A Poincaré-csoport ábrázolásai

Gruber Tibor

2002

Tartalomjegyzék

1 Bevezetés **7**
1.1 Féldirekt szorzatok ábrázolásai 7
1.2 Speciális relativisztikus téridőmodell Clifford-*-algebrája 16

2 Ábrázolások impulzustérben **23**
2.1 Az ábrázolásokról általában 23
2.2 Időszerű irreducibilis ábrázolások 27
2.3 Fényszerű irreducibilis ábrázolások 33
2.4 A foton ábrázolás 42

3 Ábrázolások téridőben **47**
3.1 Fourier-transzformációk 47
3.2 Időszerű irreducibilis ábrázolások 48
3.3 Fényszerű irreducibilis ábrázolások 56
3.4 A foton ábrázolás 63

Előszó

A könyv a Poincaré-csoport fedőcsoportjának irreducibilis folytonos unitér ábrázolásaival foglalkozik. Ezen ábrázolások szoros kapcsolatban vannak a Poincaré csoport irreducibilis folytonos unitér sugárábrázolásaival, melyek fontosak a speciális relativisztikus kvantummechanikai szabad részecskék leírásánál. A Poincaré csoport izomorf az úgynevezett vektoriális Poincaré-csoporttal, mely féldirekt szorzat alakú, így annak fedőcsoportja is ilyen. Lokálisan kompakt féldirekt szorzatok irreducibilis folytonos unitér ábrázolásai megkonstruálhatók a Mackey-féle reprezentációs tétel segítségével. Ennek a tételnek az eredeti alakja indukált unitér ábrázolások formájában ad lehetőséget teljes reprezentánsrendszer megkonstruálására, azonban megadható olyan alternatív forma, mely szerint a féldirekt szorzathoz asszociált transzformációcsoport pályáin értelmezett függvényeken adott ábrázolások formájában kapunk teljes reprezentánsrendszert.

A Poincaré csoport fedőcsoportja esetén ezen pályák szerint osztályozhatók az ábrázolások, az ún. időszerű ábrázolások egy tömeggel és spinnel rendelkező szabad részecske, a fényszerű ábrázolások közül bizonyosak pedig egy nulla tömegű és spinnel rendelkező szabad részecske állapotaival hozhatók kapcsolatba. Ezeket az ábrázolásokat explicit módon meg lehet adni.

1. Fejezet

Bevezetés

1.1 Féldirekt szorzatok ábrázolásai

Megjegyzés Legyen G lokálisan kompakt csoport, $H{\subset}G$ zárt részcsoport, U unitér ábrázolása H-nak az F Hilbert-téren. Jelölje $\mathcal{H}^U$ azon $f{:}G{\to}F$ folytonos függvények halmazát, melyekre létezik $K{\subset}G$ kompakt halmaz úgy, hogy $\mathrm{supp}(f){\subset}K{\cdot}H$, és mnden $s{\in}G$ és $t{\in}H$ esetén

$$f(st) = \left(\frac{\Delta_H(t)}{\Delta_G(t)}\right)^{1/2} {\cdot} U(t)^{-1} f(s)$$

teljesül. Ekkor $\mathcal{H}^U{\subset}C(G,F)$ lineáris altér.

Legyen β_G illetve β_H baloldali Haar-mérték G illetve H felett. Ekkor $f,g{\in}\mathcal{H}^U$ esetén az $\langle f,g\rangle_F{\cdot}\beta_G$ mérték faktorizálható β_H szerint, és $(\langle f,g\rangle_F{\cdot}\beta_G)/\beta_H$ kompakt tartójó mérték. A

$$\mathcal{H}^U{\times}\mathcal{H}^U \to \mathbb{C}\ ,\ (f,g) \mapsto ((\langle f,g\rangle_F{\cdot}\beta_G)/\beta_H)(1_{G/H})$$

leképezés skalárszorzat, melyet *Mackey-féle skalárszorzatnak* hívunk.

$s{\in}G$ esetén

$$V^U(s) : \mathcal{H}^U \to \mathcal{H}^U\ ,\ f \mapsto f{\circ}\gamma_G(s^{-1})$$

izometrikus leképezés, és V^U folytonos izometrikus ábrázolása G-nek a $\mathcal{H}^U$ skalárszorzatos téren, ennek teljessé tételét nevezzük a G csoport U *által indukált unitér ábrázolásának.* Ez folytonos unitér ábrázolása a G csopotnak.

Megjegyzés Tekintsük a $G{:=}N \textcircled{\tau} H$ lokálisan kompakt féldirekt szorzatot, azaz legyenek N és H lokálisan kompakt csoportok,

$$\tau : H \to \mathrm{Aut}(N)\ ,\ h \mapsto \tau_h$$

morfizmus úgy, hogy az

$$N{\times}H \to N\ ,\ (n,h) \mapsto \tau_h(n)$$

leképezés folytonos, G szorzásművelete pedig

$$((n,h),(n',h')) \mapsto (n\tau_h(n'),hh')\ .$$

Erre a szorzásműveletre nézve

$$(n,h)^{-1} = (\tau_h^{-1}(n^{-1}), h^{-1}) \ ,$$

és $x \in N$ esetén

$$(n,h)^{-1}(x,e_H)(n,h) = (\tau_h^{-1}(n^{-1}), h^{-1})(xn,h) = (\tau_h^{-1}(n^{-1}xn), e_H) \ ,$$

azaz az N-nel azonosítható $N \times \{e_H\}$ részhalmaz normálosztó G-ben.

A továbbiakban feltesszük, hogy N kommutatív, ekkor

$$(n,h)^{-1}(x,e_H)(n,h) = (\tau_h^{-1}(x), e_H) \ .$$

Jelölje $\hat{N}$ az N karaktereinek halmazát, ismeretes, hogy a pontonkénti szorzással és a kompakt konvergencia topológiájával ez szintén kommutatív lokálisan kompakt csoport. $\chi \in \hat{N}$ esetén legyen

$$\hat{\tau}_{(n,h)}\chi := \hat{\tau}_h \chi := \chi \circ \tau_h^{-1} \in \hat{N} \ ,$$

ekkor

$$\hat{\tau} : G \to \mathrm{Hom}(\hat{N}) \ , \ (n,h) \mapsto \hat{\tau}_{(n,h)}$$

folytonos topologikus ábrázolása G-nek az $\hat{N}$ lokálisan kompakt téren, azaz a

$$\hat{\tau} : G \times \hat{N} \to \hat{N} \ , \ ((n,h),\chi) \mapsto \hat{\tau}_{(n,h)}\chi$$

leképezés folytonos. Hasonlóan,

$$\hat{\tau} : H \to \mathrm{Hom}(\hat{N}) \ , \ h \mapsto \hat{\tau}_h$$

folytonos topologikus ábrázolása H-nak az $\hat{N}$ lokálisan kompakt téren.

Legyen $\chi_0 \in \hat{N}$, és

$$H_{\chi_0} := \{h \in H : \hat{\tau}_h \chi_0 = \chi_0\} \ ,$$

és

$$G_{\chi_0} := \{(n,h) \in G : \hat{\tau}_{(n,h)}\chi_0 = \chi_0\} \ ,$$

a χ_0 H-beli illetve G-beli stabilizátorai. Ezek zárt részcsoportjai H-nak illetve G-nek, és

$$G_{\chi_0} = N \times H_{\chi_0} \ .$$

Legyen U folytonos unitér ábrázolása a H_{χ_0} lokálisan kompakt csopornak az F Hilbert-téren, ekkor

$$\chi_0 \otimes U : G_{\chi_0} \to U(F) \ , \ (n,h) \mapsto \chi_0(n) \cdot U(h)$$

folytonos unitér ábrázolása a G_{χ_0} lokálisan kompakt csoportnak, így tekinthetjük a G csoport $\chi_0 \otimes U$ által indukált unitér ábrázolását. Az ilyen alakú ábrázolások az alábbi tétel miatt különösen fontosak.

1. Állítás (Mackey-féle reprezentációs tétel féldirekt szorzatokra indukált unitér ábrázolásokkal) *Legyen $G := N \textcircled{\tau} H$ lokálisan kompakt féldirekt szorzat, melyben N kommutatív és tegyük fel, hogy N és H megszámlálható bázisúak, $\hat{N}$ minden $\hat{\tau}$-pályája lokálisan kompakt, és létezik $\hat{N}$-nak olyan σ-kompakt részhalmaza, mely minden $\hat{\tau}$-pályát pontosan egy pontban metsz. Ekkor a G minden V irreducibilis folytonos unitér ábrázolásához létezik $\chi_0 \in \hat{N}$ és a H_{χ_0} stabilitás-csoportnak U irreducibilis folytonos unitér ábrázolása az F Hilbert-téren úgy, hogy V ekvivalens a $\chi_0 \otimes U$ által indukált unitér ábrázolással.*

Bizonyítás Kristóf János: Az analízis elemei IV., XVII. fejezet 11. pont. $\square$

Az indukált unitér ábrázolásoknál az ábrázolási tér és annak skalárszorzata bonyolult, az ábrázoló operátorok alakja egyszerű. A gyakorlatban jobban használható egy olyan alternatív alak, ahol mind az ábrázolás tere, mind annak skalárszorzata egyszerűbb, ezzel szemben az ábrázoló operátorok alakja bonyolultabb.

Tehát célunk az, hogy felírjuk a $\chi_0 \otimes U$ által indukált folytonos unitér ábrázolás ilyen, a gyakorlatban jól használható alternatív alakját. Ehhez Kristóf János: Az analízis elemei IV. című könyve XVII. fejezete (A harmonikus analízis elemei) 9., 10. és 11. pontjainak fogalmait és jelöléseit fogjuk használni. A továbbiakban feltesszük, hogy az N és a H lokálisan kompakt csoportok megszámlálható bázisúak (így σ-kompaktak és metrizálhatóak).

Legyen

$$r^H_{\chi_0} : H \to \hat{N}\ ,\ h \mapsto \hat{\tau}_h \chi_0$$

az orbitális függyény, ennek értékkészletét jelölje $H{\cdot}\chi_0$, ezt a χ_0 H-szerinti *pályá*jának nevezzük. Létezik egyetlen

$$\dot{r}^H_{\chi_0} : H/H_{\chi_0} \to H{\cdot}\chi_0$$

leképezés úgy, hogy $\dot{r}^H_{\chi_0} \circ \pi_{H/H_{\chi_0}} = r^H_{\chi_0}$, és ezen leképezés folytonos bijekció. Ha H σ-kompakt, és $H{\cdot}\chi_0$ Baire-tér, akkor ezen leképezés homeomorfizmus. Hasonlóan értelmezzük az $r^G_{\chi_0}$, $G{\cdot}\chi_0$ és $\dot{r}^G_{\chi_0}$ objektumokat is.

A χ_0 elem G és H szerinti pályái $\hat{N}$-ban megegyeznek, azaz

$$H{\cdot}\chi_0 = G{\cdot}\chi_0\ .$$

$(n, h) \in G$ esetén

$$\pi_{G/G_{\chi_0}}(n, h) = N \times \pi_{H/H_{\chi_0}}(h)\ ,$$

és az

$$A : H/H_{\chi_0} \to G/G_{\chi_0}\ ,\ \Theta \mapsto N \times \Theta$$

leképezés homeomorfizmus a két lokálisan kompakt tér között. Legyen $j_H : H/H_{\chi_0} \to H$ a $\pi_{H/H_{\chi_0}}$ kanonikus szürjekció jobbinverze, ekkor

$$j_G : G/G_{\chi_0} \to G\ ,\ N \times \Theta \mapsto (e_N, j_H(\Theta))$$

jobbinverze a $\pi_{G/G_{\chi_0}}$ kanonikus szürjekciónak. Legyen továbbá $C := j_H \circ (\dot{r}^H_{\chi_0})^{-1}$, ekkor

$$r^H_{\chi_0} \circ C = \dot{r}^H_{\chi_0} \circ \pi_{H/H_{\chi_0}} \circ j_H \circ (\dot{r}^H_{\chi_0})^{-1} = \mathrm{id}_{H\cdot\chi_0}\ ,$$

tehát C jobbinverze a $r^H_{\chi_0}$ orbitális függvénynek, azaz $\chi \in H{\cdot}\chi_0$ esetén

$$\hat{\tau}_{C(\chi)} \chi_0 = \chi.$$

Továbbá, $C \circ r^H_{\chi_0} = j_H \circ \pi_{H/H_{\chi_0}}$, azaz $h \in H$ esetén

$$j_H(\pi_{H/H_{\chi_0}}(h)) = C(\hat{\tau}_h \chi_0)\ .$$

Legyen β_N illetve β_H baloldali Haar-mérték N illetve H felett, Δ_H a H moduláris függvénye, és

$$\chi_\tau : H \to \mathbb{R}_+^* \ , \ h \mapsto \mathrm{mod}_N(\tau_h) \ .$$

Ekkor $\beta_G{:=}\beta_N{\otimes}\chi_\tau^{-1}{\cdot}\beta_H$ baloldali Haar-mérték G felett, és $\Delta_G{:=}1_N{\otimes}\chi_\tau^{-1}{\cdot}\Delta_H$ a moduláris függvénye G-nek. Hasonlók mondhatók a H_{χ_0} és $G_{\chi_0}{=}N{\times}H_{\chi_0}$ lokálisan kompakt csoportokra is, következésképpen $(n,h){\in}G_{\chi_0}$ esetén

$$\frac{\Delta_{G_{\chi_0}}(n,h)}{\Delta_G(n,h)} = \frac{\Delta_{H_{\chi_0}}(h)}{\Delta_H(h)} \ .$$

Legyen $\varrho_H{:}H{\to}\mathbb{R}_+^*$ folytonos leképezés úgy, hogy minden $h{\in}H$ és $h'{\in}H_{\chi_0}$ esetén

$$\varrho_H(hh') = \frac{\Delta_{H_{\chi_0}}(h')}{\Delta_H(h')}{\cdot}\varrho_H(h) \ .$$

Ekkor a

$$\varrho_G : G \to \mathbb{R}_+^* \ , \ (n,h) \mapsto \varrho_H(h)$$

folytonos leképezésre minden $(n,h){\in}G$ és $(n',h'){\in}G_{\chi_0}$ esetén

$$\varrho_G((n,h){\cdot}(n',h')) = \frac{\Delta_{G_{\chi_0}}(n',h')}{\Delta_G(n',h')}{\cdot}\varrho_G(n,h)$$

teljesül.

Legyen $f{\in}\mathcal{H}^{\chi_0,U}{:=}\mathcal{H}^{\chi_0\otimes U}$. Ekkor az

$$(n,h) \to \frac{1}{\sqrt{\varrho_G(n,h)}}(\chi_0{\otimes}U)\Big(j_G(\pi_{G/G_{\chi_0}}(n,h))^{-1}(n,h)\Big)f(n,h)$$

leképezés faktorizálható $\pi_{G/G_{\chi_0}}$ szerint. Azonban

$$j_G(\pi_{G/G_{\chi_0}}(n,h))^{-1}(n,h) = (\tau_{j_H(\pi_{H/H_{\chi_0}}(h))^{-1}}(n), j_H(\pi_{H/H_{\chi_0}}(h))^{-1}h) \ ,$$

következésképpen létezik egyetlen $\Psi_f{:}H{\cdot}\chi_0{\to}F$ leképezés úgy, hogy minden $(n,h){\in}G$ esetén

$$\Psi_f(\hat\tau_h\chi_0) = \frac{1}{\sqrt{\varrho_H(h)}}{\cdot}(\hat\tau_h\chi_0)(n){\cdot}U\Big(C(\hat\tau_h\chi_0)^{-1}h\Big)f(n,h) \ .$$

A

$$B : \mathcal{H}^{\chi_0,U} \to \mathcal{F}(H{\cdot}\chi_0, F) \ , \ f \mapsto \Psi_f$$

leképezés lineáris injekció, értékkészletét jelölje $\mathcal{H}^{\chi_0,U,C,\varrho_H}$, ennek elemei azon $\Psi{:}H{\cdot}\chi_0{\to}F$ függvények, melyek kompakt tartójúak, és a

$$h \mapsto U\Big(h^{-1}C(\hat\tau_h\chi_0)\Big)\Psi(\hat\tau_h\chi_0)$$

leképezés folytonos. Ha C folytonos, akkor $\mathcal{H}^{\chi_0,U,C,\varrho_H}{=}\mathcal{K}(H{\cdot}\chi_0,F)$.

$\Psi{\in}\mathcal{H}^{\chi_0,U,C,\varrho_H}$ és $(n,h){\in}G$ esetén

$$B^{-1}(\Psi)(n,h) = \sqrt{\varrho_H(h)}{\cdot}(\hat\tau_h\chi_0)(n^{-1}){\cdot}U\Big(h^{-1}C(\hat\tau_h\chi_0)\Big)\Psi(\hat\tau_h\chi_0) \ .$$

Tekintsük a G csoport $\chi_0 \otimes U$ által indukált lineáris ábrázolását a $\mathcal{H}^{\chi_0,U}$ vektortéren, azaz $(n,h)\in G$ esetén legyen

$$V^{\chi_0,U}(n,h) : \mathcal{H}^{\chi_0,U} \to \mathcal{H}^{\chi_0,U} \ , \ f \mapsto f\circ\gamma_G(n,h)^{-1} \ ,$$

és legyen

$$V^{\chi_0,U,C,\varrho_H}(n,h) := BV^{\chi_0,U}(n,h)B^{-1} \ ,$$

ekkor V^{χ_0,U,C,ϱ_H} lineáris ábrázolása a G csoportnak a $\mathcal{H}^{\chi_0,U,C,\varrho_H}$ vektortéren, mely ekvivalens a $V^{\chi_0,U}$ lineáris ábrázolással (a B lineáris bijekció összekapcsolja őket).

Adjuk meg ezen ábrázolás explicit alakját!

Mivel $\Psi\in\mathcal{H}^{\chi_0,U,C,\varrho_H}$ és $(n',h')\in G$ esetén

$$\begin{aligned}\Big(V^{\chi_0,U}(n,h)(B^{-1}(\Psi))\Big)(n',h') &= \Big(B^{-1}(\Psi)\circ\gamma_G(n,h)^{-1}\Big)(n',h') = \\ &= B^{-1}(\Psi)(\tau_{h^{-1}}(n^{-1}n'),h^{-1}h') = \\ &= \sqrt{\varrho_H(h^{-1}h')}\cdot(\hat{\tau}_{h^{-1}h'}\chi_0)(\tau_{h^{-1}}(n^{-1}n')^{-1})\cdot \\ &\quad \cdot U\Big((h^{-1}h')^{-1}C(\hat{\tau}_{h^{-1}h'}\chi_0)\Big)\Psi(\hat{\tau}_{h^{-1}h'}\chi_0) = \\ &= \sqrt{\varrho_H(h^{-1}h')}\cdot(\hat{\tau}_{h'}\chi_0)(n'^{-1}n)\cdot U\Big((h^{-1}h')^{-1}C(\hat{\tau}_{h^{-1}h'}\chi_0)\Big)\Psi(\hat{\tau}_{h^{-1}h'}\chi_0) \ ,\end{aligned}$$

következésképpen

$$\begin{aligned}\Big(V^{\chi_0,U,C,\varrho_H}(\Psi)\Big)(\hat{\tau}_{h'}\chi_0) &= B\bigg(\Big(V^{\chi_0,U}(n,h)(B^{-1}(\Psi))\Big)\bigg)(\hat{\tau}_{h'}\chi_0) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varrho_H(h')}}\cdot(\hat{\tau}_{h'}\chi_0)(n')\cdot U\Big(C(\hat{\tau}_{h'}\chi_0)^{-1}h'\Big)\cdot \\ &\quad \cdot\sqrt{\varrho_H(h^{-1}h')}\cdot(\hat{\tau}_{h'}\chi_0)(n'^{-1}n)\cdot U\Big((h^{-1}h')^{-1}C(\hat{\tau}_{h^{-1}h'}\chi_0)\Big)\Psi(\hat{\tau}_{h^{-1}h'}\chi_0) = \\ &= \sqrt{\frac{\varrho_H(h^{-1}h')}{\varrho_H(h')}}\cdot(\hat{\tau}_{h'}\chi_0)(n)\cdot U\Big(C(\hat{\tau}_{h'}\chi_0)^{-1}hC(\hat{\tau}_{h^{-1}h'}\chi_0)\Big)\Psi(\hat{\tau}_{h^{-1}h'}\chi_0) \ .\end{aligned}$$

Létezik egyetlen

$$f : H\times H\cdot\chi_0 \to \mathbb{R}^*_+ \qquad (*)$$

leképezés úgy, hogy minden $h,h'\in H$ esetén

$$f(h,\hat{\tau}_{h'}\chi_0) = \frac{\varrho_H(hh')}{\varrho_H(h')} \ ,$$

belátható, hogy ezen leképezés folytonos, és $(n,h)\in G$ és $\chi\in H\cdot\chi_0$ esetén

$$\begin{aligned}&\big(V^{\chi_0,U,C,\varrho_H}(n,h)(\Psi)\big)(\chi) = \\ &\qquad = \sqrt{f(h^{-1},\chi)}\cdot\chi(n)\cdot U\Big(C(\chi)^{-1}hC(\hat{\tau}_{h^{-1}}\chi)\Big)\Psi(\hat{\tau}_{h^{-1}}\chi) \ .\end{aligned}$$

Ez V^{χ_0,U,C,ϱ_H} explicit alakja. Felhívjuk a figyelmet, hogy ebben ϱ_H közvetlenül nem szerepel, csak a belőle származó f függvényen keresztül.

Most olyan skalárszorzatot értelmezünk $\mathcal{H}^{\chi_0,U,C,\varrho_H}$ felett, melyre nézve B izometrikus bijekció a Mackey-féle skalárszorzattal ellátott $\mathcal{H}^{\chi_0,U}$ és $\mathcal{H}^{\chi_0,U,C,\varrho_H}$ között.

Tegyük fel, hogy $H\cdot\chi_0$ lokálisan kompakt, és H σ-kompakt, ekkor $\dot{r}^G_{\chi_0}$ homeomorfizmus G/G_{χ_0} és $H\cdot\chi_0$ között. Ha $f,g\in\mathcal{H}^{\chi_0,U}$, akkor minden $(n,h)\in G$ esetén

$$\langle\Psi_f,\Psi_g\rangle_F(\hat{\tau}_h\chi_0)=\frac{1}{\varrho_H(h)}\langle f(n,h),g(n,h)\rangle_F \ ,$$

azaz

$$\langle\Psi_f,\Psi_g\rangle_F\circ r^G_{\chi_0}=\frac{1}{\varrho_G}\langle f,g\rangle_F \ .$$

Legyen

$$\mu:=\dot{r}^G_{\chi_0}\Big(\varrho_G\cdot\beta_G/\beta_{G_{\chi_0}}\Big) \ ,$$

ez pozitív Radon-mérték a $H\cdot\chi_0$ lokálisan kompakt téren, és ha $\varphi\in\mathcal{K}(G,[0,1])$ úgy, hogy $\mathrm{supp}(\langle\Psi_f,\Psi_g\rangle_F)\subset[\varphi^\flat{=}1]$, akkor

$$\left(\varphi\cdot\frac{1}{\varrho_G}\langle f,g\rangle_F\right)^\flat=\Big(\varphi\cdot\big(\langle\Psi_f,\Psi_g\rangle_F\circ r^G_{\chi_0}\big)\Big)^\flat=\langle\Psi_f,\Psi_g\rangle_F\circ\dot{r}^G_{\chi_0} \ ,$$

így

$$\begin{aligned}\mu\big(\langle\Psi_f,\Psi_g\rangle_F\big)&=(\varrho_G\cdot\beta_G/\beta_{G_{\chi_0}})(\langle\Psi_f,\Psi_g\rangle_F\circ\dot{r}^G_{\chi_0})=\\&=(\varrho_G\cdot\beta_G)\left(\varphi\cdot\frac{1}{\varrho_G}\langle f,g\rangle_F\right)=\beta_G\big(\varphi\cdot\langle f,g\rangle_F\big)=\Big((\langle f,g\rangle_F\cdot\beta_G)/\beta_{G_{\chi_0}}\Big)(1) \ ,\end{aligned}$$

ami éppen a Mackey-féle skalárszorszata f-nek és g-nek.

