L, m_p)-mérhetők. Ha F normált algebra, akkor $f{\cdot}g$ (T, L, m_p)-mérhető. Ha φ seholsem nulla, akkor $1/\varphi$ (T, L, m_p)-mérhető. Ha $\varphi, \psi{:}T{\to}\overline{\mathbb{R}}$ (T, L, m_p)-mérhető függvények, akkor $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, φ^+, φ^- és $|\varphi|$ (T, L, m_p)-mérhetők.

135. Állítás *Legyen m p-integrál a (T, L) mérhető tér felett, F metrizálható topologikus tér, $f{:}T{\to}F$ (T, L, m_p)-mérhető függvény, $U{\subset}F$ nyílt halmaz. Ekkor $\overset{-1}{f}\langle U\rangle$ (T, L, m_p)-mérhető.*

Bizonyítás Legyen d metrika M felett, mely generálja M topológiáját, $r{\in}\mathbb{N}$ esetén $U_r{:=}[d(F{\setminus}U, .){>}1/r]$. Ekkor $(U_r)_{r\in\mathbb{N}}$ F-beli nyílt halmazok monoton növő sorozata úgy, hogy $\bigcup\limits_{r\in\mathbb{N}} U_r{=}U$, és minden $r{\in}\mathbb{N}$ esetén $\overline{U_r}{\subset}U$. Legyen $K{\in}\mathcal{R}^p(T{,}L{,}m)$, és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(T{,}L{,}m_p)$-mérhető lépcsősfüggvények sorozata, mely az $N{\subset}K$ m-eltűnő halmazon kívül K-n f-hez konvergál. Ekkor

$$(K{\setminus}N){\cap}\overset{-1}{f}\langle U\rangle = \bigcup_{r\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{k\ge n}(K{\setminus}N){\cap}\overset{-1}{f_k}\langle U_r\rangle\ ,$$

és minden $r, n{\in}\mathbb{N}$ esetén az $\overset{-1}{f_k}\langle U_r\rangle$ halmaz (T, L, m_p)-mérhető, következésképpen $(K{\setminus}N){\cap}\overset{-1}{f}\langle U\rangle{\in}\mathcal{R}^p(T, L, m)$, ezért

$$K{\cap}\overset{-1}{f}\langle U\rangle = \left((K{\setminus}N){\cap}\overset{-1}{f}\langle U\rangle\right)\cup\left(N{\cap}\overset{-1}{f}\langle U\rangle\right) \in \mathcal{R}^p(T, L, m)\ ,$$

így $\overset{-1}{f}\langle U\rangle$ (T, L, m_p)-mérhető.

Következmény Legyen m p-integrál a (T,L) mérhető tér felett, F metrizálható topologikus tér, $f{:}T{\to}F$ (T,L,m_p)-mérhető függvény, Ekkor minden F-beli Borel-halmaz f általi ősképe (T,L,m_p)-mérhető.

Megjegyzés Legyen m p-integrál a (T,L) mérhető tér felett, F metrizálható topologikus tér, $f{:}T{\to}F$ olyan függvény, hogy minden $K{\in}\mathcal{R}^p(T,L,m)$ és $\varepsilon{>}0$ esetén létezik $K_1{\in}\mathcal{R}^p(T,L,m)$ és (T,L,m_p)-mérhető lépcsősfüggvények $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata úgy, hogy $K_1{\subset}K$, $m(K{\setminus}K_1){\le}\varepsilon$, és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ K_1-en egyenletesen f-hez konvergál. Ekkor f (T,L,m_p)-mérhető.

Bizonyítás Ha a megadott feltétel teljesül, akkor létezik $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diszjunkt $\mathcal{R}^p(T,L,m)$-beli sorozat úgy, hogy minden $n{\in}\mathbb{N}$ esetén $K_n{\subset}K$, létezik (T,L,m_p)-mérhető lépcsősfüggvények olyan $(f_{mn})_{m\in\mathbb{N}}$ sorozata, mely K_n-en egyenletesen f-hez konvergál, és $N{:=}K{\setminus}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n\right)$ m-eltűnő. Legyen $b{\in}F$ tetszőleges, és

$$g_n : T{\to}F \ , \ t{\mapsto}\begin{cases} f_{nk}(t) & , \text{ ha } t{\in}K_k \ , \ k{\in}\{1,2,\dots,n\} \\ b & , \text{ ha } t{\in}K{\setminus}\bigcup_{k=1}^{n} K_k \end{cases} ,$$

ekkor $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (T,L,m_p)-mérhető lépcsősfüggvények sorozata, mely $K{\setminus}N$ minden pontjában f-hez konvergál.