Tehát

$$(\Phi,\Psi)\mapsto\mu\big(\langle\Phi,\Psi\rangle_F\big)$$

a megfelelő tulajdonságú skalárszorzat $\mathcal{H}^{\chi_0,U,C,\varrho_H}$ felett.

Azonban a μ Radon-mértéket egyszerűbb alakban is elő tudjuk állítani. Legyen $\varphi\in\mathcal{K}(G,\mathbb{C})$, ekkor

$$\begin{aligned}\varphi^\flat\big(\pi_{G/G_{\chi_0}}(n,h)\big)&=\int\varphi((n,h)(n',h'))d\beta_{G_{\chi_0}}(n',h')=\\&=\int\int\varphi(n\tau_h(n'),hh')d\beta_N(n')\chi_\tau^{-1}(h')d\beta_{H_{\chi_0}}(h')=\\&=\int\int\varphi(nn',hh')d\beta_N(n')\chi_\tau^{-1}(hh')d\beta_{H_{\chi_0}}(h')=\\&=\int\Big(\int\varphi(n',hh')d\beta_N(n')\Big)\chi_\tau^{-1}(hh')d\beta_{H_{\chi_0}}(h')=\\&=\left(\Big(\int\varphi(n',.)d\beta_N(n')\Big)\chi_\tau^{-1}\right)^\flat\big(\pi_{H/H_{\chi_0}}(h)\big) \ ,\end{aligned}$$

n-től függetlenül, azaz

$$\varphi^\flat\circ A=\Big(\chi_\tau^{-1}\cdot\int\varphi(n',.)d\beta_N(n')\Big)^\flat \ ,$$

következésképpen

$$\Big(A(\varrho_H{\cdot}\beta_H/\beta_{H_{\chi_0}})\Big)(\varphi^\flat) = (\varrho_H{\cdot}\beta_H/\beta_{H_{\chi_0}})(\varphi^\flat{\circ}A) =$$
$$= \beta_H\Big(\varrho_H{\cdot}\chi_\tau^{-1}{\cdot}\int \varphi(n',.)d\beta_N(n')\Big) =$$
$$= \iint \varrho_H(h'){\cdot}\varphi(n',h')d\beta_N(n')\chi_\tau^{-1}(h'){\cdot}d\beta_H(h') =$$
$$= \iint \varrho_G(n',h'){\cdot}\varphi(n',h')d\beta_N(n')\chi_\tau^{-1}(h'){\cdot}d\beta_H(h') =$$
$$= (\varrho_G{\cdot}\beta_G)(\varphi) = (\varrho_G{\cdot}\beta_G/\beta_{G_{\chi_0}})(\varphi^\flat)\ ,$$

tehát

$$\varrho_G{\cdot}\beta_G/\beta_{G_{\chi_0}} = A\big(\varrho_H{\cdot}\beta_H/\beta_{H_{\chi_0}}\big)\ ,$$

így

$$\mu = \dot{r}^G_{\chi_0}\Big(A\big(\varrho_H{\cdot}\beta_H/\beta_{H_{\chi_0}}\big)\Big) = \dot{r}^H_{\chi_0}\big(\varrho_H{\cdot}\beta_H/\beta_{H_{\chi_0}}\big)\ .$$

Legyen $h{\in}H$, ekkor

$$\hat{\tau}_h(\mu) = \hat{\tau}_h\Big(\dot{r}^H_{\chi_0}\big(\varrho_H{\cdot}\beta_H/\beta_{H_{\chi_0}}\big)\Big) = \dot{r}^H_{\chi_0}\Big(\gamma_{H/H_{\chi_0}}(h)\big(\varrho_H{\cdot}\beta_H/\beta_{H_{\chi_0}}\big)\Big) =$$
$$= \dot{r}^H_{\chi_0}\Big(f(h^{-1},\dot{r}^H_{\chi_0}(.)){\cdot}\big(\varrho_H{\cdot}\beta_H/\beta_{H_{\chi_0}}\big)\Big) = f(h^{-1},\,.\,){\cdot}\mu\ ,$$

tehát μ $\hat{\tau}$-kváziinvariáns Radon-mérték $H{\cdot}\chi_0$ felett f multiplikátorfüggvénnyel (ez ugyanaz a ϱ_H-ból származó leképezés, mint a $(*)$-gal jelölt formulában).

Ha a C leképezés Borel-mérhető, akkor $\Psi{\in}\mathcal{H}^{\chi_0,U,C,\varrho_H}$ esetén a

$$h \mapsto \Psi(\hat{\tau}_h\chi_0)$$

leképezés Borel mérhető. Ha H megszámlálható bázisú, akkor ebből a Varadarajan: Geometry of Quantum Theory VIII.4. Theorem 8.11. szerint következik, hogy Ψ Borel-mérhető, ekkor $\mathcal{H}^{\chi_0,U,C,\varrho_H}{\subset}\mathcal{L}^2_F(\mu)$, így a $\mathcal{H}^{\chi_0,U,C,\varrho_H}$ skalárszorzatos térhez asszociált Hilbert-tér megadható $L^2_F(\mu)$ zárt lineáris altereként, melyre V^{χ_0,U,C,ϱ_H} kiterjeszthető a G folytonos unitér ábrázolásává, mely unitér ekvivalens a G $\chi_0{\otimes}U$ által indukált folytonos unitér ábrázolásával. Ha C folytonos, akkor ezen altér megegyezik az $L^2_F(\mu)$ Hilbert-térrel.

Az eddig elmondottak alapján lokálisan kompakt féldirekt szorzatokra a Mackey-féle reprezentációs tétel olyan alternatív alakját fogalmazhatjuk meg, mely a gyakorlatban sokszor jobban alkalmazható, mint az indukált unitér ábrázolásokkal megfogalmazott eredeti alak.

2. Állítás (Mackey-féle reprezentációs tétel féldirekt szorzatokra, alternatív alak) *Legyen $G{:=}N{\circledT}H$ lokálisan kompakt féldirekt szorzat, melyben N kommutatív és tegyük fel, hogy N és H megszámlálható bázisúak, $\hat{N}$ minden $\hat{\tau}$-pályája lokálisan kompakt, és létezik $\hat{N}$-nak olyan σ-kompakt részhalmaza, mely minden $\hat{\tau}$-pályát pontosan egy pontban metsz. Ekkor a G minden V irreducibilis folytonos unitér ábrázolásához létezik*

- *$\omega{\subset}\hat{N}$ $\hat{\tau}$-pálya,*

- *$\chi_0 \in \omega$,*
- *U irreducibilis folytonos unitér ábrázolása a H_{χ_0} stabilitás-csoportnak az F Hilbert-téren,*
- *$C{:}\omega \to H$ Borel-mérhető leképezés, mely jobbinverze a $h \mapsto \hat{\tau}_h \chi_0$ függvénynek,*
- *$f{:}H \times \omega \to \mathbb{R}_+^*$ folytonos függvény,*
- *μ nemnulla pozitív Radon-mérték ω felett, mely $\hat{\tau}$-kváziinvariáns f multiplikátorfüggvénnyel, azaz minden $h \in H$ esetén $\hat{\tau}_h(\mu) = f(h^{-1}, \,.\,) \cdot \mu$*

úgy, hogy V ekvivalens a következő folytonos izometrikus ábrázolás teljessé tételével:

(1) Az ábrázolás tere: jelölje $\mathcal{H}^{\chi_0, U, C}$ azon $\Psi{:}\omega \to F$ kompakt tartójú függvények halmazát, melyekre

$$h \mapsto U\Big(h^{-1} C(\hat{\tau}_h \chi_0)\Big) \Psi(\hat{\tau}_h \chi_0)$$

folytonos.

(2) Az ábrázolási tér skalárszorzata:

$$(\Phi, \Psi) \to \mu\big(\langle \Phi, \Psi \rangle_F\big) \ .$$

(3) Az ábrázolás operátora: $(n,h) \in G$, $\Psi \in \mathcal{H}^{\chi_0, U, C}$, $\chi \in \omega$ esetén

$$\big(V^{\chi_0, U, C, f}(n,h)(\Psi)\big)(\chi) = \\ = \sqrt{f(h^{-1}, \chi)} \cdot \chi(n) \cdot U\Big(C(\chi)^{-1} h C(\hat{\tau}_{h^{-1}} \chi)\Big) \Psi(\hat{\tau}_{h^{-1}} \chi) \ .$$

Megjegyzés Ezzel megadtuk a Mackey-tétellel megkonstruálható ábrázolások gyakorlatban jól használható alternatív alakját. Ezen ábrázolások $\hat{\tau}$-pályákon értelmezett függvények $\hat{\tau}$-kváziinvariáns mérték szerinti L^2-típusú skalárszorzattal ellátott terén hatnak. Kellemetlen azonban, hogy a C leképezés, az orbitális függvény jobbinverze, explicit módon szerepel benne. Speciális esetekben megadhatók olyan ekvivalens ábrázolások, melyekben egyáltalán nem szerepel a C függvény.

Definíció Legyen U folytonos unitér ábrázolása a H_{χ_0} stabilitás-csoportnak az F Hilbert-téren. Azt mondjuk, hogy az $(F, U, \check{F}, \check{U})$ négyesre teljesül az **(EXT)** tulajdonság, ha $\check{F}$ Hilbert-tér, úgy, hogy $F \subset \check{F}$ zárt lineáris altér,

$$\check{U} : H \to GL(\check{F})$$

folytonos lineáris ábrázolás úgy, hogy minden $h \in H_{\chi_0}$ esetén $\check{U}(h)|_F = U(h)$.

Azt mondjuk, hogy az $(F, U, \check{F}, \check{U})$ négyesre teljesül az **(EXT')** tulajdonság, ha **(EXT)** teljesül, és létezik $\alpha{:}H \cdot \chi_0 \to \mathbb{R}_+^*$ lokálisan μ-integrálható leképezés úgy, hogy minden $\chi \in H \cdot \chi_0$ és minden $y \in F$ esetén

$$\|y\|_F^2 = \alpha(\chi) \cdot \|\check{U}(C(\chi)) y\|_{\check{F}}^2 \ , \qquad (*)$$

Legyen $\omega{:=}H{\cdot}\chi_0$. Ha **(EXT)** teljesül, akkor

$$\check{S} : \mathcal{H}^{\chi_0,U,C} \to \mathcal{F}(\omega,\check{F}) \ , \ \Psi \mapsto \check{U}(C(\,.\,))\Psi$$

lineáris injekció, értékkészletét jelölje $\check{\mathcal{H}}^{\chi_0,U,C}$, ennek elemei azon $\check{\Psi}{:}\omega{\to}\check{F}$ kompakt tartójú függvények, melyekre $\check{U}(C(\,.\,))^{-1}\check{\Psi}{\in}\mathcal{H}^{\chi_0,U,C}$, azaz

$$h \mapsto U\Big(h^{-1}C(\hat{\tau}_h\chi_0)\Big)\check{U}\Big(C(\hat{\tau}_h\chi_0)\Big)^{-1}\check{\Psi}(\hat{\tau}_h\chi_0)$$

folytonos és F-értékű, egyszerűsítve

$$h \mapsto \check{U}(h^{-1})\check{\Psi}(\hat{\tau}_h\chi_0)$$

folytonos és F-értékű, a folytonosság azonban $\check{U}$ folytonossága miatt azzal ekvivalens, hogy $h{\mapsto}\check{\Psi}(\hat{\tau}_h\chi_0)$ folytonos, ami az obitális függvény nyíltsága miatt pedig azzal ekvivalens, hogy $\check{\Psi}$ folytonos.

Legyen $(n,h){\in}G$ esetén

$$\check{V}^{\chi_0,U,C,f}(n,h) := \check{S}{\circ}V^{\chi_0,U,C,f}(n,h){\circ}\check{S}^{-1} \ ,$$

ekkor $\check{V}^{\chi_0,U,C,f}$ izometrikus ábrázolása a G csoportnak a $\check{\mathcal{H}}^{\chi_0,U,C}$ skalárszorzatos téren, mely ekvivalens a $V^{\chi_0,U,C,f}$ izometrikus ábrázolással, explicit alakja könnyen kiszámítható.

Tehát, ha az $(F,U,\check{F},\check{U})$ négyesre teljesül az **(EXT)** tulajdonság, akkor a következő folytonos izometrikus ábrázolás ekvivalens a $V^{\chi_0,U,C,f}$ folytonos izometrikus ábrázolással:

(1) Az ábrázolás tere:

$$\check{\mathcal{H}}^{\chi_0,U,C} = \{\check{\Psi}{\in}\mathcal{K}(\omega,\check{F}) : \text{minden } \chi{\in}\omega \text{ esetén } \ \check{U}(C(\chi))^{-1}\check{\Psi}(\chi){\in}F\} \ .$$

(2) Az ábrázolási tér skalárszorzata:

$$(\check{\Phi},\check{\Psi}) \mapsto \mu\Big(\big\langle\check{U}(C(.))^{-1}\check{\Phi},\check{U}(C(.))^{-1}\check{\Psi}\big\rangle_F\Big) \ .$$

(3) Az ábrázoló operátorok: $(n,h){\in}G$, $\check{\Psi}{\in}\check{\mathcal{H}}^{\chi_0,U,C}$ és $\chi{\in}\omega$ esetén

$$\big(\check{V}^{\chi_0,U,C,f}(n,h)(\check{\Psi})\big)(\chi) = \sqrt{f(h^{-1},\chi)}{\cdot}\chi(n){\cdot}\check{U}(h)\check{\Psi}(\hat{\tau}_{h^{-1}}\chi) \ .$$

Az ábrázoló operátorok alakja valamivel egyszerűbb, mint a $V^{\chi_0,U,C,f}$ esetén, és ami még fontosabb, nem függ C-től.

Ha **(EXT')** teljesül, akkor minden $\chi{\in}\omega$ és minden $x{\in}\check{U}(C(\chi))\langle F\rangle$ esetén

$$\|\check{U}(C(\chi))^{-1}x\|_F^2 = \alpha(\chi){\cdot}\|x\|_{\check{F}}^2 \ , \qquad (*)$$

akkor a $\check{\mathcal{H}}^{\chi_0,U,C}$ tér skalárszorzatából származó norma négyzete

$$\check{\Psi} \mapsto \mu\Big(\|\check{U}(C(.))^{-1}\check{\Phi}\|_F^2\Big) = \mu\Big(\alpha{\cdot}\|\check{\Phi}\|_{\check{F}}^2\Big) = (\alpha{\cdot}\mu)\Big(\|\check{\Phi}\|_{\check{F}}^2\Big) \ ,$$

következésképpen a $\check{V}^{\chi_0,U,C,f}$ folytonos izometrikus ábrázolás teljessé tétele a következőképpen adható meg

(1) Az ábrázolás tere:

$$\hat{\mathcal{H}}^{\chi_0,U,C} = \{\Psi\in L^2_{\check{F}}(\alpha\cdot\mu) : \mathrm{Ran}(\check{U}(C(.))^{-1}\Psi)\subset F\}\ .$$

(2) Az ábrázolási tér skalárszorzata:

$$(\Phi,\Psi)\mapsto \int \langle\Phi,\Psi\rangle_{\check{F}}\, d(\alpha\mu)\ .$$

(3) Az ábrázoló operátorok: $(n,h)\in G$, $\Psi\in\hat{\mathcal{H}}^{\chi_0,U,C}$ és $\chi\in\omega$ esetén

$$\big(\hat{V}^{\chi_0,U,C,f}(n,h)(\Psi)\big)(\chi) = \sqrt{f(h^{-1},\chi)}\cdot\chi(n)\cdot\check{U}(h)\Psi(\hat{\tau}_{h^{-1}}\chi)\ .$$

Itt az ábrázoló tér skalárszorzata nem függ C-től, és bizonyos esetekben az ábrázolási tér (1) formulájában szereplő $\mathrm{Ran}(\check{U}(C(.))^{-1}\Psi)\subset F$ feltétel sem. Emiatt ha teljesül **(EXT')**, akkor ezt az unitér ábrázolást fogjuk tekintani.

1.2 Speciális relativisztikus téridőmodell Clifford-*-algebrája

Megjegyzés Legyen Z kétdimenziós Hilbert-tér $\mathbb{C}$ felett. Ekkor

$$H(Z) := \{A\in L(Z) : A^*{=}A\}\ ,$$

illetve

$$P(Z) := \{A\in H(Z) : \mathrm{Tr}(A){=}0\}$$

3 illetve 4-dimenziós $\mathbb{R}$-lineáris alterek $L(Z)$-ben úgy, hogy

$$H(Z) = \mathbb{R}\cdot\mathrm{id}_Z + P(Z)\ . \tag{$*$}$$

Nyilvánvaló, hogy

$$H(Z)\to H(Z)\ ,\ E\mapsto E^\bullet := E - \mathrm{Tr}(E)\cdot\mathrm{id}_Z$$

lineáris bijekció úgy, hogy minden $E\in H(Z)$ esetén $E^{\bullet\bullet}{=}E$.

3. Állítás *A*

$$H(Z)\times H(Z)\to\mathbb{R}\ ,\ (E,F)\mapsto (E|F) := \frac{1}{2}\cdot\mathrm{Tr}(E^\bullet F)$$

leképezés Lorentz-forma, leszűkítése $P(Z)\times P(Z)$-re skalárszorzat.

Bizonyítás Nyilvánvaló, hogy a fenti leképezés szimmetrikus és bilineáris. Ha $E\in H(Z)$ mátrixa egy ortonormált bázisban

$$\begin{pmatrix}\alpha & z\\ z^* & \beta\end{pmatrix}\ ,$$

akkor $(E|E) = -\alpha\beta + |z|^2$, következésképpen $E\in P(Z)$, azaz $\beta{=}-\alpha$ esetén $(E|E)$ $=\alpha^2+|z|^2$, így

$$P(Z)\times P(Z)\to\mathbb{R}\ ,\ (E,F)\mapsto (E|F)$$

pozitív definit. Nyilvánvaló továbbá, hogy $(\mathrm{id}_Z \,|\, \mathrm{id}_Z) = -1$, így $(*)$ miatt $(\,.\,|\,.\,)$ Lorentz-féle.

Megjegyzés $E \in H(Z)$ esetén $(E|E) = -\det(E)$.

Megjegyzés Az egyszerűség kedvéért bevezetjük az $(\,.\,\|\,.\,) := -(\,.\,|\,.\,)$ jelölést.

Definíció Azt mondjuk, hogy a $P(Z)$-beli (S_1, S_2, S_3) ortonormált bázis *pozitívan irányított*, ha $S_1 \cdot S_2 = i \cdot S_3$ teljesül, és ekkor az $(\mathrm{id}_Z, S_1, S_2, S_3)$ $H(Z)$-beli ortonormált bázist is *pozitívan irányítottnak* nevezzük. Azt mondjuk, hogy $\mathrm{id}_Z \in H(Z)$ *pozitív nyílirányítású.* Ezekkel a definíciókkal $(H(Z), \mathbb{R}, (\,.\,|\,.\,))$ speciális relativisztikus téridőmodell.

Megjegyzés $Z = \mathbb{C}^2$ esetén az úgynevezett *Pauli-mátrixok*, azaz

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;,\quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \;,\quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \;,$$

pozitívan irányított ortonormált bázist alkotnak $P(\mathbb{C}^2)$-ben

Fordítva, tetszőleges Z esetén, ha S_1, S_2, S_3 pozitívan irányított ortonormált bázis $P(Z)$-ben, akkor létezik olyan ortonormált bázis Z-ben, melyben S_1, S_2, S_3 mátrixai éppen a $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ Pauli-mátrixok.

Ugyanis, ha z_1 és z_2 egységvektorok Z-ben, melyek az S_3 $+1$ és -1 sajátértékhez tartozó sajátvektorai, akkor az $(S_1|S_3) = (S_2|S_3) = 0$ feltételből következik, hogy S_1 és S_2 (z_1, z_2) bázisbeli mátrixának főátlójában 0 van, az $(S_1|S_1) = (S_2|S_1) = 1$ feltételből pedig az, hogy a mellékátlóbeli elemek egységnyi abszolút értékűek. Ha még az $S_1 S_2 = i S_3$ feltételt is kihasználjuk, akkor kapjuk, hogy S_1 és S_2 mátrixai

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda^* & 0 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} 0 & -i\lambda \\ i\lambda^* & 0 \end{pmatrix} \;,$$

alakúak valamlyen $\lambda \in \mathbb{T}$ esetén. Ha $\alpha \in \mathbb{T}$ olyan, hogy $\alpha^2 = \lambda$, akkor az $(\alpha z_1, \alpha^* z_2)$ bázisban S_1 és S_2 mátrixa σ_1 és σ_2.

4. Állítás *$E, F \in H(Z)$ esetén*

$$E^\bullet F + F^\bullet E = 2\,(E|F) \cdot \mathrm{id}_Z \;.$$

Bizonyítás Legyen

$$E = \begin{pmatrix} \alpha_1 & z_1 \\ z_1^* & \beta_1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad F = \begin{pmatrix} \alpha_2 & z_2 \\ z_2^* & \beta_2 \end{pmatrix} \;,$$

ekkor

$$E^\bullet F = \begin{pmatrix} -\alpha_2\beta_1 + z_1 z_2^* & -\beta_1 z_2 + \beta_2 z_1 \\ \alpha_2 z_1^* - \alpha_1 z_2^* & -\alpha_1\beta_2 + z_1^* z_2 \end{pmatrix} \;,$$

így

$$\mathrm{Tr}(E^\bullet F) = -\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + z_1 z_2^* + z_1^* z_2 \;,$$

és

$$E^\bullet F + F^\bullet E = \begin{pmatrix} \mathrm{Tr}(E^\bullet F) & 0 \\ 0 & \mathrm{Tr}(E^\bullet F) \end{pmatrix} = 2\,(E|F) \cdot \mathrm{id}_Z \;.$$

Következmény $S, T \in P(Z)$ esetén

$$ST + TS = 2\,(S|T) \cdot \mathrm{id}_Z \ ,$$

azaz az $i{:}H(Z) \to L(Z)$ kanonikus beágyazás Clifford-függvény.

Megjegyzés Ha (S_1, S_2, S_3) pozitívan irányított ortonormált bázis $P(Z)$-ben, akkor az

$$S_1 S_2 = i \cdot S_3$$

egyenletet jobbról S_3-mal, balról S_1-gyel szorozva kapjuk:

$$S_2 S_3 = i \cdot S_1 \ ,$$

hasonlóan,

$$S_3 S_1 = i \cdot S_2 \ .$$

Következésképpen, az

$$\begin{array}{ll} \mathrm{id}_Z & \\ S_i & i{=}1,2,3 \\ S_i S_j & i,j{=}1,2,3 \ ; \ i{<}j \\ S_1 S_2 S_3 & \end{array}$$

rendszer valós bázis $L(Z)$-ben.

5. Állítás *A* $(P(Z), \mathbb{R}, (\,.\,|\,.\,))$ *euklidészi tér Clifford-algebrája* $(L(Z), i)$.

Bizonyítás Legyen C valós egységelemes algebra, $h{:}P(Z) \to C$ Clifford-függvény, és $\overline{h}$ az egyetlen $L(Z) \to C$ valós lineáris leképezés, melyre

$$\begin{array}{rll} \overline{h}(\mathrm{id}_Z) := 1 & \\ \overline{h}(S_i) := h(S_i) & i{=}1,2,3 \\ \overline{h}(S_i S_j) := h(S_i)h(S_j) & i,j{=}1,2,3 \ ; \ i{<}j \\ \overline{h}(S_1 S_2 S_3) := h(S_1)h(S_2)h(S_3) & \end{array}$$

teljesül. Ekkor az előzőek szerint $\overline{h}$ jól értelmezett, egységelemtartó valós algebra-morfizmus úgy, hogy $h{=}\overline{h} \circ i$.

Megjegyzés A

$$(Z{\times}Z) \times (Z{\times}Z) \to \mathbb{C} \ , \ \ ((x,y),(u,v)) \mapsto \langle (x,y)|\,(u,v)\rangle := \langle x,v\rangle \cdot \langle y,u\rangle$$

leképezés nemelfajult Hermite-forma, de nem skalárszorzat. $L \in L(Z{\times}Z)$ esetén jelölje $L^\sharp$ az L $\langle\,.\,|\,.\,\rangle$-adjungáltját. Ha a szokásos módon az $L \in L(Z{\times}Z)$ elemet az

$$L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

alakba írjuk, akkor

$$L^\sharp = \begin{pmatrix} \delta^* & \beta^* \\ \gamma^* & \alpha^* \end{pmatrix} \ .$$

6. Állítás *A*

$$j : H(Z) \to L(Z{\times}Z)\ ,\ E \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -E^\bullet \\ E & E \end{pmatrix}$$

leképezés $\langle\,.\,|\,.\,\rangle$*-önadjungált Clifford függvény a* $(H(Z), \mathbb{R}, (\,.\,\|\,.\,))$ *pszeudoeuklidészi tér felett.*

Bizonyítás Az előző megjegyzés szerint $E{\in}H(Z)$ esetén $j(E)^\sharp{=}j(E)$. Legyen $E, F{\in}H(Z)$, ekkor

$$j(E)j(F) = \begin{pmatrix} -E^\bullet F & 0 \\ 0 & -EF^\bullet \end{pmatrix}\ ,$$

következésképpen

$$\begin{aligned} &j(E)j(F) + j(F)j(E) = \\ &\qquad = \begin{pmatrix} -E^\bullet F - F^\bullet E & 0 \\ 0 & -EF^\bullet - FE^\bullet \end{pmatrix} = \\ &\qquad\qquad = \begin{pmatrix} -2\,(E|F)\cdot \mathrm{id}_Z & 0 \\ 0 & -2\,(E^\bullet|F^\bullet)\cdot \mathrm{id}_Z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Azonban

$$(E^\bullet|F^\bullet) = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{Tr}(EF^\bullet) = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{Tr}(F^\bullet E) = (F|E) = (E|F)\ ,$$

így

$$j(E)j(F) + j(F)j(E) = 2\,(E\|F)\cdot \mathrm{id}_{Z\times Z}\ .$$

Megjegyzés Legyen (S_1, S_2, S_3) pozitívan irányított ortonormált bázis $P(Z)$-ben, és legyen $S_0{:=}\,\mathrm{id}_Z$. Ekkor

$$\begin{aligned} j(S_0) &= \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_Z \\ \mathrm{id}_Z & 0 \end{pmatrix}\ , \\ j(S_1) &= \begin{pmatrix} 0 & -S_1 \\ S_1 & 0 \end{pmatrix}\ , \\ j(S_2) &= \begin{pmatrix} 0 & -S_2 \\ S_2 & 0 \end{pmatrix}\ , \\ j(S_3) &= \begin{pmatrix} 0 & -S_3 \\ S_3 & 0 \end{pmatrix}\ , \end{aligned}$$

és ebből egyszerű számolással belátható, hogy az

$$\begin{array}{ll} \mathrm{id}_{Z\times Z} & \\ j(S_i) & i{=}0,1,2,3 \\ j(S_i)j(S_j) & i,j{=}0,1,2,3\ ;\ i{<}j \\ j(S_i)j(S_j)j(S_k) & i,j,k{=}0,1,2,3\ ;\ i{<}j{<}k \\ j(S_0)j(S_1)j(S_2)j(S_3) & \end{array}$$

rendszer komplex bázis $L(Z{\times}Z)$-ben.

Megjegyzés $Z{=}\mathbb{C}^2$ esetén legyen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ a három Pauli mátrix, és

$$\sigma_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Ekkor a

$$\gamma_0 := j(\sigma_0) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix} ,$$
$$\gamma_k := j(\sigma_k) = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} , \ k{=}1,2,3$$

mátrixokat *Dirac-mátrixoknak* nevezzük.

7. Állítás *A* $(H(Z), \mathbb{R}, (\,.\,\|\,.\,))$ *pszeudoeuklidészi tér Clifford-*-algebrája* $(L(Z{\times}Z), j)$.

Bizonyítás Legyen C egységelemes *-algebra, $h{:}H(Z){\to}C$ önadjungált Clifford-függvény, és $\overline{h}$ az egyetlen $L(Z{\times}Z){\to}C$ komplex lineáris leképezés, melyre

$$\begin{aligned}
\overline{h}(\mathrm{id}_{Z\times Z}) &:= 1 \\
\overline{h}(j(S_i)) &:= h(S_i) && i{=}0,1,2,3 \\
\overline{h}(j(S_i)j(S_j)) &:= h(S_i)h(S_j) && i,j{=}0,1,2,3\,;\ i{<}j \\
\overline{h}(j(S_i)j(S_j)j(S_k)) &:= h(S_i)h(S_j)h(S_k) && i,j,k{=}0,1,2,3\,;\ i{<}j{<}k \\
\overline{h}(j(S_0)j(S_1)j(S_2)j(S_3)) &:= h(S_0)h(S_1)h(S_2)h(S_3)
\end{aligned}$$

teljesül. Ekkor az előzőek szerint $\overline{h}$ jól értelmezett, egységelemtartó *-algebramorfizmus úgy, hogy $h{=}\overline{h}{\circ}j$.

Következmény Legyen $(M, \mathbb{I}, g)$ adott speciális relativisztikus téridőmodell, Z kétdimenziós Hilbert-tér $\mathbb{C}$ felett, és

$$r : \frac{\mathbb{M}}{\mathbb{I}} \to H(Z)$$

irányítás és nyílirányítástartó ortogonális bijekció, $\gamma{:=}j{\circ}r$. Ekkor $(\mathbb{M}, \mathbb{I}, -g)$ Clifford-*-algebrája $(L(Z{\times}Z), \gamma)$.

Megjegyzés Legyen V vektortér, $A{\in}L(V)$ olyan, hogy $A^2{=}\alpha{\cdot}\,\mathrm{id}_V$, ahol $\alpha{>}0$. Ekkor A-nak két sajátértéke van, éspedig $\sqrt{\alpha}$ és $-\sqrt{\alpha}$, és V előáll a két sajátaltér direkt összegeként. Ugyanis, $x{\in}V$ esetén

$$x = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(\sqrt{\alpha}\,\mathrm{id}_V - A)(x) + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(\sqrt{\alpha}\,\mathrm{id}_V + A)(x) ,$$

és az összeg első tagja $-\sqrt{\alpha}$, a második $\sqrt{\alpha}$ sajátértékhez tartozó sajátvektor.

Megjegyzés Legyen $E{\in}H(Z)$ olyan, hogy $(E|E)\,{<}0$. Ekkor

$$j(E)^2{=}\,(E\|E)\cdot\mathrm{id}_{Z\times Z}$$

miatt az előzőek szerint $Z{\times}Z$ előáll az

$$N_\pm(E) := \mathrm{Ker}\left(j(E) \mp \sqrt{(E\|E)}{\cdot}\,\mathrm{id}_{Z\times Z}\right)$$

sajátalterek direkt összegeként. Ezen alterek lineárisak izomorfak egymással, ugyanis ha $0 \neq F \in H(Z)$ olyan, hogy $(E|F) = 0$, akkor a

$$j(F)\left(j(E) \pm \sqrt{(E\|E)}\cdot \mathrm{id}_{Z\times Z}\right) + \left(j(E) \mp \sqrt{(E\|E)}\cdot \mathrm{id}_{Z\times Z}\right) j(F) = 0$$

összefüggés szerint $j(F)_{|N_+(E)}$ lineáris bijekció $N_+(E)$ és $N_-(E)$ között. Következésképpen $N_+(E)$ és $N_-(E)$ kétdimenziós lineáris alterei $Z\times Z$-nek.

8. Állítás *Legyen $E \in H(Z)$ olyan, hogy $(E|E) < 0$, és $a \in N_\pm(E)$. Ekkor*

$$(\mathrm{id}_Z \|E)\,\langle a|\,a\rangle = \pm\sqrt{(E\|E)}\,\langle a, a\rangle \ .$$

Bizonyítás A

$$j(E)j(\mathrm{id}_Z)a + j(\mathrm{id}_Z)j(E)a = 2\,(\mathrm{id}_Z \|E)\cdot a$$

azonosságot balról a-val szorozva a $\langle\,.\,|\,.\,\rangle$ szerint, kapjuk

$$\pm 2\sqrt{(E\|E)}\,\langle a|\,j(\mathrm{id}_Z)a\rangle = 2\,(\mathrm{id}_Z \|E)\cdot\langle a|\,a\rangle \ ,$$

és $\langle a|\,j(\mathrm{id}_Z)a\rangle = \langle a, j(\mathrm{id}_Z)j(\mathrm{id}_Z)a\rangle = \langle a, a\rangle$.

Következmény Legyen $E \in H(Z)$ olyan, hogy $(E|E) < 0$. Ekkor a $\langle\,.\,|\,.\,\rangle$ Hermite-forma leszűkítése $N_\pm(E)\times N_\pm(E)$-ra definit, és pontosan akkor pozitív definit, ha E $\pm$-nyilú.

Bizonyítás Az előzőek szerint $a \in N_+(E)$ esetén

$$\langle a|\,a\rangle = \pm\frac{\sqrt{(E\|E)}}{(\mathrm{id}_Z \|E)}\cdot\|a\|^2 \ .$$

Továbbá, E pontosan akkor pozitív nyilú, ha $(E\|\,\mathrm{id}_Z) > 0$.

2. Fejezet

Ábrázolások impulzustérben

2.1 Az ábrázolásokról általában

Megjegyzés Legyen $(M, \mathbb{I}, g)$ speciális relativisztikus téridőmodell, és jelölje L ennek ortogonális csoportját, az úgynevezett *Lorentz-csoportot*, $L^{+\rightarrow}$ pedig ennek irányítás és nyílirányítástartó elemeiből álló részcsoportját, az úgynevezett *valódi Lorentz-csoportot.* Legyen

$$P := \{F{:}M{\rightarrow}M \text{ affin, } DF{\in}L\}$$

a *Poincaré-csoport*, és

$$P^{+\rightarrow} := \{F{:}M{\rightarrow}M \text{ affin, } DF{\in}L^{+\rightarrow}\}$$

a *valódi Poincaré-csoport.*

Hasonlóan, legyen

$$P_v := \mathbb{M} \circledS L$$

a *vektoriális Poincaré-csoport*, és

$$P_v^{+\rightarrow} := \mathbb{M} \circledS L^{+\rightarrow}$$

a *valódi vektoriális Poincaré-csoport.* Ha az $(a, A){\in}P_v$ elemet azonosítjuk az

$$\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M} \ , \ \mathbf{x} \mapsto a + A\mathbf{x}$$

affin leképezéssel, akkor a P_v féldirekt szorzat szorzásművelete, mely a kompozícióval azonosul:

$$(a, A){\cdot}(a', A') := (a + Aa', AA') \ .$$

Megjegyzés Legyen Z kétdimenziós Hilbert-tér $\mathbb{C}$ felett. $A{\in}L(Z)$ esetén

$$\hat{A} : H(Z) \rightarrow H(Z) \ , \ X \mapsto AXA^*$$

lineneáris leképezés; ha $(M, \mathbb{I}, g)$ speciális relativisztikus téridőmodell, és

$$r : \frac{\mathbb{M}}{\mathbb{I}} \to H(Z)$$

irányítás és nyílirányítástartó ortogonális bijekció, akkor

$$\delta_r(A) := (r^{-1} \circ \hat{A} \circ r)^{\mathbb{I}} \in L(\mathbb{M}) \ .$$

Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy $\delta_r(A)$ pontosan akkor Lorentz-transzformáció, ha $|\det(A)|{=}1$, ezért bevezetjük az

$$SL(Z) := \{A{\in}L(Z) : \det(A){=}1\}$$

és

$$SU(Z) := \{A{\in}SL(Z) : AA^*{=}\,\mathrm{id}_Z\} \ ,$$

jelöléseket. $SL(Z)$ a kompozícióval és az $L(Z)$-től örökölt részsokaság struktúrával 3-dimenziós komplex (6-dimenziós valós) Lie-csoport, mely összefüggő, egyszeresen összefüggő és félegyszerű.

$A{\in}SL(Z)$ esetén $\delta_r(A){\in}L^{+\rightarrow}$, és a

$$\delta_r : SL(Z) \to L^{+\rightarrow}$$

leképezés szürjektív valós-analitikus csoport-morfizmus, magja $\{\mathrm{id}_Z, -\,\mathrm{id}_Z\}$, és az $(SL(Z), \delta_r)$ pár az $L^{+\rightarrow}$ egy fedőcsoportja.

$$\delta_r : SL(Z) \to GL(\mathbb{M})$$

csoport-morfizmus úgy, hogy az

$$SL(Z){\times}\mathbb{M} \to \mathbb{M} \ , \ (A, \mathbf{x}) \mapsto \delta_r(A)\mathbf{x}$$

leképezés analitikus, ezért képezhető az

$$\mathbb{M} \circledS_{\delta_r} SL(Z)$$

Lie-féldirekt szorzat. Ez 10-dimenziós valós Lie-csoport, összefüggő és egyszeresen összefüggő, csoportművelete

$$(\mathbf{x}, A){\cdot}(\mathbf{x}', A') := (\mathbf{x} + \delta_r(A)\mathbf{x}', AA') \ .$$

Továbbá,

$$(\mathrm{id}_{\mathbb{M}}, \delta_r) : \mathbb{M} \circledS_{\delta_r} SL(Z) \to P_v^{+\rightarrow} \ , \ (\mathbf{x}, A) \mapsto (\mathbf{x}, \delta_r(A))$$

szürjektív, valós analitikus csoport-morfizmus, magja

$$\{(0, \mathrm{id}_Z), (0, -\,\mathrm{id}_Z)\} \ ,$$

és $(\mathbb{M} \circledS_{\delta_r} SL(Z), (\mathrm{id}_{\mathbb{M}}, \delta_r))$ a $P_v^{+\rightarrow}$ egy fedőcsoportja.

Megjegyzés A továbbiakban az 1.1. rész eredményeit fogjuk alkalmazni az $\mathbb{M} \circledS_{\delta_r} SL(Z)$ lokálisan kompakt féldirekt szorzatra.

Az

$$\mathbb{M}^* \to \hat{\mathbb{M}} \ , \ k \mapsto \chi_k := e^{-i\cdot k(.)}$$

leképezés izomorfizmus a két topologikus csoport között, ha ezt azonosításnak tekintjük, akkor az $\mathbb{M} \circledS SL(Z)$ csoport $\hat{\delta}_r$ ábrázolása az $\mathbb{M}^*$ lokálisan kompakt csoporton a következőképpen adható meg: ha $\sharp$ jelöli a g-adjungáltat $\mathbb{M}$ felett, akkor, kihasználva, hogy $A{\in}SL(Z)$ esetén $\delta_r(A)$ Lorentz-transzformáció, azaz $\delta_r(A)^{-1}{=}\delta_r(A)^\sharp$, $k{\in}\mathbb{M}^*$ és $A{\in}SL(Z)$ esetén

$$\hat{\delta}_r(A)k = k{\circ}\delta_r(A)^{-1} = (\delta_r(A)^{-1})^* k =$$
$$= (\delta_r(A)^{-1})^\sharp_{\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}} k = \delta_r(A)_{\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}} k = r_{\mathbb{I}}^{-1}(A r_{\mathbb{I}}(k) A^*) \ ,$$

tehát

$$\hat{\delta}_r(A) = (\delta_r(A)^{-1})^* = \delta_r(A)_{\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}} \ .$$

Érdemes még megemlíteni, hogy

$$\hat{\delta}_r(A^{-1}) = \delta_r(A)^* \ .$$

$k{\in}\mathbb{M}^*$ $SL(Z)$-beli stabilizátora

$$SL(Z)_k = \{A{\in}SL(Z) : \hat{\delta}_r(A)k{=}k\} = \{A{\in}SL(Z) : A r_{\mathbb{I}}(k) A^*{=}r_{\mathbb{I}}(k)\} \ .$$

$\omega{\subset}\mathbb{M}^*$ $\hat{\delta}_r$-pálya és $k_0{\in}\omega$ esetén a $C : \omega{\to}SL(Z)$ leképezés pontosan akkor jobb-inverze az $A{\mapsto}\hat{\delta}_r(A)k_0$ függvénynek, ha minden $k{\in}\omega$ esetén

$$C(k) r_{\mathbb{I}}(k_0) C(k)^* = r_{\mathbb{I}}(k)$$

teljesül.

9. Állítás *Az* $(SL(Z), \mathbb{M}^*, \hat{\delta}_r)$ *transzformációcsoport pályái:* $m{\in}(\mathbb{I}^*)^+$ *esetén*

$$\begin{aligned}
V(m)^\pm &:= \{k{\in}\mathbb{M}^* : g^*(k,k){=}{-}m^2 \text{ és } k \text{ pozitív/negatív nyílú}\},\\
V(0)^\pm &:= \{k{\in}\mathbb{M}^* : g^*(k,k){=}0 \text{ és } k \text{ pozitív/negatív nyílú}\},\\
V(im) &:= \{k{\in}\mathbb{M}^* : g^*(k,k){=}m^2\},\\
V_0 &:= \{0\}.
\end{aligned}$$

Megjegyzés A fenti halmazok mindegyike lokálisan kompakt részhalmaza $\mathbb{M}^*$-nak.

Megjegyzés $m{\in}(\mathbb{I}^*)^+$ esetén $V(m)^\pm$, $V(0)^\pm$ és $V(im)$ 3-dimenziós részsokaságok $\mathbb{M}^*$-ban, $V(m)^\pm$ és $V(im)$ g^*-pszeudoeuklidésziek, sőt, $V(m)^\pm$ g^*-euklidészi.

Legyen $c{\in}V(1)$ esetén

$$h_c : \mathbb{M}^* \to \mathbb{E}_c^* \ , \ k \mapsto k - c\otimes (k\|c) \ ,$$

ekkor

- $h_c|_{V(m)^\pm} : V(m)^\pm \to \mathbb{E}_c^*$ diffeomorfizmus, inverze

$$\mathbf{p} \mapsto \pm\sqrt{|\mathbf{p}|^2{+}m^2}{\otimes}c + \mathbf{p}$$

- $h_c|_{V(0)^\pm} : V(0)^\pm \to \mathbb{E}_c^*\backslash\{0\}$ diffeomorfizmus, inverze
$$\mathbf{p} \mapsto \pm|\mathbf{p}|\otimes c + \mathbf{p}$$
- $h_c|_{V(im)} : V(im) \to \{\mathbf{p}\in\mathbb{E}_c^* : |\mathbf{p}|\geq m\}$ sima szürjekció, sima jobbinverzei
$$\mathbf{p} \mapsto \pm\sqrt{|\mathbf{p}|^2-m^2}\otimes c + \mathbf{p}$$

Megjegyzés Legyen $m\in(\mathbb{I}^*)^+$.

- Jelölje $\mu_m^\pm$ a $V(m)^\pm$ euklidészi résszsokaság kanonikus mértékét, ez $(\mathbb{I}^*)^3$-értékű pozitív Radon-mérték, mely $\hat{\delta}_r$-invariáns. $c\in V(1)$ esetén jelölje λ_c az $(\mathbb{E}_c^*, \mathbb{I}^*, g^*)$ euklidészi tér kanonikus mértékét, ekkor
$$h_c|_{V(m)^\pm}(\mu_m^\pm) = \frac{m}{\sqrt{|\,.\,|^2+m^2}}\cdot\lambda_c\ .$$
- Belátható, hogy létezik egyetlen $\mu_0^\pm$ $(\mathbb{I}^*)^2$-értékű pozitív Radon-mérték $V(0)^\pm$ felett úgy, hogy minden $c\in V(1)$ esetén
$$h_c|_{V(0)^\pm}(\mu_0^\pm) = \frac{1}{|\,.\,|}\cdot\lambda_c$$
teljesül. Ezen mérték szintén $\hat{\delta}_r$-invariáns.
- $V(im)$ felett szintén lehet $\hat{\delta}_r$-invariáns $(\mathbb{I}^*)^3$-értékű pozitív Radon-mértéket megadni.
- V_0 felett δ_0 $\hat{\delta}_r$-invariáns pozitív Radon-mérték.

Megjegyzés Tudjuk, hogy a $GL(Z)$ unimoduláris lokálisan kompakt csoport, és mivel $SL(Z)$ zárt normálosztó benne, szintén unimoduláris lokálisan kompakt csoport. Mivel az $(SL(Z), \mathbb{M}^*, \hat{\delta}_r)$ transzformációcsoport valamennyi pályáján létezik nemnulla $\hat{\delta}_r$-invariáns mérték, így tetszőleges $k\in\mathbb{M}^*$ esetén az $SL(Z)_k$ zárt részcsoport unimoduláris.

Az $\mathbb{M}\circledS_{\delta_r} SL(Z)$ féldirekt szorzat mindkét tényezője megszámlálható bázisú lokálisan kompakt csoport, melyben az $(SL(Z), \mathbb{M}^*, \hat{\delta}_r)$ transzformációcsoport minden pályája lokálisan kompakt, és nyilvánvaló, hogy létezik olyan σ-kompakt részhalmaza $\mathbb{M}^*$-nak, mely minden pályát pontosan egy pontban metsz. Így a Mackey-féle reprezentációs tétel féldirekt szorzatokra vonatkozó alternatív alakja (2. Állítás) alkalmazható.

10. Állítás (Mackey-féle reprezentációs tétel az $\mathbb{M}\circledS_{\delta_r} SL(Z)$ féldirekt szorzatra) *Az $\mathbb{M}\circledS_{\delta_r} SL(Z)$ lokálisan kompakt csoport minden V irreducibilis folytonos unitér ábrázolásához létezik*

- *$\omega\subset\mathbb{M}^*$ $\hat{\delta}_r$-pálya,*
- *$k_0\in\omega$,*
- *U irreducibilis folytonos unitér ábrázolása a $S(Z)_{k_0}$ stabilitás-csoportnak az F Hilbert-téren,*

- *$C : \omega \to SL(Z)$ Borel-mérhető leképezés, mely jobbinverze az $A \mapsto \hat{\delta}_r(A)k_0$ függvénynek,*
- *μ nemnulla pozitív $\hat{\delta}_r$-invariáns Radon-mérték ω felett,*

úgy, hogy V ekvivalens a következő folytonos izometrikus ábrázolás teljessé tételével:

(1) Az ábrázoás tere: jelölje $\mathcal{H}^{k_0,U,C}$ azon $\Psi{:}\omega \to F$ kompakt tartójú függvények halmazát, melyekre

$$A \mapsto U\Big(A^{-1}C(\hat{\delta}_r(A)k_0)\Big)\Psi(\hat{\delta}_r(A)k_0)$$

folytonos.