136. Állítás (Jegorov-tétel) *Legyen m p-integrál a (T,L) mérhető tér felett, F metrizálható topologikus tér, A megszámlálható halmaz, $\mathcal{F}$ megszámlálható bázisú szűrő A-ban, $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ $T{\to}F$ (T,L,m_p)-mérhető függvények rendszere, $N{\subset}T$ (T,L,m_p)-lokálisan m-eltűnő halmaz úgy, hogy minden $t{\in}T{\setminus}N$ esetén $(f_\alpha(t))_{\alpha\in A}$ konvergál $f(t){\in}F$-hez $\mathcal{F}$ szerint. Ekkor*

(1) minden $K{\in}\mathcal{R}^p(T,L,m)$ és $\varepsilon{>}0$ esetén létezik $K_1{\in}\mathcal{R}^p(T,L,m)$ úgy, hogy $K_1{\subset}K$, $m(K{\setminus}K_1){\le}\varepsilon$ és $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ K_1-en egyenletesen konvergál f-hez $\mathcal{F}$ szerint.

(2) $f{:}T{\setminus}N{\to}F$ (T,L,m_p)-mérhető.

Bizonyítás Legyen d metrika, mely generálja F topológiáját, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó bázisa $\mathcal{F}$-nek, $K{\in}\mathcal{R}^p(T,L,m)$, $\varepsilon{>}0$. Ekkor $K{\cap}N$ m-eltűnő halmaz. $n{\in}\mathbb{N}$ és $r{\in}\mathbb{N}^*$esetén legyen

$$B_{n,r} := \bigcup_{\alpha,\beta\in A_n} K{\cap}[d{\circ}(f_\alpha,f_\beta){\ge}1/r] \in \mathcal{R}^p(T,L,m) \ .$$

Mivel $K{\setminus}N$ pontjaiban $(f_\alpha(x))_{\alpha\in A}$ konvergens,

$$\bigcup_{r\in\mathbb{N}^*}\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_{n,r} \subset K{\cap}N \ ,$$

következésképpen rögzített $r{\in}\mathbb{N}^*$ esetén $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_{n,r}$ m-eltűnő. Mivel $(B_{n,r})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó sorozat, ebből következik, hogy $\lim_n m(B_{n,r}){=}0$, így létezik $n_r{\in}\mathbb{N}$ úgy, hogy $m(B_{n_r,r}){\le}\varepsilon/2^r$. Legyen

$$B := \bigcup_{r\in\mathbb{N}^*} B_{n_r,r} \ .$$

Ekkor $\sum_{r\in\mathbb{N}^*} m(B_{n_r,r})\leq\varepsilon$, következésképpen $B\in\mathcal{R}^p(T,L,m)$, és $m(B)\leq\varepsilon$. Legyen $K_1:=(K\setminus N)\setminus B$. Ekkor az $\mathcal{F}$ szűrő $\alpha\to f_\alpha|_{K_1}$ leképezés általi képe Cauchy-szűrő $\mathcal{F}_u(K_1,F)$-ben, mely pontonként konvergál $f|_{K_1}$-hez, következésképpen $\mathcal{F}_u(K_1,F)$-ben is (tehát egyenletesen) konvergál $f|_{K_1}$-hez. Azonban $K\setminus K_1=(B\setminus N)\cup(K\cap N)$, így $m(K\setminus K_1)=m(B)\leq\varepsilon$.

Legyen $\alpha:\mathbb{N}\to A$ bijekció. $m\in\mathbb{N}$ esetén létezik $H_m\in\mathcal{R}^p(T,L,m)$, hogy $H_m\subset K_1$, $m(K_1\setminus H_m)\leq\varepsilon/2^m$, és f_{α_m} H_m-en (T,L,m_p)-mérhető lépcsősfüggvények egyenletes limese. Legyen $K_2:=\bigcap_{m\in\mathbb{N}} H_m$. Ekkor

$$m(K_1\setminus K_2)\leq\sum_{m\in\mathbb{N}} m(K_1\setminus H_m)\leq\varepsilon\ ,$$

és K_2-n minden f_{α_m} (T,L,m_p)-mérhető lépcsősfüggvények egyenletes limese, így f is, és $m(K\setminus K_2)\leq 2\varepsilon$, így az előző megjegyzés szerint f (T,L,m_p)-mérhető.

Következmény Legyen m p-integrál (T,L) felett, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (T,L,m_p)-mérhető $T\to\overline{\mathbb{R}}$ függvények sorozata. Ekkor a $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\liminf_{n\to+infty} f_n$, $\limsup_{n\to+\infty} f_n$ függvények (T,L,m_p)-mérhetők.

Megjegyzés Legyen m p-integrál a (T,L) mérhető tér felett, F metrizálható topologikus tér, $f:T\to F$ leképezés. A Jegorov-tétel és az előtte levő megjegyzés szerint f pontosan akkor (T,L,m_p)-mérhető, ha minden $K\in\mathcal{R}^p(T,L,m)$ és $\varepsilon>0$ esetén létezik $K_1\in\mathcal{R}^p(T,L,m)$ és (T,L,m_p)-mérhető lépcsősfüggvények $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata úgy, hogy $K_1\subset K$, $m(K\setminus K_1)\leq\varepsilon$, és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ K_1-en egyenletesen f-hez konvergál.