(2) Az ábrázolási tér skalárszorzata:

$$(\Phi, \Psi) \to \mu\big(\langle \Phi, \Psi \rangle_F\big) \ .$$

(3) Az ábrázoló operátorok: $(\mathbf{x}, A) \in \mathbb{M} \circledS_{\delta_r} SL(Z)$, $\Psi \in \mathcal{H}^{k_0,U,C}$, $k \in \omega$ esetén

$$\big(V^{k_0,U,C}(\mathbf{x}, A)(\Psi)\big)(k) = \chi_k(\mathbf{x}) \cdot U\Big(C(k)^{-1}AC(\delta_r(A)^* k)\Big)\Psi(\delta_r(A)^* k) \ .$$

Megjegyzés Mivel $\mathbb{M}^*$ elemei a négyesimpulzusok, az $\mathbb{M} \circledS_{\delta_r} SL(Z)$ lokálisan kompakt féldirekt szorzatnak a Mackey-féle reprezentációs tétel szerint megkonstruált ábrázolásait *(négyes)impulzustérbeli ábrázolásoknak* nevezzük, és őket az $(SL(Z), \mathbb{M}^*, \hat{\delta}_r)$ transzformációcsoport pályái szerint a következőképpen osztályozzuk:

- $V(m)^{\pm}$: m-tömegű *pozitív/negatív időszerű ábrázolások*,
- $V(0)^{\pm}$: *pozitív/negatív fényszerű ábrázolások*,
- $V(im)$: im-tömegű *térszeű ábrázolások*,
- V_0 : *nullábrázolások.*

A továbbiakban az időszerű és fényszerű ábrázolásokkal foglalkozunk. Ebben a két esetben konkrétan meg tudjuk adni a stabilizátorok ábrázolásait és a C keresztmetszet-függvényeket, emellett megadunk olyan Hilbert-tereket és az $SL(Z)$ csoport olyan folytonos lineáris ábrázolásait, hogy teljesülnek az **(EXT)** és **(EXT')** feltételek, és az így kapott ábrázolások Hilbert-tere, annak skalárszorzata és az ábrázoló operátorok alakja független a kereszmetszet- függvénytől.

2.2 Időszerű irreducibilis ábrázolások

Megjegyzés Először az m-tömegű pozitív/negatív időszerű ábrázolásokat vizsgáljuk. $m \in (\mathbb{I}^*)^*_+$ esetén legyen $\mu^{\pm}_m$ a $V(m)^{\pm}$ kanonikus mértéke osztva m^3-nal. Ez pozitív $\hat{\delta}_r$-invariáns Radon-mérték $V(m)^{\pm}$ felett.

Megjegyzés Ha $m\in(\mathbb{I}^*)^*_+$ és $c_r := r^{-1}(\mathrm{id}_z)\in V(1)$, akkor $\pm m\otimes c_r\in V(m)^\pm$, és

$$SL(Z)_{\pm m\otimes c_r} = \{A\in SL(Z) : AA^* = \mathrm{id}_Z\} = SU(Z) .$$

$SU(Z)$ kompakt részcsoportja $SL(Z)$-nak, és 3-dimenziós valós Lie-csoport.

$\sigma\in\frac{1}{2}\mathbb{N}$ esetén $Z^\sigma := \overset{2\sigma}{\circledvee} Z$ $(2\sigma+1)$-dimenziós komplex Hilbert-tér, legyen

$$B^\sigma : SL(Z)\to L(Z^\sigma) \ , \ A\mapsto \overset{2\sigma}{\circledvee} A \ ,$$

ekkor $\{B^\sigma|_{SU(Z)} : \sigma\in\frac{1}{2}\mathbb{N}\}$ az $SU(Z)$ csoport irreducibilis folytonos unitér ábrázolásainak egy teljes reprezentánsrendszere.

11. Állítás

$$C : V(m)^\pm \to SL(Z) \ , \ k\mapsto \frac{1}{\sqrt{2\mp\dfrac{2k\cdot c_r}{m}}}\Big(\mathrm{id}_Z \pm r\big(\tfrac{k}{m}\big)\Big)$$

folytonos jobbinverze az

$$A\mapsto \hat{\delta}_r(A)(\pm m\otimes c_r)$$

függvénynek.

Bizonyítás

$$\det\Big(\mathrm{id}_Z \pm r\big(\tfrac{k}{m}\big)\Big) = \det r\big(c_r\pm\tfrac{k}{m}\big) = -\Big(r\big(c_r\pm\tfrac{k}{m}\big)|r\big(c_r\pm\tfrac{k}{m}\big)\Big) =$$
$$= -\big(c_r\pm\tfrac{k}{m}|c_r\pm\tfrac{k}{m}\big) = 2\mp\frac{2k\cdot c_r}{m} \ ,$$

következésképpen $\det C(k)=1$, azaz $C(k)\in SL(Z)$. Továbbá, $E\in H(Z)$ esetén

$$(E-\mathrm{Tr}(E)\,\mathrm{id}_Z)E = E^\bullet E = (E|E)\cdot\mathrm{id}_Z$$

miatt

$$E^2 - \mathrm{Tr}(E)\cdot E - (E|E)\cdot\mathrm{id}_Z = 0 \ ,$$

azaz

$$E^2 = (E|E)\cdot\mathrm{id}_Z - 2\,(\mathrm{id}_Z|E)\cdot E \ ,$$

következésképpen

$$r\big(\tfrac{k}{m}\big)^2 = -\,\mathrm{id}_Z - \frac{2k\cdot c_r}{m}\cdot r\big(\tfrac{k}{m}\big) \ ,$$

így

$$C(k)C(k)^* = \frac{1}{2\mp\dfrac{2k\cdot c_r}{m}}\cdot\Big(\mathrm{id}_Z \pm 2r\big(\tfrac{k}{m}\big) + r\big(\tfrac{k}{m}\big)^2\Big) =$$
$$= \frac{1}{2\mp\dfrac{2k\cdot c_r}{m}}\cdot\Big(\pm 2r\big(\tfrac{k}{m}\big) - \frac{2k\cdot c_r}{m}\cdot r\big(\tfrac{k}{m}\big)\Big) = \pm r\big(\tfrac{k}{m}\big) \ ,$$

így

$$C(k)r\big(\pm c_r\big)C(k)^* = r\big(\tfrac{k}{m}\big) \ ,$$

tehát C jobbinverze az $A\mapsto\hat{\delta}_r(A)(\pm m\otimes c_r)$ leképezésnek.

Megjegyzés Legyen

$$j : H(Z) \to L(Z{\times}Z) \ , \ E \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -E^\bullet \\ E & E \end{pmatrix} \ ,$$

és $\gamma{:=}j{\circ}r$. Tudjuk, hogy $u{\in}\mathbb{M}/\mathbb{I}$, $(u|u)<0$ esetén $\gamma(u)$ sajátértékei $\pm\sqrt{(u\|u)}$, a megfelelő sajátalterek $N_\pm(u){:=}N_\pm(r(u))$ 2-dimenziós kiegészítő alterek a $Z{\times}Z$ vektortérben. Speciálisan, $\gamma(c_r){=}j(\mathrm{id}_Z)$ sajátértékei ±1, és

$$N_\pm(c_r) = \{(x, \pm x) : x{\in}Z\} \ .$$

Tehát $N{:=}N_+(c_r)$ 2-dimenziós altér $Z{\times}Z$-ben, és

$$U : Z \to N \ , \ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(x, x)$$

unitér leképezés. $A{\in}SL(Z)$ esetén legyen

$$D(A) := \begin{pmatrix} A^{*-1} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \ ,$$

ekkor D lineáris ábrázolása $SL(Z)$-nek a $Z{\times}Z$ vektortéren úgy, hogy minden $A{\in}SU(Z)$ esetén N invariáns altere $D(A)$-nak, és

$$D(A)|_N = U{\circ}B^{1/2}(A){\circ}U^{-1} \ ,$$

tehát

$$SU(Z) \to U(N) \ , \ A \mapsto D(A)|_N$$

unitér ábrázolása $SU(Z)$-nek, mely U által ekvivalens $B^{1/2}|_{SU(Z)}$-vel.

Megjegyzés Legyen $E{\in}H(Z)$ és $A{\in}SL(Z)$. Ekkor

$$(AEA^*)^\bullet = A^{*-1}E^\bullet A^{-1} \ . \qquad (*)$$

Ugyanis, $EE^\bullet{=}(E|E)\cdot\mathrm{id}_Z$ miatt az

$$(AEA^*)^\bullet(AEA^*) = (E|E)\cdot\mathrm{id}_Z$$

egyenlőséget jobbról szorozva az $A^{*-1}E^\bullet A^{-1}$ operátorral kapjuk, hogy

$$(E|E)\cdot(AEA^*)^\bullet = (E|E)\cdot A^{*-1}E^\bullet A^{-1} \ .$$

Ebből $(E|E)\neq0$ esetén következik a kívánt egyenlőség, azonban $(*)$ mindkét oldala lineáris E-ben, és megegyezik az $(E|E)\neq0$ halmazon, következésképpen minden $E{\in}H(Z)$ esetén fennáll.

Megjegyzés A 11. Állításban bevezetett $C{:}V(m)^\pm \to SL(Z)$ függvényre tetszőleges $k{\in}V(m)^\pm$ esetén

$$C(k)r\big(\pm c_r\big)C(k)^* = r\Big(\tfrac{k}{m}\Big) \ ,$$

teljesül, így az előző megjegyzés szerint

$$C(k)^{*-1}r(\pm c_r)^{\bullet}C(k)^{-1} = r\left(\frac{k}{m}\right)^{\bullet} ,$$

következésképpen

$$\begin{aligned}
&D(C(k))\gamma(\pm c_r)D(C(k))^{-1} = \\
&= \begin{pmatrix} C(k)^{*-1} & 0 \\ 0 & C(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -r(\pm c_r)^{\bullet} \\ r(\pm c_r) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C(k)^{*} & 0 \\ 0 & C(k)^{-1} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -C(k)^{*-1}r(\pm c_r)^{\bullet}C(k)^{-1} \\ C(k)r(\pm c_r)C(k)^{*} & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -r\left(\frac{k}{m}\right)^{\bullet} \\ r\left(\frac{k}{m}\right) & 0 \end{pmatrix} = \gamma\left(\frac{k}{m}\right) ,
\end{aligned}$$

tehát

$$D(C(k))\gamma(\pm c_r)D(C(k))^{-1} = \gamma\left(\frac{k}{m}\right) ,$$

így $w{\in}Z{\times}Z$ esetén $D(C(k))^{-1}w{\in}N$, azaz

$$\gamma(\pm c_r)D(C(k))^{-1}w = D(C(k))^{-1}w$$

ekvivalens azzal, hogy $w{\in}N_\pm\left(\frac{k}{m}\right)$, azaz

$$\gamma\left(\frac{k}{m}\right)w = \pm w .$$

Tetszőleges $A{\in}SL(Z)$ esetén $D(A)^{\sharp}{=}D(A)^{-1}$, azaz $D(A)$ $\langle\,.\,|\,.\,\rangle$-unitér, tehát $w{\in}Z{\times}Z$ esetén a 8. Állítás szerint

$$\begin{aligned}
\|D(C(k))^{-1}w\|^2 &= \left\langle D(C(k))^{-1}w \middle| \, D(C(k))^{-1}w\right\rangle = \\
&= \langle w|\, w\rangle = \pm\frac{m}{(k\|c_r)}{\cdot}\|w\|^2 . \qquad (*)
\end{aligned}$$

Megjegyzés $\sigma{\in}\frac{1}{2}\mathbb{N}$ esetén legyen

$$(Z{\times}Z)^\sigma := \begin{cases} \overset{2\sigma}{\textcircled{$\vee$}}(Z{\times}Z) & \text{, ha } \sigma{\neq}0 , \\ (Z{\times}Z)\wedge(Z{\times}Z) & \text{, ha } \sigma{=}0 . \end{cases}$$

$(Z{\times}Z)^\sigma$ $\sigma{\neq}0$ esetén $\binom{2\sigma+3}{3}$-dimenziós, $\sigma{=}0$ esetén 6-dimenziós komplex Hilbert tér.

Hasonlóan, $k{\in}V(m)^\pm$ esetén

$$N_\pm\left(\frac{k}{m}\right)^\sigma := \begin{cases} \overset{2\sigma}{\textcircled{$\vee$}} N_\pm\left(\frac{k}{m}\right) & \text{, ha } \sigma{\neq}0 , \\ N_\pm\left(\frac{k}{m}\right){\wedge}N_\pm\left(\frac{k}{m}\right) & \text{, ha } \sigma{=}0 . \end{cases}$$

$(2\sigma{+}1)$-dimenziós altér $(Z{\times}Z)^\sigma$-ban. Speciálisan, $N^\sigma{:=}N_+(c_r)^\sigma$ is $(2\sigma{+}1)$-dimenziós altér $(Z{\times}Z)^\sigma$-ban.

$$D^\sigma : SL(Z) \to L((Z\times Z)^\sigma)\ ,\ A \mapsto \begin{cases} \overset{2\sigma}{\circledvee} D(A) & ,\text{ ha } \ \sigma\neq 0 \\ D(A)\wedge D(A) & ,\text{ ha } \ \sigma=0 \end{cases}$$

lineáris ábrázolás, és

$$B'^\sigma : SU(Z) \to U(N^\sigma)\ ,\ A \mapsto D^\sigma(A)|_{N^\sigma}$$

unitér ábrázolása $SU(Z)$-nek, mely $\sigma\neq 0$ esetén $\overset{2\sigma}{\circledvee} U$, $\sigma=0$ esetén $U\wedge U$ által ekvivalens $B^\sigma|_{SU(Z)}$-vel.

Az $(N^\sigma, B'^\sigma, (Z\times Z)^\sigma, D^\sigma)$ négyesre teljesül az **(EXT)** tulajdonság. Ez $\sigma\neq 0$ esetén következik az előzőekből, $\sigma=0$ esetén pedig $B'^0 = \mathrm{id}_{N^0}$, és $A\in SU(Z)$ esetén $A|_N$ unitér leképezés, következésképpen $\det(A|_N)\in\mathbb{T}$, és

$$SU(Z) \to U(N^0)\ ,\ A \mapsto D^0(A)|_{N^0} = D(A)\wedge D(A)|_{N^0} = \det(A|_N)\cdot \mathrm{id}_{N^0}$$

1-dimenziós ábrázolás, azonban $SU(Z)$-nek nincs nem-triviális 1-dimenziós unitér ábrázolása, így $D^0(A)|_{N^0} = \mathrm{id}_{N^0} = B'^0(A)$ minden $A\in SU(Z)$ esetén.

Legyen $\sigma\neq 0$, $\nu=1,\ldots,2\sigma$ és $u\in\mathbb{M}/\mathbb{I}$ esetén legyen

$$\gamma(u)^\nu := \overset{1}{\mathrm{id}_{Z\times Z}} \otimes\ldots\otimes \mathrm{id}_{Z\times Z} \otimes \overset{\nu}{\gamma(u)} \otimes \mathrm{id}_{Z\times Z} \otimes\ldots\otimes \overset{2\sigma}{\mathrm{id}_{Z\times Z}}\ |_{(Z\times Z)^\sigma}\ ,$$

ekkor minden $\nu=1,\ldots,2\sigma$ esetén

$$D^\sigma(C(k))\gamma(\pm c_r)^\nu D^\sigma(C(k))^{-1} = \gamma\left(\tfrac{k}{m}\right)^\nu\ ,$$

így $w\in(Z\times Z)^\sigma$ esetén $D^\sigma(C(k))^{-1}w\in N^\sigma$ ekvivalens azzal, hogy $w\in N_\pm\left(\frac{k}{m}\right)^\sigma$, azaz minden $\nu=1,\ldots,2\sigma$ esetén

$$\gamma\left(\tfrac{k}{m}\right)^\nu w = \pm w\ .$$

Legyen $\sigma=0$, ekkor $\nu=1,2$ és $u\in\mathbb{M}/\mathbb{I}$ esetén legyen

$$\gamma(u)^1 := \gamma(u)\wedge \mathrm{id}_{Z\times Z} \quad \text{és} \quad \gamma(u)^2 := \mathrm{id}_{Z\times Z}\wedge\gamma(u)\ ,$$

ekkor $\nu=1,2$ esetén

$$D^0(C(k))\gamma(\pm c_r)^\nu D^0(C(k))^{-1} = \gamma\left(\tfrac{k}{m}\right)^\nu\ ,$$

így $w\in(Z\times Z)^0$ esetén $D^0(C(k))^{-1}w\in N^0$ ekvivalens azzal, hogy $w\in N_\pm\left(\frac{k}{m}\right)^0$, azaz $\nu=1,2$ esetén

$$\gamma\left(\tfrac{k}{m}\right)^\nu w = \pm w\ .$$

Legyen

$$\alpha : V(m)^\pm \to]0,1]\ ,\ k\mapsto \frac{m}{(k\|\pm c_r)}\ ,$$

és $\sigma\in\frac{1}{2}\mathbb{N}$ esetén

$$\alpha_\sigma := \begin{cases} \alpha^{2\sigma} & \text{, ha} \quad \sigma\neq 0 \\ \alpha^2 & \text{, ha} \quad \sigma=0 \end{cases} ,$$

ekkor a $(*)$ egyenlőség szerint $w\in(Z\times Z)^\sigma$ esetén

$$\|D^\sigma(C(k))^{-1}w\|^2 = \alpha_\sigma(k)\cdot\|w\|^2 ,$$

azaz teljesül az **(EXT')** feltétel az α_σ leképezéssel.

Megjegyzés Tehát $m\in(\mathbb{I}^*)^*_+$ és $\sigma\in\frac{1}{2}\mathbb{N}$ esetén tekinthetjük az $\mathbb{M}\circledS_{\delta_r} SL(Z)$ következő irreducibilis folytonos unitér ábrázolását:

(1) Az ábrázolás tere:

$$\hat{\mathcal{H}}^{\pm m,\sigma,C} = \Big\{ \ \Psi\in L^2_{(Z\times Z)^\sigma}\left(\alpha_\sigma\mu^\pm_m\right) : \\ \text{minden } k\in V(m)^\pm \text{ esetén } \Psi(k)\in N_\pm\left(\tfrac{k}{m}\right)^\sigma \ \Big\} ,$$

a $\Psi(k)\in N_\pm\left(\frac{k}{m}\right)^\sigma$ feltétel ekvivalens azzal, hogy minden $\nu=1,\dots,2\sigma$ esetén

$$\gamma\left(\tfrac{k}{m}\right)^\nu \Psi(k) = \pm\Psi(k) .$$

(2) Az ábrázolási tér skalárszorzata:

$$(\Phi,\Psi) \mapsto \int \langle\Phi|\,\Psi\rangle \, d\mu^\pm_m = \int \alpha_\sigma \, \langle\Phi,\Psi\rangle \, d\mu^\pm_m$$

(3) Az ábrázoló operátorok: $(\mathbf{x},A)\in\mathbb{M}\circledS_{\delta_r} SL(Z)$, $\Psi\in\hat{\mathcal{H}}^{\pm m,\sigma,C}$ és $k\in V(m)^\pm$ esetén

$$\big(\hat{V}^{\pm m,\sigma,C}(\mathbf{x},A)(\Psi)\big)(k) = \chi_k(\mathbf{x})\cdot D^\sigma(A)\Psi(\delta_r(A)^*k) .$$

Mindhárom független C-től, így a továbbiakban az ábrázolás terére és az ábrázoló operátorokra egyszerűen a $\hat{\mathcal{H}}^{\pm m,\sigma}$ és $\hat{V}^{\pm m,\sigma}$ jelölést használjuk. m-et az ábrázolás *tömegének*, σ-t az ábrázolás *spin*jének nevezzük.

Megjegyzés Az időszerű irreducibilis ábrázolások fenti formájának Hilbert-tere minden esetben egy L^2-tér zárt lineáris altere, melyet egy egyenlet jelöl ki, az *impulzustérbeli Dirac-egyenlet*. A $\sigma=0$ esetben nem feltétlenül kellene így lenni: választhatnánk a stabilizátor 1-dimenziós unitér ábrázolásának Hilbert-terét $\mathbb{C}$-nek is, ekkor $\mathbb{M}\circledS_{\delta_r} SL(Z)$ megfelelő ábrázolásának Hilbert-tere $L^2_{\mathbb{C}}(\mu^\pm_m)$ lenne, egyenlet nélkül. Azonban, ha áttérünk a téridőbeli ábrázolásokra, akkor a fent megadott alak praktikusabb: ekkor a $\sigma=0$ esetre is van Dirac-egyenlet. Ha az $L^2_{\mathbb{C}}(\mu^\pm_m)$ téren megvalósuló ábrázolást választanánk, akkor csak a minden σ esetén teljesülő *Klein-Gordon egyenlet* lenne, amelynek téridőbeli alakja másodrendű parciális differenciálegyenlet, szemben a Dirac-egyenlettel, mely elsőrendű. A Klein-Gordon egyenlet impulzustérben: minden $k\in V(m)^\pm$ esetén

$$\Big(g^*(k,k) + m^2\Big)\psi(k) = 0 .$$

$\sigma\in\frac{1}{2}\mathbb{N}$ esetén $\alpha_\sigma=\alpha^{2\sigma+\delta_{\sigma 0}}$, és sokszor kényelmes azt mondani, hogy $\sigma=0$ esetén is $\alpha_\sigma=\alpha^{2\sigma}$, de $\sigma=0$ helyett $\sigma=1$-et véve.

2.3 Fényszerű irreducibilis ábrázolások

Megjegyzés Most a pozitív fényszerű ábrázolásokat vizsgáljuk. Legyen $p{\in}V(0)^+$ rögzített, $p_0{:=}\,(p\|c_r)$, valamint legyen μ_0^+ a $V(0)^+$ kanonikus mértéke osztva p_0^2-nal. Ez pozitív $\hat{\delta}_r$-invariáns Radon-mérték $V(0)^+$ felett.

Megjegyzés Ha $p{\in}V(0)^+$ rögzített, és $p_0{:=}\,(p\|c_r)$, akkor

$$\frac{p}{p_0}{-}c_r \in \frac{\mathbb{E}_{c_r}}{\mathbb{I}}$$

egységnyi hosszú vektor.

Rögzítsünk még egy $e{\in}\frac{\mathbb{E}_{c_r}}{\mathbb{I}}$ vektort úgy, hogy $p{\cdot}e{=}0$ és $(e|e){=}1$ teljesülnek. Ekkor létezik egyetlen olyan $e^{\perp}{\in}\frac{\mathbb{E}_{c_r}}{\mathbb{I}}$, hogy $(e, e^{\perp}, \frac{p}{p_0}{-}c_r)$ pozitívan irányított ortonormált bázis $\frac{\mathbb{E}_{c_r}}{\mathbb{I}}$-ben. Legyen

$$S_1{:=}r(e) \quad , \quad S_2{:=}r(e^{\perp}) \quad , \quad S_3{:=}r\Big(\tfrac{p}{p_0}{-}c_r\Big) \ .$$

Ekkor (S_1, S_2, S_3) pozitívan irányított ortonormált bázis $P(Z)$-ben. Legyen még $S_0{:=}\,\mathrm{id}_Z = r(c_r)$. Ekkor

$$r\Big(\tfrac{p}{p_0}\Big) = r(c_r) + r\Big(\tfrac{p}{p_0}{-}c_r\Big) = S_0 + S_3 \ ,$$

így

$$SL(Z)_p := \{A{\in}SL(Z) : A(S_0{+}S_3)A^*{=}S_0{+}S_3\} \ .$$

Megjegyzés A

$$\tau : \mathbb{T} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) \ , \ \lambda \mapsto (z{\mapsto}\lambda^2{\cdot}z) \ ,$$

leképezés csoport-morfizmus úgy, hogy a

$$\mathbb{C}{\times}\mathbb{T} \to \mathbb{C} \ , \ (z, \lambda) \mapsto \lambda^2{\cdot}z$$

függvény folytonos, így képezhető a $\mathbb{C}\textcircled{\tau}\mathbb{T}$ lokálisan kompakt féldirekt szorzat.

12. Állítás *Az*

$$A_e : \mathbb{C}\textcircled{\tau}\mathbb{T} \to SL(Z)_p \ , \ (z, \lambda) \mapsto \mathrm{Re}(\lambda)S_0 + i\,\mathrm{Im}(\lambda)S_3 + \tfrac{1}{2}\lambda^* z(S_1{+}iS_2)$$

leképezés izomorfizmus a két lokálisan kompakt csoport között, inverze

$$SL(Z)_p \to \mathbb{C}\textcircled{\tau}\mathbb{T} \ , \ A \mapsto \Big(\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(A(S_0{+}S_3)){\cdot}\,\mathrm{Tr}(AS_1), \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(A(S_0{+}S_3))\Big) \ .$$

Bizonyítás Létezik olyan ortonormált bázis Z-ben, melyben S_1, S_1, S_2 mátrixai a Pauli-mátixok. Egy ilyen bázisban kiszámítható, hogy $(z, \lambda){\in}\mathbb{C}\textcircled{\tau}\mathbb{T}$ esetén $\det A_e(z, \lambda){=}|\lambda|^2{=}1$, tehát $A_e(z, \lambda){\in}SL(Z)$.

Legyen $(z, \lambda){\in}\mathbb{C}\textcircled{\tau}\mathbb{T}$. Ekkor

$$A_e(z, \lambda)(S_0{+}S_3) = \lambda(S_0{+}S_3) \ , \tag{$*$}$$

így

$$A_e(z,\lambda)(S_0+S_3)A_e(z,\lambda)^* =$$
$$= \lambda(S_0+S_3)\Big(\mathrm{Re}(\lambda)S_0 - i\,\mathrm{Im}(\lambda)S_3 + \tfrac{1}{2}\lambda z^*(S_1-iS_2)\Big) =$$
$$= |\lambda|^2(S_0+S_3) = S_0+S_3\ ,$$

tehát $A_e(z,\lambda)\in SL(Z)_p$. Nyilvánvaló, hogy A_e folytonos.

$(*)$ szerint

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(A_e(z,\lambda)(S_0+S_3)) = \lambda\ ,$$

és egyszerűen látható, hogy

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(A_e(z,\lambda)S_1) = \lambda^* z\ ,$$

következésképpen A_e^{-1} az állításban megadott fomulával adható meg, ebből pedig látható, hogy folytonos függvény. Olyan Z-beli bázist használva, melyben S_1, S_2, S_3 mátrixai a Pauli-mátixok, kiszámítható, hogy $A\in SL(Z)_p$ esetén

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(A(S_0+S_3)) \in \mathbb{T}\ ,$$

ebből következik, hogy A_e ráképez $SL(Z)_p$-re. Tehát beláttuk, hogy A_e homeomorfizmus.

$(z,\lambda), (z',\lambda')\in\mathbb{C}\circledT\mathbb{T}$ esetén

$$A_e(z,\lambda)A_e(z',\lambda') = \mathrm{Re}(\lambda\lambda')S_0 + i\,\mathrm{Im}(\lambda\lambda')S_3 + \tfrac{1}{2}\Big(\lambda^*\lambda'^* z + \lambda\lambda'^* z'\Big)(S_1+iS_2) =$$
$$= \mathrm{Re}(\lambda\lambda')S_0 + i\,\mathrm{Im}(\lambda\lambda')S_3 + \tfrac{1}{2}(\lambda\lambda')^*\Big(z+\lambda^2 z'\Big)(S_1+iS_2) =$$
$$= A_e(z+\lambda^2 z', \lambda\lambda') = A_e((z,\lambda)(z',\lambda'))\ ,$$

tehát A_e csoport-morfizmus.

Megjegyzés A $\mathbb{C}\circledT\mathbb{T}$ csoport irreducibilis folytonos unitér ábrázolásait a Mackey féle reprezentációs tétellel konstuálhatjuk meg.

Először is, a $\{0\}$ pályához és $\mathbb{T}$ stabilizátorhoz tartozó ábrázolások: $n\in\mathbb{Z}$ esetén

$$W^n : \mathbb{C}\circledT\mathbb{T} \to \mathbb{T}\ ,\ (z,\lambda) \mapsto \lambda^n\ .$$

Legyen a $\{1,-1\}$ csoport két irreducibilis unitér ábrázolása a $\mathbb{C}$ Hilbert-téren $U_+:=1_{\{1,-1\}}$ és $U_-:=\mathrm{id}_{\{1,-1\}}$, és legyen $\hat{U}_+:=1_\mathbb{T}$ és $\hat{U}_-:=\mathrm{id}_\mathbb{T}$, valamint $\alpha_+:=1_\mathbb{T}$ és $\alpha_-:=1/\,\mathrm{id}_\mathbb{T}$. Jelölje továbbá $\mu_\mathbb{T}$ az 1-re normált Haar-mértéket $\mathbb{T}$ felett, és legyen $\varrho>0$. A $\mathbb{C}\circledT\mathbb{T}$ csoport Mackey-tétellel megkonstruált $\varrho\cdot\mathbb{T}$ pályához és $\{1,-1\}$ stabilizátorhoz tartozó ábrázolásai az **(EXT)** és **(EXT')** tulajdonságokat felhasználva a következők:

(1) Az ábrázolás tere:
$$\mathcal{H}^\pm = L^2_\mathbb{C}(\alpha_\pm\mu_\mathbb{T})$$

(2) Az ábrázolási tér skalárszorzata:
$$(\phi,\psi) \mapsto \int \alpha_\pm\,\langle\phi|\,\psi\rangle\,d\mu_\mathbb{T}$$

(3) Az ábrázoló operátorok: $(z,\lambda)\in\mathbb{C}\circledT\mathbb{T}$, $\psi\in\mathcal{H}^{\pm}$, és $\mu\in\mathbb{T}$ esetén

$$\Big(W^{\pm\varrho}(z,\lambda)\psi\Big)(\mu) := e^{i\varrho\langle z,\mu\rangle}\hat{U}_{\pm}(\lambda)\psi(\lambda^{-2}\mu)\ ,$$

ekkor $W^{\pm\varrho}$ irreducibilis folytonos unitér ábrázolása a $\mathbb{C}\circledT\mathbb{T}$ lokálisan kompakt csoportnak a $\mathcal{H}^{\pm}$ Hilbert-téren, és

$$\{W^n : n\in\mathbb{Z}\ ,\ W^{+\varrho} : \varrho>0\ ,\ W^{-\varrho} : \varrho>0\}$$

a $\mathbb{C}\circledT\mathbb{T}$ irreducibilis folytonos unitér ábrázolásainak teljes reprezentánsrendszere.

Megjegyzés Legyen $e\in\frac{\mathbb{E}_{c_r}}{\mathbb{I}}$ úgy, hogy $p\cdot e=0$ és $(e|e)=1$, és $n\in\mathbb{Z}$, $\varrho>0$ esetén

$$\begin{aligned} V^n &:= W^n\circ A_e^{-1}\\ V^{\pm\varrho} &:= W^{\pm\varrho}\circ A_e^{-1}\ , \end{aligned}$$

ekkor

$$\{V^n : n\in\mathbb{Z}\ ,\ V^{+\varrho} : \varrho>0\ ,\ V^{-\varrho} : \varrho>0\}$$

az $SL(Z)_p$ irreducibilis folytonos unitér ábrázolásainak teljes reprezentánsrendszere.

$n\in\mathbb{Z}$ és $A\in SL(Z)_p$ esetén

$$V^n(A) = \left(\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\Big(Ar\Big(\tfrac{p}{p_0}\Big)\Big)\right)^n$$

e-től függetlenül.

13. Állítás *Az eddigi jelölések mellett legyen $k\in V(0)^+$ esetén $\alpha(k):=\frac{(k\|c_r)}{p_0}$. A*

$$C(k):=\begin{cases} \dfrac{p_0}{\sqrt{2g^*(k,p-2p_0c_r)}}\Big(\frac{1}{2}r\Big(\frac{k}{p_0}\Big)(S_0+S_3)+(S_0-S_3)\Big) & \text{ha } g^*(k,p-2p_0c_r)\neq 0\\[2ex] \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{\alpha(k)}}+\sqrt{\alpha(k)}\Big)(S_0+S_3)S_1-\sqrt{\alpha(k)}S_1 & \text{ha } g^*(k,p-2p_0c_r)=0 \end{cases}$$

formulával értelmezett $C{:}V(0)^+\to SL(Z)$ függvény Borel-mérhető jobbinverze az

$$A\mapsto\hat{\delta}_r(A)(p)$$

függvénynek.

Bizonyítás Olyan Z-beli bázist használva, melyben S_1,S_2,S_3 mátrixai a Pauli-mátixok, kiszámítható, hogy minden $k\in V(0)^+$ esetén $C(k)\in SL(Z)$.

Legyen $k\in V(0)^+$, ekkor

$$\begin{aligned}
&\Big(\tfrac{1}{2}r\Big(\tfrac{k}{p_0}\Big)(S_0+S_3)+(S_0-S_3)\Big)(S_0+S_3)\Big(\tfrac{1}{2}r\Big(\tfrac{k}{p_0}\Big)(S_0+S_3)+(S_0-S_3)\Big)^* =\\
&= r\Big(\tfrac{k}{p_0}\Big)(S_0+S_3)\Big(\tfrac{1}{2}(S_0+S_3)r\Big(\tfrac{k}{p_0}\Big)+(S_0-S_3)\Big) = r\Big(\tfrac{k}{p_0}\Big)(S_0+S_3)r\Big(\tfrac{k}{p_0}\Big) =\\
&= r\Big(\tfrac{k}{p_0}\Big)(S_3-S_0)^\bullet r\Big(\tfrac{k}{p_0}\Big) = r\Big(\tfrac{k}{p_0}\Big)\Big(\frac{2g^*(k,p-2p_0c_r)}{p_0^2}\,\mathrm{id}_Z - r\Big(\tfrac{k}{p_0}\Big)^\bullet(S_3-S_0)\Big) =\\
&= \frac{2g^*(k,p-2p_0c_r)}{p_0^2}r\Big(\tfrac{k}{p_0}\Big)\ ,
\end{aligned}$$

így $g^*(k,p{-}2p_0c_r){\neq}0$ esetén

$$C(k)r\Big(\tfrac{p}{p_0}\Big)C(k)^* = r\Big(\tfrac{k}{p_0}\Big) \ .$$

Továbbá,

$$\Big(\tfrac{1}{2}\Big(\tfrac{1}{\sqrt{\alpha(k)}}+\sqrt{\alpha(k)}\Big)(S_0{+}S_3)S_1-\sqrt{\alpha(k)}S_1\Big)(S_0{+}S_3)\cdot$$
$$\cdot\Big(\tfrac{1}{2}\Big(\tfrac{1}{\sqrt{\alpha(k)}}+\sqrt{\alpha(k)}\Big)(S_0{+}S_3)S_1-\sqrt{\alpha(k)}S_1\Big)^* =$$
$$= -\sqrt{\alpha(k)}(S_1{-}iS_2)\cdot\Big(\tfrac{1}{2}\Big(\tfrac{1}{\sqrt{\alpha(k)}}+\sqrt{\alpha(k)}\Big)(S_1{-}iS_2)-\sqrt{\alpha(k)}S_1\Big) =$$
$$= \alpha(k)(S_0 - S_3) = -\alpha(k)r\Big(\tfrac{p}{p_0} - 2c_r\Big) \ ,$$

azonban $g^*(k,p{-}2p_0c_r){=}0$ esetén

$$k = -\alpha(k)(p - 2p_0c_r) \ ,$$

így ekkor is

$$C(k)r\Big(\tfrac{p}{p_0}\Big)C(k)^* = r\Big(\tfrac{k}{p_0}\Big) \ .$$

Tehát C jobbinverze az $A{\mapsto}\hat{\delta}_r(A)(p)$ függvénynek, és folytonos mind a

$$\{k{\in}V(0)^+ : g^*(k,p{-}2p_0c_r){\neq}0\}$$

nyílt halmazon, mind annak komplementerén, következésképpen Borel-mérhető.

Megjegyzés $k{\in}V(0)^+$ esetén

$$\det r\Big(\tfrac{k}{p_0}\Big) = -\Big(\tfrac{k}{p_0}\Big|\tfrac{k}{p_0}\Big) = 0 \ ,$$

hasonlóan, $\det r\Big(\tfrac{k}{p_0}\Big)^{\bullet}{=}0$, azonban $k{\neq}0$ miatt $r\Big(\tfrac{k}{p_0}\Big){\neq}0$, következésképpen

$$N_k^+ := \operatorname{Ker} r\Big(\tfrac{k}{p_0}\Big)^{\bullet} \quad \text{és} \quad N_k^- := \operatorname{Ker} r\Big(\tfrac{k}{p_0}\Big)$$

1-dimenziós alterek Z-ben.

Megjegyzés Az előző jelölésekkel,

(1) $x{\in}N_p^+$ esetén

$$S_1r\Big(\tfrac{p}{p_0}\Big)^{\bullet} = S_1(S_3{-}S_0) = -S_1{-}iS_2 \ ,$$

következésképpen

$$(S_1{+}iS_2)x = -S_1r\Big(\tfrac{p}{p_0}\Big)^{\bullet}x = 0 \ ,$$

azonban

$$r\Big(\tfrac{p}{p_0}\Big)^{\bullet} = S_3{-}S_0$$

miatt

$$S_3 = r\Big(\tfrac{p}{p_0}\Big)^{\bullet} + \mathrm{id}_Z \ ,$$

így $(z,\lambda)\in\mathbb{C}\times\mathbb{T}$ esetén
$$A_e(z,\lambda)x = \lambda x\ .$$

(2) $x\in N_p^-$ esetén
$$S_1 r\Big(\tfrac{p}{p_0}\Big) = S_1(S_3+S_0) = S_1 - iS_2\ ,$$
következésképpen
$$(S_1-iS_2)x = S_1 r\Big(\tfrac{p}{p_0}\Big)x = 0\ ,$$
azonban
$$S_3 = r\Big(\tfrac{p}{p_0}\Big) - \mathrm{id}_Z\ ,$$
így $(z,\lambda)\in\mathbb{C}\times\mathbb{T}$ esetén
$$A_e(z,\lambda)^* x = \lambda x\ ,$$
és
$$A_e(z,\lambda)^{*-1}x = \lambda^{-1}x\ ,$$

Tudjuk, hogy A_e bijekció $\mathbb{C}\times\mathbb{T}$ és $SL(Z)_p$ között, így, ha $A\in SL(Z)_p$, akkor

(1) $x\in N_p^+$ esetén
$$Ax = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\Big(Ar\Big(\tfrac{p}{p_0}\Big)\Big)x = V^1(A)x\ ,$$

(2) $x\in N_p^-$ esetén
$$A^{*-1}x = \Big(\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\Big(Ar\Big(\tfrac{p}{p_0}\Big)\Big)\Big)^{-1}x = V^{-1}(A)x\ .$$

$\sigma\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ esetén legyen
$$Z^\sigma := \begin{cases} \overset{2|\sigma|}{\bigvee} Z & ,\ \text{ha } \sigma\neq 0 \\ Z\otimes Z & ,\ \text{ha } \sigma=0 \end{cases}\ ,$$
és
$$B^\sigma : SL(Z)\to L(Z^\sigma)\ ,\ A\mapsto \begin{cases} \overset{2\sigma}{\bigvee} A & ,\ \text{ha } \sigma>0 \\ A^{*-1}\otimes A & ,\ \text{ha } \sigma=0 \\ \overset{2|\sigma|}{\bigvee} A^{*-1} & ,\ \text{ha } \sigma<0 \end{cases}\ ,$$
továbbá az egyszerűség miatt vezessük be a következő jelölést:
$$N_k^\sigma := \begin{cases} \overset{2\sigma}{\bigvee} N_k^+ & ,\ \text{ha } \sigma>0 \\ N_k^-\otimes N_k^+ & ,\ \text{ha } \sigma=0 \\ \overset{2|\sigma|}{\bigvee} N_k^- & ,\ \text{ha } \sigma<0 \end{cases}\ ,$$
ekkor az előzőek szerint $A\in SL(Z)_p$ esetén $B^\sigma(A)\big|_{N_p^\sigma} = V^{2\sigma}$, tehát B^σ az $SL(Z)$ csoport olyan folytonos lineáris ábrázolása, hogy N_p^σ $B^\sigma|_{SL(Z)_p}$-invariáns altere Z^σ-nak, és $B^\sigma|_{SL(Z)_p}$ ezen altéren megegyezik a $V^{2\sigma}$ 1-dimenziós folytonos unitér ábrázolással.

Az előzőek szerint a $(N_p^\sigma, V^{2\sigma}, Z^\sigma, B^\sigma)$ négyesre teljesül az **(EXT)** tulajdonság.

Megjegyzés $k\in V(0)^+$ esetén

$$C(k) r\left(\tfrac{p}{p_0}\right) C(k)^* = r\left(\tfrac{k}{p_0}\right) ,$$

és ebből következően

$$C(k)^{*-1} r\left(\tfrac{p}{p_0}\right)^\bullet C(k)^{-1} = r\left(\tfrac{k}{p_0}\right)^\bullet ,$$

következésképpen $x\in Z$ esetén

(1) $C(k)^{-1}x\in N_p^+$ akkor és csak akkor, ha $x\in N_k^+$,

(2) $C(k)^* x\in N_p^-$ akkor és csak akkor, ha $x\in N_k^-$,

így, ha $x\in Z^\sigma$, akkor $B^\sigma(C(k))^{-1}x\in N_p^\sigma$ ekvivalens azzal, hogy $x\in N_k^\sigma$, azaz

(1) ha $\sigma>0$, akkor $\left(r\left(\tfrac{k}{p_0}\right)^\bullet\right)^\nu x=0$ minden $\nu=1,\ldots,2\sigma$ esetén ,

(2) ha $\sigma=0$, akkor $\left(r\left(\tfrac{k}{p_0}\right)\right)^1 x=0$ és $\left(r\left(\tfrac{k}{p_0}\right)^\bullet\right)^2 x=0$,

(3) ha $\sigma<0$, akkor $r\left(\tfrac{k}{p_0}\right)^\nu x=0$ minden $\nu=1,\ldots,2|\sigma|$ esetén .

Megjegyzés Legyen $k\in V(0)^+$, ekkor

(1) $x\in \operatorname{Ker} r\left(\tfrac{p}{p_0}\right)^\bullet$ esetén

$$\left\| r\left(\tfrac{k}{p_0}\right) x\right\|^2 = \frac{(k\|c_r)}{p_0}\cdot\frac{2g^*(k, p-2p_0c_r)}{p_0^2}\cdot\|x\|^2 ,$$

(2) $x\in \operatorname{Ker} r\left(\tfrac{p}{p_0}\right)$ esetén

$$\left\| r\left(\tfrac{k}{p_0}\right)^\bullet x\right\|^2 = \frac{(k\|c_r)}{p_0}\cdot\frac{2g^*(k, p-2p_0c_r)}{p_0^2}\cdot\|x\|^2 ,$$

Ugyanis, legyen $k_0, k_1, k_2, k_3\in\mathbb{I}^*$ úgy, hogy

$$k = k_0c_r + k_1\left(\tfrac{p}{p_0}-c_r\right) + k_2 e + k_3 e^\perp ,$$

ekkor

$$r\left(\tfrac{k}{p_0}\right) = \frac{k_0}{p_0}S_0 + \frac{k_1}{p_0}S_3 + \frac{k_2}{p_0}S_1 + \frac{k_3}{p_0}S_2 .$$

(1) Ha $x\in \operatorname{Ker} r\left(\tfrac{p}{p_0}\right)^\bullet = S_3 - S_0$, akkor $S_1x=x$, így $-iS_2x=S_1S_3x=S_1x$, ezért

$$r\left(\tfrac{k}{p_0}\right) x = \frac{k_0+k_1}{p_0}x + \frac{k_2+ik_3}{p_0}S_1 x ,$$

azonban $(S_0{+}S_3)x{=}2x$ miatt

$$\langle x, S_1x\rangle = \tfrac{1}{2}\,\langle (S_0{+}S_3)x, S_1x\rangle = \tfrac{1}{2}\,\langle x, (S_0{+}S_3)S_1x\rangle = \tfrac{1}{2}\,\langle x, S_1(S_0{-}S_3)x\rangle = 0\ ,$$

így

$$r\Big(\tfrac{k}{p_0}\Big)^2 = \frac{2k_0}{p_0} r\Big(\tfrac{k}{p_0}\Big)$$

miatt

$$\Big\| r\Big(\tfrac{k}{p_0}\Big)x\Big\|^2 = \Big\langle x, r\Big(\tfrac{k}{p_0}\Big)^2 x\Big\rangle = \frac{2k_0}{p_0}\cdot \Big\langle x, r\Big(\tfrac{k}{p_0}\Big)x\Big\rangle = \frac{2k_0}{p_0}\cdot\frac{k_0{+}k_1}{p_0}\|x\|^2\ ,$$

ebből pedig $k_0{=}\,(k\|c_r)$ és $k_1{=}\dfrac{g^*(k,p{-}p_0c_r)}{p_0}$ miatt pont a kívánt egyenlőséget kapjuk.

(2) Ha $x{\in}\,\mathrm{Ker}\,r\Big(\tfrac{p}{p_0}\Big){=}S_0{+}S_3$, akkor $S_1x{=}{-}x$, így $-iS_2x{=}S_1S_3x{=}{-}S_1x$, ezért

$$r\Big(\tfrac{k}{p_0}\Big)^{\bullet}x = -\frac{k_0{+}k_1}{p_0}x + \frac{k_2{-}ik_3}{p_0}S_1x\ ,$$

azonban $(S_0{-}S_3)x{=}2x$ miatt

$$\langle x, S_1x\rangle = \tfrac{1}{2}\,\langle (S_0{-}S_3)x, S_1x\rangle = \tfrac{1}{2}\,\langle x, (S_0{-}S_3)S_1x\rangle = \tfrac{1}{2}\,\langle x, S_1(S_0{+}S_3)x\rangle = 0\ ,$$

így

$$\Big(r\Big(\tfrac{k}{p_0}\Big)^{\bullet}\Big)^2 = -\frac{2k_0}{p_0} r\Big(\tfrac{k}{p_0}\Big)^{\bullet}$$

miatt

$$\Big\| r\Big(\tfrac{k}{p_0}\Big)^{\bullet}x\Big\|^2 = \Big\langle x, \Big(r\Big(\tfrac{k}{p_0}\Big)^{\bullet}\Big)^2 x\Big\rangle = -\frac{2k_0}{p_0}\cdot \Big\langle x, r\Big(\tfrac{k}{p_0}\Big)^{\bullet}x\Big\rangle = \frac{2k_0}{p_0}\cdot\frac{k_0{+}k_1}{p_0}\|x\|^2\ .$$

Megjegyzés A 13. Állításban bevezetett $C{:}V(0)^+{\to}SL(Z)$ függvényre $x{\in}N_p^+$ esetén, ha $k{\in}V(0)^+$ olyan, hogy $g^*(k,p{-}2p_0c_r){\neq}0$, akkor

$$\|C(k)x\|^2 = \frac{p_0^2}{2g^*(k,p{-}2p_0c_r)}\cdot\Big\| r\Big(\tfrac{k}{p_0}\Big)x\Big\|^2 = \frac{(k\|c_r)}{p_0}\cdot\|x\|^2\ .$$

Ha ha $k{\in}V(0)^+$ olyan, hogy $g^*(k,p{-}2p_0c_r){=}0$, akkor a 13. Állítás szerint $C(k)x{=}{-}\sqrt{\alpha(k)}S_1x$, így ismét csak

$$\|C(k)x\|^2 = \frac{(k\|c_r)}{p_0}\cdot\|x\|^2\ .$$

Következésképpen, minden $k{\in}V(0)^+$ esetén, ha $x{\in}N_k^+$, azaz $C(k)^{-1}x{\in}N_p^+$, akkor

$$\|C(k)^{-1}x\|^2 = \frac{p_0}{(k\|c_r)}\cdot\|x\|^2\ . \qquad (*)$$

Legyen most $k{\in}V(0)^+$ olyan, hogy $g^*(k,p{-}2p_0c_r){\neq}0$, és $x{\in}N_k^-$, ekkor az előző megjegyzés szerint, k és p szerepét felcserélve,

$$\Big\| r\Big(\tfrac{p}{k_0}\Big)^{\bullet}x\Big\|^2 = \frac{p_0}{k_0}\cdot\frac{2g^*(p,k{-}2k_0c_r)}{k_0^2}\cdot\|x\|^2\ ,$$

így

$$\left\| r\left(\tfrac{p}{p_0}\right)^{\bullet} x \right\|^2 = \frac{k_0^2}{p_0^2} \left\| r\left(\tfrac{p}{k_0}\right)^{\bullet} x \right\|^2 = \frac{p_0}{k_0} \cdot \frac{2g^*(k, p-2p_0c_r)}{p_0^2} \cdot \|x\|^2 \ ,$$

következésképpen

$$\|C(k)^* x\|^2 = \frac{p_0^2}{2g^*(k, p-2p_0c_r)} \cdot \left\| r\left(\tfrac{p}{p_0}\right)^{\bullet} x \right\|^2 = \frac{p_0}{(k\|c_r)} \cdot \|x\|^2 \ .$$

Ha ha $k \in V(0)^+$ olyan, hogy $g^*(k, p-2p_0c_r)=0$, akkor a 13. Állítás szerint $C(k)x = \frac{1}{\sqrt{\alpha(k)}} r(e)x$, így most is

$$\|C(k)^* x\|^2 = \frac{p_0}{(k\|c_r)} \cdot \|x\|^2 \ .$$

Következésképpen, minden $k \in V(0)^+$ esetén, ha $x \in N_k^-$, azaz $C(k)^* x \in N_p^-$, akkor

$$\|C(k)^* x\|^2 = \frac{p_0}{(k\|c_r)} \cdot \|x\|^2 \ . \qquad (**)$$

Legyen

$$\alpha : V(0)^+ \to \mathbb{R}_+^* \ , \ k \mapsto \frac{p_0}{(k\|c_r)} \ ,$$

és $\sigma \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ esetén

$$\alpha_\sigma := \begin{cases} \alpha^{2|\sigma|} & , \text{ ha } \sigma \neq 0 \\ \alpha^2 & , \text{ ha } \sigma = 0 \end{cases} .$$

Ekkor a $(*)$ és $(**)$ egyenlőségek szerint $x \in N_k^\sigma$, azaz $B^\sigma(C(k))^{-1} x \in N_p^\sigma$ esetén

$$\|B^\sigma(C(k))^{-1} x\|^2 = \alpha_\sigma(k) \cdot \|x\|^2 \ ,$$

azaz teljesül az **(EXT')** feltétel az α_σ leképezéssel.