137. Állítás *Legyen m p-integrál a (T,L) mérhető tér felett, F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett, $f:T\to F$ (T,L,m_p)-mérhető leképezés. Ekkor minden $K\in\mathcal{R}(T,L,m)$ esetén létezik (T,L,m_p)-mérhető lépcsősfüggvények $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, mely a K halmazon m-majdnem mindenütt f-hez konvergál, és minden $n\in\mathbb{N}$ esetén*

$$\|g_n\|\leq\|f\|\cdot\chi_K\ .$$

Bizonyítás Létezik $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diszjunkt $\mathcal{R}^p(T,L,m)$-beli rendszer úgy, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $K_n\subset K$, f K_n-en (T,L,m_p)-mérhető lépcsősfüggvények egyenletes limese, és $N:=K\setminus\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} K_n$ m-eltűnő. Legyen $n\in\mathbb{N}^*$ és $k\in\{1,2,...,n\}$ esetén f_{nk} (T,L,m_p)-mérhető lépcsősfüggvény úgy, hogy

$$\sup_{t\in K_k}\|f(t)-f_{nk}(t)\|\leq 1/n\ ,$$

és legyen $f_n:=\sum_{k=1}^{n} f_{nk}\cdot\chi_{K_k}$; ekkor f_n (T,L,m_p)-mérhető lépcsősfüggvény, és minden $t\in\bigcup_{k=1}^{n} K_k$ esetén

$$\|f(t)-f_n(t)\|\leq 1/n\ . \qquad (*)$$

Legyen $n{\in}\mathbb{N}^*$ esetén

$$g_n : T{\to}F \ , \ t \mapsto \begin{cases} 0 & , \text{ ha } \|f_n(t)\|{\le}1/n \\ f_n(t){\cdot}\left(1{-}\dfrac{1}{n\|f_n(t)\|}\right) & , \text{ ha } \|f_n(t)\|{>}1/n \end{cases} .$$

$t{\in}K{\setminus}N$ esetén létezik $m{\in}\mathbb{N}^*$ úgy, hogy $t{\in}K_m$, ekkor minden $n{\ge}m$ esetén $t{\in}\bigcup\limits_{k=1}^{n} K_k$.

(1) Ha $\|f_n(t)\|{\le}1/n$, akkor

$$\|g_n(t)\|{=}0{\le}\|f(t)\| \ ,$$

és $(*)$ miatt

$$\|f(t){-}g_n(t)\| \le \|f_n(t)\| + 1/n \le 2/n \ .$$

(2) Ha $\|f_n(t)\|{>}1/n$, akkor

$$\|f(t){-}g_n(t)\| \le \|f(t){-}f_n(t)\| + 1/n \le 2/n \ ,$$

és $(*)$ miatt

$$\|g_n(t)\| = \|f_n(t)\| - 1/n \le \|f(t)\| \ .$$

11.4 Mérhetőségi kritériumok

138. Állítás *Legyen m p-integrál a (T,L) mérhető tér felett, (F,d) metrikus tér. Az $f{:}T{\to}F$ leképezés pontosan akkor (T,L,m_p)-mérhető, ha*

(1) minden F-beli zárt gömb f általi ősképe (T,L,m_p)-mérhető,

(2) minden $K{\in}\mathcal{R}^p(T,L,m)$ esetén létezik $H{\subset}F$ megszámlálható halmaz és $N{\subset}K$ m-eltűnő halmaz úgy, hogy $f\langle K{\setminus}N\rangle{\subset}\overline{H}$.

Bizonyítás Ha f (T,L,m_p)-mérhető, akkor nyilvánvaló (1) és (2). Fordítva, tegyük fel, hogy (1) és (2) teljesülnek, és legyen $K{\in}\mathcal{R}^p(T,L,m)$, $a{:}\mathbb{N}^*{\to}F$ sorozat, $N{\subset}K$ m-eltűnő halmaz úgy, hogy $f\langle K{\setminus}N\rangle{\subset}\overline{\mathrm{Im}(a)}$. (1) szerint $n,r{\in}\mathbb{N}^*$ esetén

$$A_{n,r} := (K{\setminus}N){\cap}[d(f(.),a_n){\le}1/r] \in \mathcal{R}^p(T,L,m) \ .$$

Rögzített $r{\in}\mathbb{N}^*$ esetén legyen:

$$B_{1,r} := A_{1,r} \ ,$$
$$B_{n+1,r} := A_{n+1,r}{\setminus}\bigcup_{k=1}^{n} A_{n,r} \quad (n{\in}\mathbb{N}^*) \ .$$

Ekkor $(B_{n,r})_{n\in\mathbb{N}^*}$ diszjunkt $\mathcal{R}^p(T,L,m)$-beli rendszer úgy, hogy

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_{n,r} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_{n,r} = K{\setminus}N \ ,$$

legyen $b\in F$, és

$$g_{n,r}:T\to F\ ,\ t\mapsto\begin{cases}a_k & ,\ \text{ha}\ \ t\in B_{k,r}\ ,\ k\in\{1,2,\ldots,n\}\\ b & ,\ \text{ha}\ \ t\in K\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{n}B_{k,r}\end{cases}\ ,$$

ekkor $(g_{n,r})_{n\in\mathbb{N}^*}$ (T,L,m_p)-mérhető lépcsősfüggvények sorozata, következésképpen

$$f_r:=\lim_n g_{n,r}:T\to F\ ,\ t\mapsto\begin{cases}a_n & ,\ \text{ha}\ \ t\in B_{n,r}\\ b & ,\ \text{ha}\ \ t\in N\end{cases}\ ,$$

(T,L,m_p)-mérhető, és $t\in K\setminus N$ esetén $\lim\limits_r f_r(t)=f(t)$, így f (T,L,m_p)-mérhető.