Megjegyzés Tehát $\sigma \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ esetén tekintsük az $\mathbb{M} \circledS_r SL(Z)$ következő irreducibilis folytonos unitér ábrázolását:

(1) Az ábrázolás tere:

$$\hat{\mathcal{H}}^{p,\sigma,C} = \{\Psi \in L^2_{Z^\sigma}(\alpha_\sigma \mu_0^+) : \text{minden } k \in V(0)^+ \text{ esetén } \Psi(k) \in N_k^\sigma\} \ .$$

A $\Psi(k) \in N_k^\sigma$ feltétel ekvivalens azzal, hogy

– ha $\sigma > 0$, akkor $\left(r\left(\frac{k}{p_0}\right)^{\bullet}\right)^{\nu} \Psi(k) = 0$ minden $\nu = 1, \ldots, 2\sigma$ esetén ,

– ha $\sigma = 0$, akkor $\left(r\left(\frac{k}{p_0}\right)\right)^{1} \Psi(k) = 0$ és $\left(r\left(\frac{k}{p_0}\right)^{\bullet}\right)^{2} \Psi(k) = 0$,

– ha $\sigma < 0$, akkor $r\left(\frac{k}{p_0}\right)^{\nu} \Psi(k) = 0$ minden $\nu = 1, \ldots, 2|\sigma|$ esetén .

(2) Az ábrázolási tér skalárszorzata:

$$(\Phi, \Psi) \mapsto \int \alpha_\sigma \langle \Phi, \Psi \rangle \, d\mu_0^+ \ .$$

(3) Az ábrázoló operátorok: $(\mathbf{x},A)\in\mathbb{M}\circledS SL(Z)$, $\Psi\in\hat{\mathcal{H}}^{p,\sigma,C}$ és $k\in V(0)^+$ esetén

$$\left(\hat{V}^{p,\sigma,C}(\mathbf{x},A)(\Psi)\right)(k)=\chi_k(\mathbf{x})\cdot B^\sigma(A)\Psi(\delta_r(A)^*k)\ .$$

Mindhárom független C-től, és "nem nagyon" függ p-től, ami azt jelenti, hogy csak a az ábrázolási tér skalárszorzata függ p_0-tól egy konstans szorzó erejéig, ezért a továbbiakban az ábrázolás terére és az ábrázoló operátorokra egyszerűen a $\hat{\mathcal{H}}^{0,\sigma}$ és $\hat{V}^{0,\sigma}$ jelölést használjuk. σ-t az ábrázolás *spinjének* nevezzük.

Megjegyzés Az időszerű irreducibilis ábrázolásnál elmondottakhoz hasonlóan, a fényszerű irreducibilis abrázolások fenti formájának Hilbert-tere minden esetben egy L^2-tér zárt lineáris altere, melyet egy egyenlet jelöl ki, az *impulzustérbeli Dirac-egyenlet.* A σ=0 esetben nem feltétlenül kellene így lenni: választhatnánk a stabilizátor 1-dimenziós unitér ábrázolásának Hilbert-terét $\mathbb{C}$-nek is, ekkor $\mathbb{M}\circledS SL(Z)$ megfelelő ábrázolásának Hilbert-tere $L^2_{\mathbb{C}}(\mu_0^\pm)$ lenne, egyenlet nélkül. Azonban, ha áttérünk a téridőbeli ábrázolásokra, akkor a fent megadott alak praktikusabb: ekkor a σ=0 esetre is van Dirac-egyenlet. Ha az $L^2_{\mathbb{C}}(\mu_0^\pm)$ téren megvalósuló ábrázolást választanánk, akkor csak a minden σ esetén teljesülő *hullámegyenlet* lenne, amelynek téridőbeli alakja másodrendű parciális differenciálegyenlet, szemben a Dirac-egyenlettel, mely elsőrendű. A hullámegyenlet impulzustérben: minden $k\in V(0)^\pm$ esetén

$$g^*(k,k)\psi(k)=0\ .$$

$\sigma\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ esetén α_σ=$\alpha^{2|\sigma|+\delta_{\sigma 0}}$, és sokszor kényelmes azt mondani, hogy σ=0 esetén is α_σ=$\alpha^{2|\sigma|}$, de σ=0 helyett σ=1-et véve.

Megjegyzés Az eddigi megfontolásokban mindig a 13. Állításban megadott $C{:}V(0)^+\to SL(Z)$ függvényt használtuk. Legyen most $C'{:}V(0)^+\to SL(Z)$ leképezés, mely Borel-mérhető jobbinverze az

$$A\mapsto\hat{\delta}_r(A)(p)$$

függvénynek. Ekkor minden $k\in V(0)^+$ esetén

$$C'(k)^{-1}C(k)\in SL(Z)_p\ ,$$

következésképpen

$$C'(k)^{-1}C(k)|_{N_p^+}:N_p^+\to N_p^+$$

illetve

$$(C'(k)^{-1}C(k))^{*-1}|_{N_p^-}:N_p^-\to N_p^-$$

unitér leképezések, következésképpen, ha $x\in N_k^+$, akkor

$$\|C'(k)^{-1}x\|^2=\|C'(k)^{-1}C(k)C(k)^{-1}x\|^2=\|C(k)^{-1}x\|^2\ ,$$

és ha $x\in N_k^-$, akkor

$$\|C'(k)^*x\|^2=\|C'(k)^*C(k)^{*-1}C(k)^*x\|^2=\|C(k)^*x\|^2\ ,$$

hasonlóan $\sigma\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ esetén, ha $x\in N_k^\sigma$, akkor

$$\|B^\sigma(C'(k))^{-1}x\|^2=\|B^\sigma(C(k))^{-1}x\|^2\ .$$

Megjegyzés Legyen

$$\Gamma := \begin{pmatrix} \mathrm{id}_Z & 0 \\ 0 & -\mathrm{id}_Z \end{pmatrix} \in L(Z\times Z) \ ,$$

ekkor Γ olyan operátor, melynek sajátértékei :

$$\begin{aligned} &+1, \quad Z\times\{0\} \text{ sajátaltérrel,} \\ &-1, \quad \{0\}\times Z \text{ sajátaltérrel,} \end{aligned}$$

és minden $u\in\mathbb{M}/\mathbb{I}$ esetén

$$\Gamma\gamma(u) + \gamma(u)\Gamma = 0 \ .$$

$\sigma\in\frac{1}{2}\mathbb{N}_0$ esetén legyen

(1) Az ábrázolás tere:

- $\sigma\neq 0$ esetén

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}^{0,\pm\sigma} = \Big\{ &\Psi\in L^2_{(Z\times Z)^\sigma}(\alpha_\sigma\mu_0^+) : \text{minden } k\in V(m)^+ \\ &\text{és minden } \nu=1,\dots,2\sigma \text{ esetén} \\ &\gamma\Big(\frac{k}{p_0}\Big)^\nu \Psi(k)=0 \quad \text{és} \quad \Gamma^\nu\Psi(k)=\mp\Psi(k) \Big\} \ . \end{aligned}$$

- $\sigma=0$ esetén

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}^{0,0} = \Big\{ &\Psi\in L^2_{(Z\times Z)^0}(\alpha_0\mu_0^+) : \text{minden } k\in V(m)^+ \\ &\text{és minden } \nu=1,2 \text{ esetén } \gamma\Big(\frac{k}{p_0}\Big)^\nu \Psi(k)=0 \Big\} \ . \end{aligned}$$

(2) Az ábrázolási tér skalárszorzata:

$$(\Phi,\Psi) \mapsto \int \alpha_\sigma \cdot \langle\Phi,\Psi\rangle \, d\mu_0^+ \quad .$$

(3) Az ábrázoló operátorok: $(\mathbf{x},A)\in\mathbb{M}\circledS_r SL(Z)$, $\Psi\in\hat{\mathcal{H}}^{p,\pm\sigma}$ és $k\in V(0)^+$ esetén

$$\big(\hat{W}^{0,\pm\sigma}(\mathbf{x},A)(\Psi)\big)(k) = \chi_k(\mathbf{x})\cdot D^\sigma(A)\Psi(\delta_r(A)^*k) \ .$$

$\hat{W}^{0,\pm\sigma}$ az $\mathbb{M}\circledS_r SL(Z)$ csoport olyan folytonos unitér ábrázolása, mely ekvivalens a $\hat{V}^{0,\pm\sigma}$ ábrázolással.

Megjegyzés A $\sigma=0$ esetben $\mathrm{Ker}\,\gamma\Big(\frac{k}{p_0}\Big)=N_k^-\times N_k^+\subset Z\times Z$ 2-dimenziós altér, így $\mathrm{Ker}\,\gamma\Big(\frac{k}{p_0}\Big)\wedge\mathrm{Ker}\,\gamma\Big(\frac{k}{p_0}\Big)\subset(Z\times Z)^0$ 1-dimenziós.

2.4 A foton ábrázolás

Megjegyzés Most a $\mathbb{M}\circledS_r SL(Z)$ csoport olyan folytonos unitér ábrázolását adjuk meg, amely nem irreducibilis, de a fizikai alkalmazások szempontjából fontos.

$(z,\lambda)\in\mathbb{C}\times\mathbb{T}$ esetén egyszerű számolással adódik, hogy

$$\begin{aligned}
A_e(z,\lambda)S_1A_e(z,\lambda)^* &= \mathrm{Re}(\lambda^2)S_1 - \mathrm{Im}(\lambda^2)S_2 + \mathrm{Re}(\lambda^2 z^*)(S_0{+}S_3)\ ,\\
A_e(z,\lambda)S_2A_e(z,\lambda)^* &= \mathrm{Im}(\lambda^2)S_1 + \mathrm{Re}(\lambda^2)S_2 + \mathrm{Im}(\lambda^2 z^*)(S_0{+}S_3)\ ,\\
A_e(z,\lambda)(S_0{+}S_3)A_e(z,\lambda)^* &= S_0{+}S_3\ ,
\end{aligned}$$

következésképpen

$$\begin{aligned}
\delta_r(A_e(z,\lambda))_{\mathbb{I}}e &= \mathrm{Re}(\lambda^2)e - \mathrm{Im}(\lambda^2)e^{\perp} + \mathrm{Re}(\lambda^2 z^*)\tfrac{p}{p_0}\ ,\\
\delta_r(A_e(z,\lambda))_{\mathbb{I}}e^{\perp} &= \mathrm{Im}(\lambda^2)e + \mathrm{Re}(\lambda^2)e^{\perp} + \mathrm{Im}(\lambda^2 z^*)\tfrac{p}{p_0}\ ,\\
\delta_r(A_e(z,\lambda))_{\mathbb{I}}\tfrac{p}{p_0} &= \tfrac{p}{p_0}
\end{aligned}$$

Jelölje az $\mathbb{M}$,$(\mathbb{M}/\mathbb{I})$ és $\mathbb{M}^*$ valós vektorterek komplexifikáltját $\mathbb{M}_{\mathbb{C}}$, $(\mathbb{M}/\mathbb{I})_{\mathbb{C}}$ és $\mathbb{M}^*_{\mathbb{C}}$, és a $\delta_r(A_e(z,\lambda))_{\mathbb{I}}$ valós lineáris leképezés egyetlen komplex lineáris kiterjesztését a komplexifikáltra $(\delta_r(A_e(z,\lambda))_{\mathbb{I}})_{\mathbb{C}}$. Ekkor

$$\begin{aligned}
(\delta_r(A_e(z,\lambda))_{\mathbb{I}})_{\mathbb{C}}(e{+}ie^{\perp}) &= \lambda^2(e{+}ie^{\perp}) + \lambda^2 z^*\tfrac{p}{p_0}\ ,\\
(\delta_r(A_e(z,\lambda))_{\mathbb{I}})_{\mathbb{C}}(e{-}ie^{\perp}) &= \lambda^{-2}(e{-}ie^{\perp}) + \lambda^{-2} z\tfrac{p}{p_0}\ ,
\end{aligned}$$

következésképpen

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}_r(A_e(z,\lambda))_{\mathbb{C}}(p_0(e{+}ie^{\perp})) &= \lambda^2(p_0(e{+}ie^{\perp})) + \lambda^2 z^* p\ ,\\
\hat{\delta}_r(A_e(z,\lambda))_{\mathbb{C}}(p_0(e{-}ie^{\perp})) &= \lambda^{-2}(p_0(e{-}ie^{\perp})) + \lambda^{-2} z p\ .
\end{aligned}$$

Jelölje $g^*_{\mathbb{C}}$ a $g^*{:}\mathbb{M}^*{\times}\mathbb{M}^*{\to}\mathbb{I}^*{\otimes}\mathbb{I}^*$ bilineáris leképezés első változóban konjugált lineáris, második változóban lineáris kiterjesztését.

$$N(p) := \{v{\in}\mathbb{M}^*_{\mathbb{C}} : g^*_{\mathbb{C}}(v,p){=}0\}$$

3-dimenzós $\mathbb{C}$-lineáris altere $\mathbb{M}^*_{\mathbb{C}}$-nak úgy, hogy

$$\langle\,.\,,\,.\,\rangle := \frac{1}{p_0^2}g^*_{\mathbb{C}}|_{N(p)\times N(p)}$$

pozitív, magtere $\mathbb{C}{\cdot}p$, így az $N(p)$ félskalárszorzatos térhez asszociált Hilbert-tér $N(p)/\mathbb{C}{\cdot}p$.

$A{\in}SL(Z)$ esetén $\hat{\delta}_r(A)_{\mathbb{C}}{\in}L(\mathbb{M}^*_{\mathbb{C}})$ $g^*_{\mathbb{C}}$ tartó leképezés, és

$$(\hat{\delta}_r)_{\mathbb{C}} : SL(Z) \to L(\mathbb{M}^*_{\mathbb{C}})\ ,\ A \mapsto \hat{\delta}_r(A)_{\mathbb{C}}$$

folytonos lineáris ábrázolás.

$A{\in}SL(Z)_p$ esetén $\mathbb{C}{\cdot}p$ invariáns altere $\hat{\delta}_r(A)_{\mathbb{C}}$-nek, így $N(p)$ is, legyen

$$d(A) := \hat{\delta}_r(A)_{\mathbb{C}}|_{N(p)} \in L(N(p))\ ,$$

ekkor létezik egyetlen $\dot{d}(A){\in}L(N(p)/\mathbb{C}{\cdot}p)$ úgy, hogy

$$\dot{d}(A){\circ}\pi_{N(p)/\mathbb{C}\cdot p} = \pi_{N(p)/\mathbb{C}\cdot p}{\circ}d(A)\ ,$$

nyilvánvaló, hogy $\dot{d}(A)$ unitér, továbbá az is, hogy d illetve $\dot{d}$ folytonos ábrázolásai az $SL(Z)_p$ csoportnak az $N(p)$ félskalárszorzatos téren illetve az $N(p)/\mathbb{C}{\cdot}p$ Hilbert-téren.

$(z,\lambda){\in}\mathbb{C}{\times}\mathbb{T}$ esetén

$$\dot{d}(A_e(z,\lambda))\Big(\pi_{N(p)/\mathbb{C}\cdot p}(p_0(e{+}ie^{\perp}))\Big) = \lambda^2{\cdot}\Big(\pi_{N(p)/\mathbb{C}\cdot p}(p_0(e{+}ie^{\perp}))\Big) \ ,$$
$$\dot{d}(A_e(z,\lambda))\Big(\pi_{N(p)/\mathbb{C}\cdot p}(p_0(e{-}ie^{\perp}))\Big) = \lambda^{-2}{\cdot}\Big(\pi_{N(p)/\mathbb{C}\cdot p}(p_0(e{-}ie^{\perp}))\Big) \ ,$$

következésképpen $A{\in}SL(Z)_p$ esetén

$$\dot{d}(A)\Big(\pi_{N(p)/\mathbb{C}\cdot p}(p_0(e{+}ie^{\perp}))\Big) = V^2(A){\cdot}\Big(\pi_{N(p)/\mathbb{C}\cdot p}(p_0(e{+}ie^{\perp}))\Big) \ ,$$
$$\dot{d}(A)\Big(\pi_{N(p)/\mathbb{C}\cdot p}(p_0(e{-}ie^{\perp}))\Big) = V^{-2}(A){\cdot}\Big(\pi_{N(p)/\mathbb{C}\cdot p}(p_0(e{-}ie^{\perp}))\Big) \ .$$

Legyenek

$$N^{\pm} := \mathbb{C}{\cdot}\Big(\pi_{N(p)/\mathbb{C}\cdot p}(p_0(e{\pm}ie^{\perp}))\Big) \ ,$$

ezek egymásra ortogonális invariáns alterei a $\dot{d}$ ábrázolásnak, és $A{\in}SL(Z)_p$ esetén

$$\dot{d}(A)|_{N^{\pm}} = V^{\pm 2}(A) \ ,$$

tehát az $SL(Z)_p$ csoport $\dot{d}$ ábrázolása ekvivalens a $V^2{\oplus}V^{-2}$ ábrázolással.

Az előzőek szerint: az $(N(p), d, \mathbb{M}^*_{\mathbb{C}}, (\hat{\delta}_r)_{\mathbb{C}})$ négyesre teljesül az **(EXT)** tulajdonság.

$k{\in}V(0)^+$ esetén $\hat{\delta}_r(C(k))(p){=}k$, így $z{\in}\mathbb{M}^*_{\mathbb{C}}$ esetén $\hat{\delta}_r(C(k))^{-1}_{\mathbb{C}}z{\in}N(p)$ pontosan akkor teljesül, ha

$$g^*_{\mathbb{C}}(k,z) = g^*_{\mathbb{C}}(\hat{\delta}_r(C(k))(p),z) = g^*_{\mathbb{C}}(p,\hat{\delta}_r(C(k))^{-1}_{\mathbb{C}}z) = 0 \ ,$$

azaz, ha $z{\in}N(k)$.

$z_1,z_2{\in}N(k)$ esetén

$$\Big\langle \hat{\delta}_r(C(k))^{-1}_{\mathbb{C}}z_1, \hat{\delta}_r(C(k))^{-1}_{\mathbb{C}}z_2\Big\rangle_{N(p)} = \langle z_1,z_2\rangle_{N(k)} \ ,$$

tehát teljesül az **(EXT')** feltétel az $\alpha{:=}1$ függvénnyel.

Megjegyzés Tekinthetjük a $\mathbb{M}\circledS_{\hat{\delta}_r} SL(Z)$ féldirekt szorzat következő ábrázolását:

(1) Az ábrázolás tere:

$$\hat{\mathcal{H}} = \{\Psi{\in}L^2_{\mathbb{M}^*_{\mathbb{C}}}(\mu_0^+) : \text{minden } k{\in}V(0)^+ \text{ esetén } \ \Psi(k){\in}N(k)\} \ ,$$

a $\Psi(k){\in}N(k)$ feltétel ekvivalens azzal, hogy $g^*_{\mathbb{C}}(k,\Psi(k)){=}0$.

(2) Az ábrázolási tér félskalárszorzata:

$$(\Phi,\Psi) \mapsto \int \langle\Phi,\Psi\rangle \, d\mu_0^+ \ .$$

(3) Az ábrázoló operátorok: $(\mathbf{x}, A) \in \mathbb{M} \circledS_{\delta_r} SL(Z)$, $\Psi \in \hat{\mathcal{H}}$ és $k \in V(0)^+$ esetén

$$\big(\hat{V}(\mathbf{x}, A)(\Psi)\big)(k) = \chi_k(\mathbf{x}) \cdot \hat{\delta}_r(A)_{\mathbb{C}} \Psi(\delta_r(A)^* k) \ .$$

Mindhárom független C-től.

Megjegyzés $\Psi \in \hat{\mathcal{H}}$ esetén $\langle \Psi, \Psi \rangle = 0$ ekvivalens azzal, hogy $\Psi(k) \in \mathbb{C} \cdot k$, azaz

$$k \wedge \Psi(k) = 0$$

teljesül μ_0^+-majdnem minden $k \in V(0)^+$ esetén.

Megjegyzés A $\hat{V}$ ábrázolást *foton* ábrázolásnak nevezzük. Ez tehát ekvivalens a $\hat{V}^{p,1} \oplus \hat{V}^{p,-1}$ ábrázolással. A foton tehát $+1$ és -1 sninű állapotok keveréke.

3. Fejezet

Ábrázolások téridőben

3.1 Fourier-transzformációk

Az időszerű, fényszerű irreducibilis és foton ábrázolások 2.2, 2.3 és 2.4 végén megadott alakjait négyesimpulzustérbeli alakoknak neveztük, mert ábrázolási terük az $\mathbb{M}^*$ részhalmazain értelmezett függvényekből áll. A gyakorlatban fontosak az ezekkel ekvivalens, úgynevezett *téridőbeli* alakok, ahol az ábrázolás tere az M részhalmazain értelmezett függvényekből áll. Ezekre a Fourier transzformáció segítségével térhetünk át.

Definíció Legyen $m \in (\mathbb{I}^*)^*_+$ rögzített, és μ az $(\mathbb{M}, \mathbb{I}, g)$ pszeudoeuklidészi tér kanonikus mértéke szorozva m^4-nel, és μ^* az $(\mathbb{M}^*, \mathbb{I}^*, g^*)$ pszeudoeuklidészi tér kanonikus mértéke osztva m^4-nel. Ezek pozitív eltolásinvariáns mértékek. Jelölje $S(\mathbb{M})$ és az $\mathbb{M} \to \mathbb{C}$ gyorsan csökkenő függvények terét, hasonlóan $S(M)$ és $S(\mathbb{M}^*)$.