Következmény Legyen m p-integrál a (T,L) mérhető tér felett, $D\subset\mathbb{R}$ sűrű halmaz, $f{:}T\to\overline{\mathbb{R}}$ leképezés. f pontosan akkor (T,L,m_p)-mérhető, ha minden $a\in D$ esetén $[f\geq a]$ (T,L,m_p)-mérhető halmaz.

139. Állítás *Legyen m p-integrál a (T,L) mérhető tér felett, F Banach-tér $\mathbb{K}$ felett. Az $f{:}T\to F$ leképezés pontosan akkor (T,L,m_p)-mérhető, ha*

(1) minden $a'\in F'$ esetén $a'\circ f$ (T,L,m_p)-mérhető,

(2) minden $K\in\mathcal{R}^p(T,L,m)$ esetén létezik $H\subset F$ megszámlálható halmaz és $N\subset K$ m-eltűnő halmaz úgy, hogy $f\langle K\setminus N\rangle\subset\overline{H}$.

Bizonyítás Ha f (T,L,m_p)-mérhető, akkor nyilvánvaló (1) és (2). Fordítva, tegyük fel, hogy (1) és (2) teljesülnek, és legyen $K\in\mathcal{R}^p(T,L,m)$, $a{:}\mathbb{N}^*\to F$ sorozat, $N\subset K$ m-eltűnő halmaz úgy, hogy $f\langle K\setminus N\rangle\subset\overline{\mathrm{Im}(a)}$. Legyen $b\in F$ és $r>0$. Jelölje V a $\{b\}\cup\mathrm{Im}(a)$ halmaz által generált zárt lineáris alteret F-ben. Ekkor V szeparábilis Banach-tér, következésképpen létezik $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ F'-beli sorozat úgy, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ esetén $\|a'_n\|\leq1$, és minden $z\in V$ esetén $\|z\|=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|a'_n(z)|$. Ekkor

$$(K\setminus N)\cap[\|f(.)-a\|\leq r]=(K\setminus N)\cap\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[|a'_n(f(.)-a)|\leq r]\in\mathcal{R}^p(T,L,m)\ ,$$

így az előző állítás szerint f (T,L,m_p)-mérhető.

11.5 Az integrálhatóság kritériuma

140. Állítás *Legyen m p-integrál a (T,L) Stone-tulajdonságú mérhető tér felett, F Banach-tér. Ekkor $L\otimes F$ minden eleme (T,L,m_p)-mérhető.*

Bizonyítás Legyen $\varphi\in L_+$, és $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$\varphi_n:=\sum_{k=1}^{n2^n-1}\frac{k}{2^n}\cdot\chi_{[k/2^n<\varphi\leq(k+1)/2^n]}\ .$$

Ekkor $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{E}_+(T,\mathcal{R}(T,L))$-beli monoton növő sorozat úgy, hogy $\bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}}\varphi_n=\varphi$, és a Stone-tulajdonság miatt $\mathcal{R}(T,L)\subset\mathcal{R}^p(T,L,m)$, így φ_n (T,L,m_p)-mérhető lépcsősfüggvény, ezért φ (T,L,m_p)-mérhető. Ebből nyilvánvalóan következik az állítás.

Következmény Legyen m p-integrál a Stone-tulajdonságú (T,L) mérhető tér felett és F Banach-tér. Ekkor $\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$ minden eleme (T,L,m_p)-mérhető.

Definíció Legyen m p-integrál a (T,L) mérhető tér felett, F Banach-tér. A $H{\subset}T$ halmaz *p-edik hatványon* (T,L,m)*-moderáns*, vagy röviden (T,L,m_p)-moderáns, ha lefedhető megszámlálható sok $\mathcal{R}^p(T,L,m)$-beli halmazzal. Az $f{:}T{\to}F$ leképezés *p-edik hatványon* (T,L,m)*-moderáns*, vagy röviden (T,L,m_p)-moderáns, ha $[f{\neq}0]$ (T,L,m_p)-moderáns halmaz.

Megjegyzés Ha m integrál és p-integrál (T,L) felett, akkor $\mathcal{R}^p(T,L,m)=\mathcal{R}(T,L,m)$ miatt a (T,L,m_p)-moderáns halmazok és függvények megegyeznek a (T,L,m)-moderáns halmazokkal és függvényekkel.