Legyenek

$$F^{\pm}_{\mu} : S(\mathbb{M}) \to S(\mathbb{M}^*) \ , \ \varphi \mapsto \left(k \mapsto \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \int e^{\pm ik(\mathbf{x})} \varphi(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) \right)$$

illetve

$$F^{\pm}_{\mu^*} : S(\mathbb{M}^*) \to S(\mathbb{M}) \ , \ \psi \mapsto \left(\mathbf{x} \mapsto \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \int e^{\pm ik(\mathbf{x})} \psi(\mathbf{x}) d\mu^*(k) \right)$$

a pozitív ill. negatív Fourier-transzformációk. Ekkor μ és μ^* duális mértékek, azaz

$$F^{+}_{\mu^*} = (F^{-}_{\mu})^{-1} \ , \ F^{-}_{\mu^*} = (F^{+}_{\mu})^{-1} \ ,$$

és minden $\varphi, \psi \in S(\mathbb{M})$ esetén

$$\left\langle F^{\pm}_{\mu}(\varphi), F^{\pm}_{\mu}(\psi) \right\rangle_{\mathcal{L}^2(\mu^*)} = \langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{L}^2(\mu)} \ .$$

Jelölje $S(\mathbb{M})'$ illetve $S(\mathbb{M}^*)'$ az $S(\mathbb{M})$ illetve $S(\mathbb{M}^*)$ feletti temperált disztribúciók terét, és legyenek

$$F^{\pm}_{\mu} : S(\mathbb{M})' \to S(\mathbb{M}^*)' \ , \ T \mapsto T \circ F^{\pm}_{\mu^*}$$

illetve

$$F^{\pm}_{\mu^*} : S(\mathbb{M}^*)' \to S(\mathbb{M})' \ , \ S \mapsto S{\circ}F^{\pm}_{\mu}$$

a pozitív ill. negatív Fourier-transzformációk.

$o{\in}M$ esetén, ha $O_o{:}M{\to}\mathbb{M}$, $x{\mapsto}x{-}o$, akkor legyen

$$Z_o : S(M) \to S(\mathbb{M}) \ , \ \varphi \mapsto \varphi{\circ}O_o^{-1} \ ,$$

és

$$Z_o : S(M)' \to S(\mathbb{M})' \ , \ T \mapsto T{\circ}Z_o^{-1} \ .$$

3.2 Időszerű irreducibilis ábrázolások

14. Állítás *Legyen* $m{\in}(\mathbb{I}^*)^*_+$, *F Banach-tér,*

$$\alpha : V(m)^+ \to]0,1] \ , \ k \mapsto \frac{m}{(k\|c_r)} \ ,$$

$s{\geq}0$ *és* $\Psi{\in}\mathcal{L}^2_F(\alpha^s\mu^+_m)$. *Ekkor a* $\Psi{\cdot}\mu^+_m$ $V(m)^+$ *feletti Radon-mérték kiterjeszthető* $\mathbb{M}^*$*-ra, és a kiterjesztett Radon mérték mérsékelt disztribúció* $\mathbb{M}^*$ *felett.*

Bizonyítás Mivel $V(m)^+$ zárt $\mathbb{M}^*$-ban, $\Psi{\cdot}\mu^+_m$ kiterjeszthető $\mathbb{M}^*$-ra.

Megjegyezzük először, hogy $\alpha{\circ}h^{-1}_{c_r}{=}\dfrac{m}{\sqrt{|\cdot|^2{+}m^2}}{=:}\eta$, és $r{>}3/2$ esetén

$$\eta^r \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}) \ .$$

Ugyanis, az integrandus folytonos és korlátos ($\leq$1), így bármely kompakt halmazon négyzetesen integrálható, és majorálja az $\left(\dfrac{m}{|\cdot|}\right)^r$ függvény, amely bármely nullát tartalmazó nyílt gömb komplementerén négyzetesen integrálható.

$\Psi{\in}\mathcal{L}^2_F(\alpha^s\mu^+_m)$ miatt

$$\Psi{\circ}h^{-1}_{c_r}\eta^{\frac{s+1}{2}} \in \mathcal{L}^2_F(\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}) \ ,$$

legyen $n{\in}\mathbb{N}$ olyan, hogy $n{>}\dfrac{s}{2}{+}1$, ekkor $\dfrac{1{-}s}{2}{+}n{>}\dfrac{3}{2}$, következésképpen

$$\eta^{\frac{1-s}{2}+n} \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}) \ ,$$

így

$$\Psi{\circ}h^{-1}_{c_r}\eta^{n+1} \in \mathcal{L}^1_F(\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}) \ ,$$

jelölje a normafüggvény integrálját (az $\mathcal{L}^1_F$-beli félnormát) C.

Legyen $\varphi{\in}S(\mathbb{M}^*)$, ekkor

$$(\Psi{\cdot}\mu^+_m)(\varphi) = \int \Psi\varphi d\mu^+_m = \int (\Psi{\circ}h^{-1}_{c_r}){\cdot}(\varphi{\circ}h^{-1}_{c_r})\eta d\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}} =$$
$$= \int (\Psi{\circ}h^{-1}_{c_r}){\cdot}\eta^{n+1}(\varphi{\circ}h^{-1}_{c_r})\eta^{-n}d\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}} \ ,$$

következésképpen

$$|(\Psi\cdot\mu_m^+)(\varphi)| \leq C\cdot \sup\left|(\varphi\circ h_{c_r}^{-1})\left(\frac{\sqrt{|\,.\,|^2+m^2}}{m}\right)^n\right| =$$

$$= C\cdot \sup_{k\in V(m)^+}\left|\varphi(k)\left(\frac{(k\|c_r)}{m}\right)^n\right| ,$$

ebből pedig következik, hogy $\Psi\cdot\mu_m^+$ mérsékelt disztribúció. □

$\sigma\in\frac{1}{2}\mathbb{N}$ és $o\in M$ esetén

$$F_o := (F_\mu^-\circ Z_o)\otimes \mathrm{id}_{(Z\times Z)^\sigma} : S(M)'\otimes(Z\times Z)^\sigma \to S(\mathbb{M}^*)'\otimes(Z\times Z)^\sigma$$

lineáris bijekció. Jelölje μ_M azt az egyetlen eltolásinvariáns pozitív Radon-mértéket M felett, melyre minden $o\in M$ esetén $O_o(\mu_M)=\mu$ teljesül.

$m\in(\mathbb{I}^*)^*_+$, $\sigma\in\frac{1}{2}\mathbb{N}$ és $\Psi\in\hat{\mathcal{H}}^{m,\sigma}\subset L^2_{(Z\times Z)^\sigma}(\alpha^{2\sigma}\cdot\mu_m^+)$ esetén (σ=0 esetén is, de akkor a képletekben σ=1-et véve)

$$\alpha^{\sigma-1/2}\cdot\Psi \in L^2_{(Z\times Z)^\sigma}(\alpha\cdot\mu_m^+) ,$$

így az előző állítás szerint az $\alpha^{\sigma-1/2}\cdot\Psi\cdot\mu_m^+$ Radon mérték kiterjeszthető $\mathbb{M}^*$-re Radon mértékké, és ez a kiterjesztett mérték mérsékelt disztribúció, így minden $o\in M$ esetén $F_o^{-1}(\alpha^{\sigma-1/2}\cdot\Psi\cdot\mu_m^+)$ mérsékelt disztribúció M felett.

$\Psi\in\mathcal{K}(V(m)^+,(Z\times Z)^\sigma)$ esetén $F_o^{-1}(\alpha^{\sigma-1/2}\cdot\Psi\cdot\mu_m^+)$ reguláris disztribúció, sűrűségfüggvénye μ_M-re nézve: $x\in M$ esetén

$$\Phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\cdot\int \alpha(k)^{\sigma-1/2}\cdot\Psi(k)e^{ik(x-o)}d\mu_m^+(k) .$$

Később látni fogjuk, hogy $F_o^{-1}(\alpha^{\sigma-1/2}\cdot\Psi\cdot\mu_m^+)$ reguláris disztribúció $\Psi\in\hat{\mathcal{H}}^{m,\sigma}\subset L^2_{(Z\times Z)^\sigma}(\alpha^{2\sigma}\cdot\mu_m^+)$ esetén is.

Továbbá, az

$$i_\sigma : L^2_{(Z\times Z)^\sigma}(\alpha^{2\sigma}\cdot\mu_m^+) \to L^2_{(Z\times Z)^\sigma}(\alpha\cdot\mu_m^+) ,\ \ \Psi\mapsto\alpha^{\sigma-1/2}\cdot\Psi$$

leképezés unitér a két Hilbert-tér között.

Tekintsük a $\mathbb{M}\circledS SL(Z)$ csoport következő ábrázolását:

(1) Az ábrázolás tere:

$$H^{m,\sigma} := (F_o^{-1}\circ i_\sigma)\left\langle\hat{\mathcal{H}}^{m,\sigma}\right\rangle ,$$

(2) Az ábrázolási tér skalárszorzata:

$$(S,T)\mapsto\frac{1}{2\pi}\left\langle(i_\sigma^{-1}\circ F_o)(S),(i_\sigma^{-1}\circ F_o)(T)\right\rangle_{\hat{\mathcal{H}}^{m,\sigma}} ,$$

(3) Az ábrázló operátorok: $(\mathbf{x},A)\in\mathbb{M}\circledS SL(Z)$ esetén

$$V^{m,\sigma}(\mathbf{x},A) := F_o^{-1}\circ i_\sigma\circ\hat{V}^{m,\sigma}(\mathbf{x},A)\circ i_\sigma^{-1}\circ F_o .$$

Ekkor $V^{m,\sigma}$ folytonos unitér ábrázolása az $\mathbb{M}\circledS_r SL(Z)$ csoportnak, mely ekvivalens a $\hat{V}^{m,\sigma}$ ábrázolással.

Legyen $(\mathbf{x},A)\in\mathbb{M}\circledS_r SL(Z)$ és $\Psi\in\hat{\mathcal{H}}^{m,\sigma}$, ekkor $k\in V(m)^+$ esetén

$$\begin{aligned}\Big(\big(i_\sigma\circ\hat{V}^{m,\sigma}(\mathbf{x},A)\circ i_\sigma^{-1}\big)\Psi\Big)(k) &= \\ &= \alpha(k)^{\sigma-1/2}\cdot e^{-ik(\mathbf{x})}D^\sigma(A)(\alpha^{-\sigma+1/2}\cdot\Psi)(\delta_r(A)^*k) = \\ &= \left(\frac{\alpha(k)}{\alpha(\delta_r(A)^*k)}\right)^{\sigma-1/2}\cdot e^{-ik(\mathbf{x})}D^\sigma(A)\Psi(\delta_r(A)^*k)\ .\end{aligned}$$

Az egyszerűség kedvéért vezessük be a következő függvényt:

$$\kappa_A : V(m)^+\to\mathbb{R}_+^*\ ,\ k\mapsto\frac{\alpha(k)}{\alpha(\delta_r(A)^*k)}\ ,$$

ekkor az előzőek szerint

$$\Big(\big(i_\sigma\circ\hat{V}^{m,\sigma}(\mathbf{x},A)\circ i_\sigma^{-1}\big)\Psi\Big)(k) = \kappa_A(k)^{\sigma-1/2}\cdot e^{-ik(\mathbf{x})}D^\sigma(A)\Psi(\delta_r(A)^*k)\ .$$

Legyen $\Phi\in H^{m,\sigma}$, ekkor $(\mathbf{x},A)\in\mathbb{M}\circledS_r SL(Z)$ és $x\in M$, $k\in V(m)^+$ esetén

$$\begin{aligned}\big(i_\sigma\circ\hat{V}^{m,\sigma}(\mathbf{x},A)\circ i_\sigma^{-1}\big)F_o\Phi &= \kappa_A^{\sigma-1/2}\cdot e^{-i(\,.\,)(\mathbf{x})}\cdot C_{\delta_r(A)^{*-1}}F_\mu^- Z_o\big(D^\sigma(A)\Phi\big) = \\ &= \kappa_A^{\sigma-1/2}\cdot e^{-i(\,.\,)(\mathbf{x})}\cdot F_\mu^- C_{\delta_r(A)}Z_o\big(D^\sigma(A)\Phi\big) = \\ &= \kappa_A^{\sigma-1/2}\cdot F_\mu^- T_\mathbf{x} C_{\delta_r(A)}Z_o\big(D^\sigma(A)\Phi\big)\ .\end{aligned}$$

Legyen

$$F_{(\mathbf{x},A)} : M\to M\ ,\ x\mapsto o+\mathbf{x}+\delta_r(A)(x-o)\ ,$$

ez Poincaré-transzformáció úgy, hogy $DF_{(\mathbf{x},A)}=\delta_r(A)$, $F_{(\mathbf{x},A)}(o)-o=\mathbf{x}$, és

$$F_{(\mathbf{x},A)}^{-1}(x) = o+\delta_r(A)^{-1}(x-o-\mathbf{x})\ ,$$

így

$$T_\mathbf{x} C_{\delta_r(A)}Z_o\big(D^\sigma(A)\Phi\big) = Z_o C_{F_{(\mathbf{x},A)}}\big(D^\sigma(A)\Phi\big) = Z_o\big(D^\sigma(A)\Phi\circ F_{(\mathbf{x},A)}^{-1}\big)\ ,$$

ezért

$$\big(i_\sigma\circ\hat{V}^{m,\sigma}(\mathbf{x},A)\circ i_\sigma^{-1}\big)F_o\Phi = \kappa_A^{\sigma-1/2}\cdot F_o\Big(\big(D^\sigma(A)\Phi\circ F_{(\mathbf{x},A)}^{-1}\Big)\ ,$$

tehát

$$V^{m,\sigma}(\mathbf{x},A)\Phi = F_o^{-1}\left(\kappa_A^{\sigma-1/2}\cdot F_o\Big(D^\sigma(A)\Phi\circ F_{(\mathbf{x},A)}^{-1}\Big)\right)\ .$$

Ha $\sigma=1/2$, akkor $\kappa_A^{\sigma-1/2}=1$, így a fenti formula egyszerűbb alakra hozható:

$$V^{m,\sigma}(\mathbf{x},A)\Phi = D^\sigma(A)\Phi\circ F_{(\mathbf{x},A)}^{-1}\ .$$

$\sigma\neq1/2$ esetén az ábrázoló operátorokra nem adható ilyen explicit formula: a Fourier-transzformáció és a függvénnyel való szorzás felcseréléséről csak polinomiális függvények esetén tudunk valamit mondani, $\kappa_A^{\sigma-1/2}$ pedig általában nem polinom.

$\Phi\in H^{m,\sigma}$ esetén $\alpha^{-\sigma+1/2}\cdot F_o\Phi\in\hat{\mathcal{H}}^{m,\sigma}$, így (az egyenlet mindkét oldalát osztva a $\alpha^{-\sigma+1/2}$ seholsem nulla függvénnyel) a négyesimpulzustérbeli Dirac-egyenlet szerint minden $\nu=1,\ldots,2\sigma$ (illetve $\nu=1,2$, ha $\sigma=0$) esetén

$$\gamma\left(\frac{k}{m}\right)^\nu F_o\Phi(k) = F_o\Phi(k)\ .$$

A Fourier-transzformáció tulajdonságai szerint azonban

$$-iD_M\Phi = F_o^{-1}(\mathrm{id}_{\mathbb{M}^*}\cdot F_o\Phi)\ ,$$

következésképpen minden $\nu=1,\ldots,2\sigma$ (illetve $\nu=1,2$, ha $\sigma=0$) esetén

$$\gamma\left(\frac{-iD_M}{m}\right)^\nu \Phi = \Phi\ ,$$

ez a *téridőbeli Dirac-egyenlet.*

Emlékeztetünk arra, hogy

$$h_{c_r}: V(m)^+ \to \mathbb{E}^*_{c_r}\ ,\ k\mapsto k-(k\|c_r)\,c_r$$

diffeomorfizmus, inverze $\mathbf{p}\mapsto\mathbf{p}+\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\cdot c_r$, és ha $\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}$ jelöli a $(\mathbb{E}^*_{c_r},\gamma^*_{c_r},\mathbb{I}^*)$ euklidészi tér kanonikus mértékét osztva m^3-nal, akkor

$$h_{c_r}(\mu^+_m) = \frac{m}{\sqrt{|\,.\,|^2+m^2}}\cdot\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}} = \eta\cdot\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}\ .$$

Továbbá, ha $\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}$ jelöli a $(\mathbb{E}_{c_r},\gamma_{c_r},\mathbb{I})$ euklidészi tér kanonikus mértékét szorozva m^3-nal, akkor $\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}$ és $\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}$ duális mértékek.

Legyen $\Psi\in\mathcal{K}(V(m)^+,(Z\times Z)^\sigma)$, ekkor $o\in M$ esetén $F_o^{-1}(\alpha^{\sigma-1/2}\cdot\Psi\cdot\mu^+_m)$ reguláris disztribúció, jelölje μ_M-re vonatkozó sűrűségfüggvényét Φ, azaz

$$F_o^{-1}(\alpha^{\sigma-1/2}\cdot\Psi\cdot\mu^+_m)=\Phi\cdot\mu_M\ ,$$

akkor $x\in M$ esetén

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\cdot\int\alpha(k)^{\sigma-1/2}\cdot\Psi(k)e^{ik(x-o)}d\mu^+_m(k) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\cdot\int\eta(\mathbf{p})^{\sigma-1/2}\cdot\Psi(h^{-1}_{c_r}(\mathbf{p}))e^{ih^{-1}_{c_r}(\mathbf{p})(x-o)}\eta(\mathbf{p})d\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}(\mathbf{p}) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\cdot\int\eta(\mathbf{p})^{\sigma+1/2}\cdot\Psi(h^{-1}_{c_r}(\mathbf{p}))e^{i\mathbf{p}(x-o)}e^{i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}c_r\cdot(x-o)}d\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}(\mathbf{p}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot F^+_{\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}}\left(\eta^{\sigma+1/2}\cdot\left(\Psi\circ h^{-1}_{c_r}\right)\cdot e^{i\sqrt{|\,.\,|^2+m^2}\cdot c_r\cdot(x-o)}\right)\left((x-o)_{\|c_r}\right)\ .\end{aligned}$$

Azonban $\Psi\in\hat{\mathcal{H}}^{m,\sigma}\subset L^2_{(Z\times Z)^\sigma}(\alpha^{2\sigma}\cdot\mu^+_m)$ esetén $\eta^{\sigma+1/2}\cdot\left(\Psi\circ h^{-1}_{c_r}\right)\in L^2_{(Z\times Z)^\sigma}(\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}})$, és a

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot F^+_{\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}}\left(\eta^{\sigma+1/2}\cdot\left(\Psi\circ h^{-1}_{c_r}\right)\cdot e^{i\sqrt{|\,.\,|^2+m^2}\cdot c_r\cdot(x-o)}\right)\left((x-o)_{\|c_r}\right)\ .$$

formula értelmes, ha a F^+ szimbólum a Fourier–Plancherel-operátort jelöli, és $F_o^{-1}(\alpha^{\sigma-1/2}{\cdot}\Psi{\cdot}\mu_m^+)$ reguláris disztribúció Φ sűrűségfüggvénnyel.

Jelölje I_{c_r} az M-beli $\mathbb{E}_{c_r}$-rel párhuzamos hipersíkok halmazát, ez affin tér $\mathbb{I}$ felett, $t{\in}I_{c_r}$ esetén a $\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}$ mérték egyértelműen meghatároz egy t-feletti eltolásinvariáns pozitív mértéket, melyet μ_t-vel jelölünk.

$t{\in}I_{c_r}$ és $x{\in}t$ esetén, ha $o{\in}t_o$, akkor $\Phi_{|t}{\in}\mathcal{L}^2_{(Z\times Z)^\sigma}(\mu_t)$, és

$$\begin{aligned}\|\Phi_{|t}\|^2 &= \int \|\Phi(x)\|^2 d\mu_t(x) = \\ &= \frac{1}{2\pi}\cdot\int\left\|F^+_{\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}}\left(\eta^{\sigma+\frac{1}{2}}(\Psi{\circ}h_{c_r}^{-1})e^{-i\sqrt{|\,\cdot\,|^2+m^2}\cdot(t-t_o)}\right)\big((x{-}o)_{\|c_r}\big)\right\|^2 d\mu_t(x) = \\ &= \frac{1}{2\pi}\cdot\int\left\|F^+_{\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}}\left(\eta^{\sigma+\frac{1}{2}}(\Psi{\circ}h_{c_r}^{-1})e^{-i\sqrt{|\,\cdot\,|^2+m^2}\cdot(t-t_o)}\right)(q)\right\|^2 d\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}(q) = \\ &= \frac{1}{2\pi}\cdot\int\left\|\eta^{\sigma+1/2}\cdot\big(\Psi{\circ}h_{c_r}^{-1}\big)\right\|^2 d\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}\ ,\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}\|\Psi\|^2 &= \int\limits_{V(m)^+}\|\Psi\|^2\alpha^{2\sigma}d\mu_m^+ = \int\left\|\Psi{\circ}h_{c_r}^{-1}\right\|^2\eta^{2\sigma+1}d\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}} = \\ &= \int\left\|\eta^{\sigma+1/2}\cdot\big(\Psi{\circ}h_{c_r}^{-1}\big)\right\|^2 d\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}\ ,\end{aligned}$$

tehát tetszőleges $t{\in}I_{c_r}$ esetén

$$\|\Phi_{|t}\|^2 = \frac{1}{2\pi}\cdot\|\Psi\|^2_{\hat{\mathcal{H}}^{m,\sigma}} = \|\Phi\|^2_{H^{m,\sigma}}\ .$$

Eddig $H^{m,\sigma}$ elemeinek néhány tulajdonságát ismertük meg. A pontos jellemzést egyenlőre csak $\sigma{=}1/2$ esetén tudjuk elvégezni.

Legyen $\Phi{:}M{\to}Z{\times}Z$ lokálisan μ_M-integrálható leképezés úgy, hogy minden $t{\in}I_{c_r}$ esetén $\Phi|_t{\in}\mathcal{L}^2_{Z\times Z}(\mu_t)$, továbbá disztribúció értelemben teljesül a Dirac-egyenlet.