141. Állítás *Legyen m p-integrál a (T,L) Stone-tulajdonságú mérhető tér felett, F Banach-tér. Ekkor*

(1) $\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$ minden eleme (T,L,m_p)-moderáns.

(2) Ha μ pozitív mérték illetve normális pozitív mérték (T,L) felett és $m{=}\mu^{**}$ illetve $m{=}\mu^*$, akkor $\mathcal{F}^p_F(T,m)$ minden eleme (T,L,m)-moderáns.

Bizonyítás Legyen $f{\in}\mathcal{F}^p_F(T,m)$. Ekkor $n{\in}\mathbb{N}$ esetén $\chi_{[\|f\|>1/n]}{\leq}n{\cdot}\|f\|$, következésképpen $m_p([\|f\|{>}1/n]){\leq}n{\cdot}m_p(f){<}{+}\infty$, és

$$[f{\neq}0] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\|f\|{>}1/n] \ .$$

Ha $f{\in}\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$, akkor minden $n{\in}\mathbb{N}$ esetén $[\|f\|{>}1/n]{\in}\mathcal{R}^p(T,L,m)$, következésképpen f (T,L,m_p)-moderáns. Ha $m{=}\mu^{**}$ illetve $m{=}\mu^*$, akkor minden $n{\in}\mathbb{N}$ esetén létezik $K_n{\in}\mathcal{R}(T,L,m)$ úgy, hogy $[\|f\|{>}1/n]{\subset}K_n$; ekkor

$$[f{\neq}0] \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n \ ,$$

tehát f (T,L,m)-moderáns.

142. Állítás (Az integrálhatóság kritériuma) *Legyen m p-integrál a (T,L) Stone-tulajdonságú mérhető tér felett, F Banach-tér. Az $f{:}T{\to}F$ leképezésre $f{\in}\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$ pontosan akkor teljesül, ha f (T,L,m_p)-mérhető, (T,L,m_p)-moderáns, és $f{\in}\mathcal{F}^p_F(T,m)$.*

Bizonyítás Legyen $f{\in}\mathcal{F}^p_F(T,m)$ (T,L,m_p)-mérhető és (T,L,m_p)-moderáns.

(1) Ha létezik $K{\in}\mathcal{R}^p(T,L,m)$ úgy, hogy $[f{\neq}0]{\subset}K$, akkor a 137. állítás szerint létezik (T,L,m_p)-mérhető lépcsősfüggvények $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, mely K-n m-majdnem mindenütt f-hez konvergál, és $\|g_n\|{\leq}\|f\|$. Ekkor $[g_n{\neq}0]{\subset}K$ miatt $g_n{\in}\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$, így a Lebesgue-tétel szerint $f{\in}\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$.

(2) Az általános esetben legyen $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{R}^p(T,L,m)$-beli monoton növő sozozat úgy, hogy $[f{\neq}0]{\subset}\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$, és $n{\in}\mathbb{N}$ esetén legyen $f_n{:=}\chi_{K_n}{\cdot}f$. Ekkor f_n (T,L,m_p)-mérhető leképezés, $\|f_n\|{\leq}\|f\|$ miatt $f_n{\in}\mathcal{F}^p_F(T,m)$, és $[f_n{\neq}0]{\subset}K_n$ miatt (1) szerint $f_n{\in}\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$. Továbbá, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pontonként konvergál f-hez, így a Lebesgue-tétel szerint $f{\in}\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$.

143. Állítás *Legyen m p-integrál a (T,L) Stone-tulajdonságú mérhető tér felett, F Banach-tér, $f{:}T\to F$ leképezés. Ekkor a következők ekvivalensek:*

(1) f (T,L,m_p)-mérhető.

(2) minden $K\in\mathcal{R}^p(T,L,m)$ és $\varepsilon>0$ esetén létezik $K_1\in\mathcal{R}^p(T,L,m)$ úgy, hogy $K_1\subset K$, $m(K\backslash K_1)\leq\varepsilon$, és $\chi_{K_1}\cdot f\in\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$.

(3) minden $K\in\mathcal{R}^p(T,L,m)$ és $\varepsilon>0$ esetén létezik $K_1\in\mathcal{R}^p(T,L,m)$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $L\otimes F$-beli úgy, hogy $K_1\subset K$, $m(K\backslash K_1)\leq\varepsilon$, és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ K_1-en egyenletesen f-hez konvergál.

Bizonyítás
(1) $\Rightarrow$ (2) Legyen $K\in\mathcal{R}^p(T,L,m)$ és $\varepsilon>0$. Ekkor létezik $K_1\in\mathcal{R}^p(T,L,m)$ és (T,L,m_p)-mérhető lépcsősfüggvények $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata úgy, hogy $K_1\subset K$, $m(K\backslash K_1)\leq\varepsilon$, és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ K_1-en egyenletesen f-hez konvergál. Ekkor $n\in\mathbb{N}$ esetén $\chi_{K_1}\cdot f_n\in\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$, és $(\chi_{K_1}\cdot f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergál a $\chi_{K_1}\cdot f$ függvényhez, speciálisan, minden $\delta>0$ esetén létezik $n_\delta\in\mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n\geq n_\delta$ esetén $|||\chi_{K_1}\cdot f_n-\chi_{K_1}\cdot f_{n_\delta}|||\leq\delta$, ekkor $n\geq n_\delta$ esetén

$$\|\chi_{K_1}\cdot f_n\|\leq\|\chi_{K_1}\cdot f_{n_\delta}\|+\delta\cdot\chi_{K_1}\ ,$$

így a Lebesgue-tétel szerint $\chi_{K_1}\cdot f\in\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Legyen $K\in\mathcal{R}^p(T,L,m)$ és $\varepsilon>0$. Ekkor létezik $K_1\in\mathcal{R}^p(T,L,m)$ úgy, hogy $K_1\subset K$, $m(K\backslash K_1)\leq\varepsilon$, és $\chi_{K_1}\cdot f\in\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$. Ez utóbbi feltétel szerint létezik $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $L\otimes F$-beli sorozat, mely K_1-en m-majdnem mindenütt $\chi_{K_1}\cdot f$-hez konvergál. Ekkor minden $n\in\mathbb{N}$ esetén f_n (T,L,m_p)-mérhető, így létezik $K_2\in\mathcal{R}(T,L,m)$ úgy, hogy $K_2\subset K_1$, $m(K_1\backslash K_2)\leq\varepsilon$, és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ K_2-n egyenletesen konvergál $\chi_{K_1}\cdot f$-hez. Ekkor

$$m(K\backslash K_2)\leq m(K\backslash K_1)+m(K_1\backslash K_2)\leq 2\varepsilon\ ,$$

és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ K_2-n egyenletesen konvergál f-hez.

(3) $\Rightarrow$ (1) Legyen $K\in\mathcal{R}^p(T,L,m)$ és $\varepsilon>0$. Ekkor létezik $K_1\in\mathcal{R}^p(T,L,m)$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $L\otimes F$-beli sorozat úgy, hogy $K_1\subset K$, $m(K\backslash K_1)\leq\varepsilon$, és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ K_1-en egyenletesen f-hez konvergál. $n\in\mathbb{N}$ esetén f_n (T,L,m_p)-mérhető, így létezik $K_2\in\mathcal{R}(T,L,m)$ úgy, hogy $K_2\subset K_1$, $m(K_1\backslash K_2)\leq\varepsilon$, és K_2-n minden f_n (T,L,m_p)-mérhető lépcsősfüggvények egyenletes limese. Ekkor K_2-n f (T,L,m_p)-mérhető lépcsősfüggvények egyenletes limese, és $m(K\backslash K_2)\leq 2\varepsilon$, tehát f (T,L,m_p)-mérhető.

11.6 Integrálban való konvergencia

Lemma *Legyen m p-integrál a (T,L) mérhető tér felett, F metrizálható topologikus tér, $A\subset T$ (T,L,m_p)-mérhető halmaz, $f{:}A\to F$ leképezés. Ekkor a következők ekvivalensek:*

(1) minden $K\in\mathcal{R}^p(T,L,m)$, $K\subset A$ és $\varepsilon>0$ esetén létezik $K_1\in\mathcal{R}^p(T,L,m)$ úgy, hogy $K_1\subset K$, $m(K\backslash K_1)\leq\varepsilon$, és K_1-en f (T,L,m_p)-mérhető lépcsősfüggvények egyenletes limese.

(2) minden $a{\in}F$ *esetén*

$$g_a : T{\to}F\ ,\ t\mapsto\begin{cases} f(t) & ,\ \textit{ha}\ \ t{\in}A \\ a & ,\ \textit{ha}\ \ t{\in}T\backslash A\end{cases}\ ,$$

(T, L, m_p)*-mérhető.*

(3) létezik $g{:}T{\to}F$ (T, L, m_p)*-mérhető leképezés úgy, hogy* $f{=}g|_A$*.*

Bizonyítás (2) $\Rightarrow$ (3) és (3) $\Rightarrow$ (1) triviális

(1) $\Rightarrow$ (2) Legyen $K{\in}\mathcal{R}^p(T, L, m)$ és $\varepsilon{>}0$. Ekkor $K{\cap}A{\in}\mathcal{R}^p(T, L, m)$, így létezik $K_1{\in}\mathcal{R}^p(T,L,m)$ és (T,L,m_p)-mérhető lépcsősfüggvények $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, mely K_1-en egyenletesen f-hez konvergál, emellett $K_1{\subset}K{\cap}A$ és $m(K{\cap}A\backslash K_1){\le}\varepsilon$ teljesülnek. Legyen $K_2{:=}K_1{\cup}(K\backslash A){\in}\mathcal{R}(T, L, m)$, és $n{\in}\mathbb{N}$ esetén

$$g_n : T{\to}F\ ,\ t\mapsto\begin{cases} f_n(t) & ,\ \text{ha}\ \ t{\in}A \\ a & ,\ \text{ha}\ \ t{\in}T\backslash A\end{cases}\ ,$$

ekkor $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (T, L, m_p)-mérhető lépcsősfüggvény-sorozat, amely K_2-n egyenletesen g_a-hoz konvergál, és $m(K\backslash K_2){=}m(K{\cap}A\backslash K_1){\le}\varepsilon$.

Definíció Az előző lemma feltételei mellett az $f{:}A{\to}F$ leképezést *p-edik hatványon* (T, L, m)*-mérhetőnek* nevezzük, ha teljesül rá a lemma (1), (2) és (3) feltétele.

Megjegyzés Legyen m p-integrál a (T, L) mérhető tér felett, (F, d) metrikus tér, $A{\subset}T$ (T, L, m_p)-mérhető halmaz. Jelölje $\mathcal{S}_F(A, L, m)$ az $A{\to}F$ (T, L, m_p)-mérhető leképezések halmazát.

$K{\in}\mathcal{R}^p(T, L, m)$, $K{\subset}A$, $\varepsilon{>}0$ és $\delta{>}0$ esetén legyen

$$W(K, \varepsilon, \delta) := \{(f, g){\in}\mathcal{S}_F(A, L, m){\times}\mathcal{S}_F(A, L, m) : m(K{\cap}[d{\circ}(f, g){\ge}\epsilon]){\le}\delta\}\ .$$

Ekkor

$$\{W(K, \varepsilon, \delta) : K{\in}\mathcal{R}^p(T, L, m),\ K{\subset}A,\ \varepsilon{>}0,\ \delta{>}0\}$$

uniform stuktúra bázisa $\mathcal{S}_F(A, L, m)$ felett. Ha F normált tér $\mathbb{K}$ felett, akkor ezen uniform stuktúra topológiája $\mathbb{K}$-lineáris.

Ugyanis, $K'{\supset}K$, $\varepsilon'{\le}\varepsilon$, $\delta'{\le}\delta$ esetén $W(K', \varepsilon', \delta'){\subset}W(K, \varepsilon, \delta)$, így teljesül (B_I). Nyilvánvaló, hogy teljesül (U'_I), és

$$W(K, \varepsilon, \delta)^{-1} = W(K, \varepsilon, \delta)$$

miatt teljesül (U'_{II}). Továbbá,

$$W(K, \varepsilon, \delta){\circ}W(K, \varepsilon, \delta) \subset W(K, \varepsilon, 2\delta)$$

miatt teljesül (U'_{III}).

Legyen F normált tér, és $K{\in}\mathcal{R}^p(T, L, m)$, $K{\subset}A$, $\varepsilon{>}0$ és $\delta{>}0$ esetén legyen

$$T(K, \varepsilon, \delta) := W(K, \varepsilon, \delta)(0)\ .$$

Ekkor $f,g{\in}\mathcal{S}_F(A,L,m)$ esetén

$$(f,g){\in}W(K,\varepsilon,\delta) \Longleftrightarrow g{-}f{\in}T(K,\varepsilon,\delta)\ .$$

Továbbá

$$T(K,\varepsilon,\delta)+T(K,\varepsilon,\delta)\subset T(K,\varepsilon,2\delta)\ ,$$

azaz teljesül (EV_{III}). $\lambda{\in}\mathbb{K}\backslash\{0\}$ esetén

$$\lambda{\cdot}T(K,\varepsilon,\delta)=T(K,|\lambda|{\cdot}\varepsilon,\delta)\ ,$$

így teljesül (EV_{II}). Speciálisan, $|\lambda|{\leq}1$ esetén

$$\lambda{\cdot}T(K,\varepsilon,\delta)\subset T(K,\varepsilon,\delta)\ ,$$

tehát $T(K,\varepsilon,\delta)$ kiegyensúlyozott.

Legyen $f{\in}\mathcal{S}_F(A,L,m)$. Ekkor $(K{\cap}[\|f\|{\geq}n])_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{R}^p(T,L,m)$-beli monoton fogyó sorozat, melynek metszete üres, így $\lim\limits_n m(K{\cap}[\|f\|{\geq}n]){=}0$, így létezik $n{\in}\mathbb{N}$, $n{\geq}1/\varepsilon$ úgy, hogy $m(K{\cap}[\|f\|{\geq}n]){\leq}\delta$. Ekkor $(1/n^2){\cdot}f{\in}T(K,\varepsilon,\delta)$, következésképpen $f{\in}n^2{\cdot}T(K,\varepsilon,\delta)$, így $T(K,\varepsilon,\delta)$ elnyelő, tehát teljesül (EV_I).

Legyen $f,g{\in}\mathcal{S}_F(A,L,m)$ és $K{\in}\mathcal{R}^p(T,L,m)$, $K{\subset}A$. Ha m-majdnem minden $t{\in}K$ esetén $f(t){=}g(t)$, akkor $m(K{\cap}[f{\neq}g]){=}0$, így minden $\varepsilon{>}0$ és $\delta{>}0$ esetén $(f,g){\in}W(K,\varepsilon,\delta)$. Fordítva, ha minden $\varepsilon{>}0$ és $\delta{>}0$ esetén $(f,g){\in}W(K,\varepsilon,\delta)$, akkor minden $\varepsilon{>}0$ esetén $m(K{\cap}[d{\circ}(f,g){\geq}\varepsilon]){=}0$; mivel

$$K{\cap}[f{\neq}g]=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}K{\cap}[d{\circ}(f,g){\geq}1/n]\ ,$$

így $m(K{\cap}[f{\neq}g]){=}0$, tehát m-majdnem minden $t{\in}K$ esetén $f(t){=}g(t)$. Következésképpen, $\mathcal{S}_F(A,L,m)$ uniform környékeinek metszete:

$$\{(f,g){\in}\mathcal{S}_F(A,L,m)^2 : f \text{ és } g\ (T,L,m_p)\text{-lokálisan } m\text{-ekvivalensek}\}$$

A fent leírt uniform struktúrát $\mathcal{S}_F(A,L,m)$ felett az m *integrálban való konvergencia uniform struktúrájának* nevezzük. Ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{S}_F(A,L,m)$-beli sorozat, mely (T,L,m_p)-lokálisan m-majdnem mindenütt konvergál az $f{:}A{\to}F$ függvényhez, akkor a Jegorov-tétel szerint $f{\in}\mathcal{S}_F(A,L,m)$, és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ m integrálban konvergál f-hez.

144. Állítás *Legyen m p-integrál a (T,L) Stone-tulajdonságú mérhető tér felett, F Banach-tér. Ekkor $\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$-en az m_p félnorma topológiája majorálja az $\mathcal{S}_F(T,L,m)$ topológiája által generált altértopológiát, és $L{\otimes}F{\subset}\mathcal{S}_F(T,L,m)$ sűrű altér.*

Bizonyítás Legyen $\varepsilon{>}0$, $\delta{>}0$, és legyen $f{\in}\mathcal{L}^p_F(T,L,m)$ olyan, hogy $m_p(f){\leq}$ $\delta^{1/p}\varepsilon$. Ekkor $\chi_{[\|f\|\geq\varepsilon]}{\leq}(1/\varepsilon){\cdot}\|f\|{\leq}(1/\varepsilon^p){\cdot}\|f\|^p$, így minden $K{\in}\mathcal{R}^p(T,L,m)$ esetén

$$m(K{\cap}[\|f\|{\geq}\varepsilon])\leq m([\|f\|{\geq}\varepsilon])\leq(1/\varepsilon^p){\cdot}m(\|f\|^p)\leq\delta\ ,$$

tehát $f{\in}W(K,\varepsilon,\delta)$.

Legyen $f \in \mathcal{S}_F(T, L, m)$, $K \in \mathcal{R}^p(T, L, m)$ és $\delta > 0$. Ekkor létezik $n \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $m(K \cap [\|f\| \geq n]) \leq \delta$. Ekkor $g := \chi_{K \cap [\|f\| < n]} \cdot f$ (T, L, m_p)-mérhető leképezés, $[g \neq 0] \subset K$, $\|g\| \leq n \cdot \chi_{K \cap [\|f\| < n]}$, így $m(\|g\|) < +\infty$, következésképpen az integrálhatóság kritériuma szerint $g \in \mathcal{L}_F^p(T, L, m)$. Továbbá,

$$m(K \cap [f \neq g]) \leq m(K \cap [\|f\| \leq \varepsilon]) \leq \delta \ ,$$

így minden $\varepsilon > 0$ esetén $g - f \in W(K, \varepsilon, \delta)$. Tehát $\mathcal{L}_F^p(T, L, m) \subset \mathcal{S}_F(T, L, m)$ sűrű altér. Mivel $L \otimes F \subset \mathcal{L}_F^p(T, L, m)$ sűrű az m_p félnorma topológiájára nézve, így sűrű a gyengébb m integrálban való konvergencia topológiájára nézve is, következésképpen $L \otimes F \subset \mathcal{S}_F(T, L, m)$ sűrű altér.

Megjegyzés Legyen m p-integrál a (T, L) mérhető tér felett, (F, d) metrikus tér, $A \subset T$ (T, L, m_p)-mérhető halmaz. Nyilvánvaló, hogy ha A (T, L, m_p)-moderáns, akkor az $\mathcal{S}_F(A, L, m)$ uniform tér metrizálható. Ha ezen felül az (F, d) metrikus tér teljes, akkor $\mathcal{S}_F(A, L, m)$ teljes. Ugyanis megmutatható, hogy ha $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat ezen térben, akkor létezik olyan $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ részsorozata, hogy m-majdnem minden $t \in A$ esetén $(f_{n_k}(t))_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat F-ben, így létezik $f(t) := \lim\limits_k f_{n_k}(t) \in F$. Ekkor az A-n m-majdnem mindenütt értelmezett f leképezés Jegorov tétele szerint (T, L, m_p)-mérhető, és $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergál hozzá az $\mathcal{S}_F(A, L, m)$ térben, így $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is konvergál ehhez a függvényhez az $\mathcal{S}_F(A, L, m)$ térben.