Legyen

$$r_{c_r,o} : \mathbb{I}{\times}\mathbb{E}_{c_r} \to M\ ,\ (\mathbf{t},\mathbf{q}) \mapsto o + c_r\mathbf{t} + \mathbf{q}$$

a (c_r, o) szerinti bontás, ez affin bijekció, deriváltját jelölje $\mathbf{r}_{c_r}$, továbbá legyen $\overline{\Phi}{:=}\Phi{\circ}r_{c_r,o}$. Ekkor könnyen kiszámítható, hogy

$$(\partial_o\overline{\Phi}, \nabla_{c_r}\overline{\Phi}) := D\overline{\Phi} = \mathbf{r}^*_{c_r}D_M\Phi{\circ}r_{c_r,o}\ ,$$

továbbá, $(e,\mathbf{p}){\in}\mathbb{I}^*{\times}\mathbb{E}^*_{c_r}$ esetén $(\mathbf{r}_{c_r}^{-1})^*(e,\mathbf{p}){=}{-}c_re{+}\mathbf{p}$, így

$$D_M\Phi = (\mathbf{r}_{c_r}^{-1})^*D\overline{\Phi}{\circ}r_{c_r,o}^{-1} = \big(-c_r\partial_o\overline{\Phi} + \nabla_{c_r}\overline{\Phi}\big){\circ}r_{c_r,o}^{-1}\ ,$$

így

$$\begin{aligned}\overline{\Phi}{\circ}r_{c_r,o}^{-1} = \Phi = \gamma\left(\frac{-iD_M}{m}\right)\Phi &= \left(\gamma\left(\frac{ic_r\partial_o - i\nabla_{c_r}}{m}\right)\overline{\Phi}\right){\circ}r_{c_r,o}^{-1} = \\ &= \left(\gamma(c_r)\frac{i\partial_o}{m}\overline{\Phi} + \gamma\left(\frac{-i\nabla_{c_r}}{m}\right)\overline{\Phi}\right){\circ}r_{c_r,o}^{-1}\ ,\end{aligned}$$

így a Dirac-egyenlet (c_r, o)-bontott alakja

$$\overline{\Phi} = \gamma(c_r)\frac{i\partial_o}{m}\overline{\Phi} + \gamma\left(\frac{-i\nabla_{c_r}}{m}\right)\overline{\Phi} \ ,$$

ennek mindkét oldalát $\gamma(c_r)$-vel szorozva és rendezve kapjuk a szokásos alakot:

$$i\partial_o\overline{\Phi} = m\gamma(c_r)\overline{\Phi} - m\gamma(c_r)\gamma\left(\frac{-i\nabla_{c_r}}{m}\right)\overline{\Phi} \ .$$

$\mathbf{t}\in\mathbb{I}$ és $\mathbf{p}\in\mathbb{E}^*_{c_r}$ esetén legyen

$$Y(\mathbf{t},\mathbf{p}) := F^-_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}}\overline{\Phi}(\mathbf{t},\,.\,)(\mathbf{p}) \ ,$$

ekkor a bontott Dirac-egyenlet mindkét oldalát rögzített $\mathbf{t}\in\mathbb{I}$ mellett negatív Fourier-transzformálva kapjuk, hogy

$$i\partial_o Y(\mathbf{t},\mathbf{p}) = m\gamma(c_r)Y(\mathbf{t},\mathbf{p}) - m\gamma(c_r)\gamma\left(\frac{\mathbf{p}}{m}\right)Y(\mathbf{t},\mathbf{p}) \ .$$

Ez rögzített $\mathbf{p}\in\mathbb{E}^*_{c_r}$ esetén közönséges differenciálegyenlet az $Y(\,.\,,\mathbf{p})$ függvényre. Könyen ellenőrizhető, hogy a jobb oldalon álló

$$A(\mathbf{p}) := \gamma(c_r) - \gamma(c_r)\gamma\left(\frac{\mathbf{p}}{m}\right) \in L(Z\times Z)$$

lineáris operátor önadjungált a $Z\times Z$ eredeti skalárszorzatára nézve, $m\cdot A(\mathbf{p})$ sajátértékei $\pm\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$, így a differenciálegyenlet általános megoldása

$$Y(\mathbf{t},\mathbf{p}) = e^{-i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\cdot\mathbf{t}}\cdot Y_+(\mathbf{p}) + e^{i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\cdot\mathbf{t}}\cdot Y_-(\mathbf{p}) \ , \qquad (T)$$

ahol $Y_\pm(\mathbf{p})$ a $\pm\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}$ sajátértékhez tartozó sajátvektora a jobboldali operátornak, ami ekvivalens azzal, hogy

$$\gamma\left(\frac{\mathbf{p}\pm\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\cdot c_r}{m}\right)Y_\pm(\mathbf{p}) = Y_\pm(\mathbf{p}) \ . \qquad (*)$$

Az

$$M_A : L^2_{Z\times Z}(\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}) \rightarrowtail L^2_{Z\times Z}(\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}) \ , \ \psi\mapsto A\psi$$

szorzásoperátor önadjungált, és belátható, hogy spekruma a

$$]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$$

halmaz. $\mathbf{p}\in\mathbb{E}^*_{c_r}$ esetén legyen $\lambda_\pm(\mathbf{p}) := \pm\frac{\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}}{m}$, és

$$P_\pm(\mathbf{p}) := \frac{A(\mathbf{p}) + \lambda_\pm(\mathbf{p})\,\mathrm{id}_{Z\times Z}}{2\lambda_\pm(\mathbf{p})}$$

az $A(\mathbf{p})$ operátor $\lambda_\pm(\mathbf{p})$ sajátértékéhez tartozó sajátalterének ortogonális projektora. Ekkor

$$A(\mathbf{p}) = \lambda_+(\mathbf{p})P_+(\mathbf{p}) + \lambda_-(\mathbf{p})P_-(\mathbf{p}) \ .$$

Jelölje $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ az $\mathbb{R}$ Borel-féle σ-algebráját, ekkor

$$R_A : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to L(L^2_{Z\times Z}(\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}))\ ,\ H \mapsto M_{(\chi_H\circ\lambda_+)\cdot P_+ + (\chi_H\circ\lambda_-)\cdot P_-}$$

projektormérték, $\varphi\in L^2_{Z\times Z}(\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}})$ és $\psi\in \mathrm{Dom}(M_A)$ esetén

$$\begin{aligned}\left\langle \varphi, \left(\int \mathrm{id}_{\mathbb{R}}\, dR_A\right)\psi\right\rangle &= \int \mathrm{id}_{\mathbb{R}}\, d\left\langle \varphi, R_A(\,.\,)\psi\right\rangle = \\ &= \int\Big(\lambda_+\left\langle\varphi, P_+\psi\right\rangle + \lambda_-\left\langle\varphi, P_-\psi\right\rangle\Big) d\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}} = \\ &= \int\Big\langle\varphi, \Big(\lambda_+ P_+ + \lambda_- P_-\Big)\psi\Big\rangle\, d\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}} = \\ &= \int\left\langle\varphi, A\psi\right\rangle d\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}} = \left\langle\varphi, M_A\psi\right\rangle\ ,\end{aligned}$$

tehát

$$\int \mathrm{id}_{\mathbb{R}}\, dR_A = M_A\ ,$$

azaz az R_A projektormérték az M_A operátor spektrálfelbontása.

Jelölje $H_+(L^2_{Z\times Z}(\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}))$ illetve $H_-(L^2_{Z\times Z}(\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}))$ az $R_A([1,+\infty[)$ illetve $R_A(]-\infty,-1])$ ortogonális projektorok értékkészletét. Mivel R_A definíciója szerint

$$R_A([1,+\infty[)=M_{P_+} \quad\text{és}\quad R_A(]-\infty,-1])=M_{P_-}\ ,$$

$\psi\in L^2_{Z\times Z}(\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}})$ esetén $\psi\in H_\pm(L^2_{Z\times Z}(\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}))$ akkor és csak akkor, ha $M_{P_\pm}\psi=\psi$, azaz, ha $\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}$-majdnem minden $\mathbf{p}\in\mathbb{E}^*_{c_r}$ esetén

$$m\left(\gamma(c_r)-\gamma(c_r)\gamma\left(\frac{\mathbf{p}}{m}\right)\right)\psi(\mathbf{p})=\pm\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\,\psi(\mathbf{p})\ .$$

Az

$$\mathcal{A} := \gamma(c_r) - \gamma(c_r)\gamma\left(\frac{-i\nabla_{c_r}}{m}\right)$$

$L^2_{Z\times Z}(\mu_{\mathbb{E}_{c_r}})$-ben értelmezett operátor önadjungált, spektruma

$$]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[\ ,$$

jelölje $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ a spektrálfelbontását, és $\mathcal{H}_+(L^2_{Z\times Z}(\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}))$ illetve $\mathcal{H}_-(L^2_{Z\times Z}(\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}))$ az $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}([1,+\infty[)$ illetve $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(]-\infty,-1])$ ortogonális projektorok értékkészletét.

Mivel

$$F^-_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}}\circ\mathcal{A} = M_A\circ F^-_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}}\ ,$$

így

$$F^-_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}}\circ\mathcal{R}_{\mathcal{A}}(\,.\,) = R_A(\,.\,)\circ F^-_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}}\ ,$$

következésképpen

$$F^-_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}}\big\langle\mathcal{H}_\pm(L^2_{Z\times Z}(\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}))\big\rangle = H_\pm(L^2_{Z\times Z}(\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}))\ .$$

Jelölje $x{\in}M$ esetén Pos_x azon $\Phi{:}M{\to}Z{\times}Z$ lokálisan μ_M-integrálható leképezések halmazát, melyekre $(Z_x\Phi)|_{\mathbb{E}_{c_r}}{\in}\mathcal{H}_+(L^2_{Z\times Z}(\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}))$ teljesül, és legyen

$$\mathrm{Pos} := \bigcap_{x\in M} \mathrm{Pos}_x \ .$$

Tegyük fel, hogy az eddigi feltételek mellett $\Phi{\in}\,\mathrm{Pos}_o$ is teljesül. Ekkor $\overline{\Phi}(0,\,.\,)$ ${\in}\mathcal{H}_+(L^2_{Z\times Z}(\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}))$, következésképpen $Y(0,\,.\,){\in}H_+(L^2_{Z\times Z}(\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}))$, így a (T)-vel jelölt képletben csak az $Y_-(\mathbf{p}){:=}0$ eset lehetséges, tehát

$$Y(\mathbf{t},\mathbf{p}) = e^{-i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\cdot\mathbf{t}}{\cdot}Y_+(\mathbf{p}) = e^{-i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\cdot\mathbf{t}}{\cdot}Y(0,\mathbf{p}) \ ,$$

így a minden $\mathbf{t}{\in}\mathbb{I}$ esetén $Y(\mathbf{t},\,.\,){\in}H_+(L^2_{Z\times Z}(\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}))$, következésképpen $\Phi{\in}\,\mathrm{Pos}$, és

$$e^{i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\cdot\mathbf{t}}{\cdot}F^-_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}}\overline{\Phi}(\mathbf{t},\,.\,)(\mathbf{p}) = F^-_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}}\overline{\Phi}(0,\,.\,)(\mathbf{p}) \ ,$$

azaz

$$e^{i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\cdot\mathbf{t}}{\cdot}F^-_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}}\Phi(o{+}c_r\mathbf{t}{+}(\,.\,))(\mathbf{p}) = F^-_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}}\big((Z_o\Phi)|_{\mathbb{E}_{c_r}}\big)(\mathbf{p}) \ . \qquad (**)$$

Legyen

$$\Psi : V(m)^+ \to Z{\times}Z \ , \ k \mapsto \sqrt{2\pi}{\cdot}\alpha(k)^{-1}{\cdot}F^-_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}}\big((Z_o\Phi)|_{\mathbb{E}_{c_r}}\big)(h_{c_r}(k)) \ ,$$

ekkor $(*)$ szerint (a pozitív előjelet véve) $\Psi{\in}\hat{\mathcal{H}}^{m,1/2}$, és $\mathbf{p}{\in}\mathbb{E}^*_{c_r}$ és $\mathbf{t}{\in}\mathbb{I}$ esetén $(**)$ szerint

$$\begin{aligned}\Psi(h^{-1}_{c_r}(\mathbf{p})) &= \sqrt{2\pi}{\cdot}\eta(\mathbf{p})^{-1}{\cdot}F^-_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}}\big((Z_o\Phi)|_{\mathbb{E}_{c_r}}\big)(\mathbf{p}) = \\ &= \sqrt{2\pi}{\cdot}\eta(\mathbf{p})^{-1}{\cdot}e^{i\sqrt{|\mathbf{p}|^2+m^2}\cdot\mathbf{t}}{\cdot}F^-_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}}\Phi(o{+}c_r\mathbf{t}{+}(\,.\,))(\mathbf{p}) \ ,\end{aligned}$$

így $(\mathbf{t},\mathbf{q}){\in}\mathbb{I}{\times}\mathbb{E}_{c_r}$ esetén

$$\Phi(o{+}c_r\mathbf{t}{+}\mathbf{q}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}{\cdot}F^+_{\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}}\Big(\eta{\cdot}\big(\Psi{\circ}h^{-1}_{c_r}\big){\cdot}e^{-i\sqrt{|\,.\,|^2+m^2}\cdot\mathbf{t}}\Big)(\mathbf{q}) \ ,$$

azaz

$$F_o(\Phi{\cdot}\mu_M) = \Psi{\cdot}\mu^+_m \ .$$

Az eddigiek összefoglalásaként: $H^{m,1/2}$ azon $\Phi{\in}\,\mathrm{Pos}$ függvényekből áll, melyekre teljesül a

$$\gamma\bigg(\frac{-iD_M}{m}\bigg)\Phi = \Phi$$

Dirac-egyenlet.

Megjegyzés A Dirac-egyenletből következik a *Klein–Gordon-egyenlet*:

$$\Big(-g^*(D_M,D_M) + m^2\Big)\Phi = 0 \ ,$$

melynek bontott alakja

$$\partial_o^2\overline{\Phi} - \Delta_{c_r}\overline{\Phi} + m^2\overline{\Phi} = 0 \ ,$$

és a térbeli részben Fourier-transzformált egyenlet:

$$-\partial_o^2 Y(\,.\,,\mathbf{p}) = (|\mathbf{p}|^2 + m^2)Y(\,.\,,\mathbf{p}) \ .$$

3.3 Fényszerű irreducibilis ábrázolások

15. Állítás *Legyen* $p{\in}V(0)^+$ *rögzített,* $p_0{:=}(p\|c_r)$*,* F *Banach-tér,*

$$\alpha : V(0)^+ \to \mathbb{R}^*_+ \ , \ k \mapsto \frac{p_0}{(k\|c_r)} \ ,$$

$s{\geq}0$ *és* $\Psi{\in}\mathcal{L}^2_F(\alpha^s\mu_0^+)$*. Ekkor a* $\Psi{\cdot}\mu_0^+$ $V(0)^+$ *feletti Radon-mérték kiterjeszthető* $\mathbb{M}^*$*-ra, és a kiterjesztett Radon mérték mérsékelt disztribúció* $\mathbb{M}^*$ *felett.*

Bizonyítás Mivel $V(0)^+$ nem zárt zárt $\mathbb{M}^*$-ban, $\Psi{\cdot}\mu_m^+$ kiterjeszthetőségét külön igazolni kell $\mathbb{M}^*$-ra.

Megjegyezzük először, hogy $\alpha{\circ}h_{c_r}^{-1}{=}\dfrac{p_0}{|\,.\,|}{=:}\eta$, és $r{<}3/2$ és $r{+}q{>}3/2$ esetén

$$\left(\frac{p_0}{|\,.\,|}\right)^r \left(\frac{p_0}{\sqrt{|\,.\,|^2{+}p_0^2}}\right)^q \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}) \ .$$

$\Psi{\in}\mathcal{L}^2_F(\alpha^s\mu_0^+)$ miatt

$$(\Psi{\circ}h_{c_r}^{-1}){\cdot}\eta^{\frac{s+1}{2}} \in \mathcal{L}^2_F(\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}) \ ,$$

legyen $n{\in}\mathbb{N}$ olyan, hogy $n{>}\dfrac{s}{2}{+}1$, ekkor $\dfrac{1{-}s}{2}{+}n{>}\dfrac{3}{2}$, következésképpen

$$\eta^{\frac{1-s}{2}}{\cdot}\left(\frac{p_0}{\sqrt{|\,.\,|^2{+}p_0^2}}\right)^n \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}) \ ,$$

így

$$(\Psi{\circ}h_{c_r}^{-1}){\cdot}\eta{\cdot}\left(\frac{p_0}{\sqrt{|\,.\,|^2{+}p_0^2}}\right)^n \in \mathcal{L}^1_F(\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}) \ ,$$

jelölje a normafüggvény integrálját (az $\mathcal{L}^1_F$-beli félnormát) C.

Legyen $\varphi{\in}S(\mathbb{M}^*)$, ekkor $\dfrac{1{-}s}{2}{<}\dfrac{3}{2}$ miatt

$$(\varphi{\circ}h_{c_r}^{-1}){\cdot}\eta^{\frac{1-s}{2}} \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}) \ ,$$

következésképpen

$$(\Psi{\circ}h_{c_r}^{-1}){\cdot}(\varphi{\circ}h_{c_r}^{-1}){\cdot}\eta \in \mathcal{L}^1_F(\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}) \ ,$$

így

$$\Psi{\cdot}\varphi \in \mathcal{L}^1_F(\mu_0^+) \ ,$$

tehát $\Psi{\cdot}\mu_0^+$ kiterjeszthető $\mathbb{M}^*$-ra, és

$$(\Psi{\cdot}\mu_0^+)(\varphi) = \int \Psi\varphi d\mu_0^+ = \int (\Psi{\circ}h_{c_r}^{-1}){\cdot}(\varphi{\circ}h_{c_r}^{-1}){\cdot}\eta d\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}} =$$

$$= \int (\Psi{\circ}h_{c_r}^{-1}){\cdot}\eta{\cdot}\left(\frac{p_0}{\sqrt{|\,.\,|^2{+}p_0^2}}\right)^n{\cdot}(\varphi{\circ}h_{c_r}^{-1}){\cdot}\left(\frac{p_0}{\sqrt{|\,.\,|^2{+}p_0^2}}\right)^{-n} d\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}} \ ,$$

következésképpen

$$|(\Psi\cdot\mu_0^+)(\varphi)| \leq C\cdot \sup\left|(\varphi\circ h_{c_r}^{-1})\left(\frac{\sqrt{|\,.\,|^2+p_0^2}}{p_0}\right)^n\right| =$$

$$= C\cdot \sup_{k\in V(0)^+}\left|\varphi(k)\left(\frac{\sqrt{(k\|c_r)^2+p_0^2}}{p_0}\right)^n\right| \leq$$

$$\leq C\cdot \sup_{k\in V(0)^+}\left|\varphi(k)\left(\frac{(k\|c_r)+p_0}{p_0}\right)^n\right| ,$$

ebből pedig következik, hogy $\Psi\cdot\mu_0^+$ mérsékelt disztribúció. □

$\sigma\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ és $o\in M$ esetén

$$F_o := (F_\mu^-\circ Z_o)\otimes \mathrm{id}_{Z^\sigma} : S(M)'\otimes Z^\sigma \to S(\mathbb{M}^*)'\otimes Z^\sigma$$

lineáris bijekció. Jelölje μ_M azt az egyetlen eltolásinvariáns pozitív Radon-mértéket M felett, melyre minden $o\in M$ esetén $O_o(\mu_M)=\mu$ teljesül.

$\sigma\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ és $\Psi\in\hat{\mathcal{H}}^{0,\sigma}\subset L^2_{Z^\sigma}(\alpha^{2|\sigma|}\cdot\mu_0^+)$ esetén (σ=0 esetén is, de akkor a képletekben σ=1-et véve)

$$\alpha^{|\sigma|-1/2}\cdot\Psi \in L^2_{Z^\sigma}(\alpha\cdot\mu_0^+) ,$$

így az előző állítás szerint az $\alpha^{|\sigma|-1/2}\cdot\Psi\cdot\mu_0^+$ Radon mérték kiterjeszthető $\mathbb{M}^*$-re Radon mértékké, és ez a kiterjesztett mérték mérsékelt disztribúció, így minden $o\in M$ esetén $F_o^{-1}(\alpha^{|\sigma|-1/2}\cdot\Psi\cdot\mu_0^+)$ mérsékelt disztribúció M felett.

$\Psi\in\mathcal{K}(V(0)^+, Z^\sigma)$ esetén $F_o^{-1}(\alpha^{|\sigma|-1/2}\cdot\Psi\cdot\mu_0^+)$ reguláris disztribúció, sűrűségfüggvénye μ_M-re nézve: $x\in M$ esetén

$$\Phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\cdot\int \alpha(k)^{|\sigma|-1/2}\cdot\Psi(k)e^{ik(x-o)}d\mu_0^+(k) .$$

Később látni fogjuk, hogy $F_o^{-1}(\alpha^{|\sigma|-1/2}\cdot\Psi\cdot\mu_0^+)$ reguláris disztribúció $\Psi\in\hat{\mathcal{H}}^{0,\sigma}\subset L^2_{Z^\sigma}(\alpha^{2|\sigma|}\cdot\mu_0^+)$ esetén is.

Továbbá, az

$$i_\sigma : L^2_{Z^\sigma}(\alpha^{2|\sigma|}\cdot\mu_0^+) \to L^2_{Z^\sigma}(\alpha\cdot\mu_0^+) ,\ \ \Psi \mapsto \alpha^{|\sigma|-1/2}\cdot\Psi$$

leképezés unitér a két Hilbert-tér között.

Tekintsük a $\mathbb{M}\circledS SL(Z)$ csoport következő ábrázolását:

(1) Az ábrázolás tere:

$$H^{0,\sigma} := (F_o^{-1}\circ i_\sigma)\left\langle\hat{\mathcal{H}}^{0,\sigma}\right\rangle ,$$

(2) Az ábrázolási tér skalárszorzata:

$$(S,T) \mapsto \frac{1}{2\pi}\left\langle (i_\sigma^{-1}\circ F_o)(S), (i_\sigma^{-1}\circ F_o)(T)\right\rangle_{\hat{\mathcal{H}}^{0,\sigma}} ,$$

(3) Az ábrázló operátorok: $(\mathbf{x}, A)\in\mathbb{M}\circledS SL(Z)$ esetén

$$V^{0,\sigma}(\mathbf{x}, A) := F_o^{-1}\circ i_\sigma\circ\hat{V}^{0,\sigma}(\mathbf{x}, A)\circ i_\sigma^{-1}\circ F_o .$$

Ekkor $V^{0,\sigma}$ folytonos unitér ábrázolása az $\mathbb{M}\textcircled{\scriptsize δ_r}SL(Z)$ csoportnak, mely ekvivalens a $\hat{V}^{0,\sigma}$ ábrázolással.

Mint az előző fejezetben, legyen

$$F_{(\mathbf{x},A)} : M \to M \ , \ x \mapsto o + \mathbf{x} + \delta_r(A)(x - o) \ ,$$

és

$$\kappa_A : V(0)^+ \to \mathbb{R}^*_+ \ , \ k \mapsto \frac{\alpha(k)}{\alpha(\delta_r(A)^* k)} \ ,$$

ekkor $(\mathbf{x}, A) \in \mathbb{M}\textcircled{\scriptsize δ_r}SL(Z)$ és $\Phi \in H^{0,\sigma}$ esetén

$$V^{0,\sigma}(\mathbf{x}, A)\Phi = F_o^{-1}\left(\kappa_A^{|\sigma|-1/2} \cdot F_o\Big(B^\sigma(A)\Phi \circ F^{-1}_{(\mathbf{x},A)}\Big)\right) \ .$$

Ha $\sigma = \pm 1/2$, akkor $\kappa_A^{|\sigma|-1/2} = 1$, így a fenti formula egyszerűbb alakra hozható:

$$V^{0,\sigma}(\mathbf{x}, A)\Phi = B^\sigma(A)\Phi \circ F^{-1}_{(\mathbf{x},A)} \ .$$

$\sigma \neq \pm 1/2$ esetén az ábrázoló operátorokra nem adható ilyen explicit formula: a Fourier-transzformáció és a függvénnyel való szorzás felcseréléséről csak polinomiális függvények esetén tudunk valamit mondani, $\kappa_A^{|\sigma|-1/2}$ pedig általában nem polinom.

$\Phi \in H^{0,\sigma}$ esetén $\alpha^{-|\sigma|+1/2} \cdot F_o \Phi \in \hat{\mathcal{H}}^{0,\sigma}$, így (az egyenlet mindkét oldalát osztva a $\alpha^{-\sigma+1/2}$ seholsem nulla függvénnyel) a négyesimpulzustérbeli Dirac-egyenletből a Fourier-transzformáció

$$-iD_M \Phi = F_o^{-1}(\mathrm{id}_{\mathbb{M}^*} \cdot F_o \Phi)$$

tulajdonsága szerint kapjuk, hogy a fényszerű ábrázolásokra vonatkotó *téridőbeli Dirac-egyenlet*

- ha $\sigma > 0$, akkor $\left(r\left(\frac{-iD_M}{p_0}\right)^\bullet\right)^\nu \Phi = 0$ minden $\nu = 1, \ldots, 2\sigma$ esetén ,
- ha $\sigma = 0$, akkor $\left(r\left(\frac{-iD_M}{p_0}\right)\right)^1 \Phi = 0$ és $\left(r\left(\frac{-iD_M}{p_0}\right)^\bullet\right)^2 \Phi = 0$,
- ha $\sigma < 0$, akkor $r\left(\frac{-iD_M}{p_0}\right)^\nu \Phi = 0$ minden $\nu = 1, \ldots, 2|\sigma|$ esetén .

Emlékeztetünk arra, hogy

$$h_{c_r} : V(0)^+ \to \mathbb{E}^*_{c_r} \setminus \{0\} \ , \ k \mapsto k - (k \| c_r)\, c_r$$

diffeomorfizmus, inverze $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{p} + |\mathbf{p}| \cdot c_r$, és ha $\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}$ jelöli a $(\mathbb{E}^*_{c_r}, \gamma^*_{c_r}, \mathbb{I}^*)$ euklidészi tér kanonikus mértékét osztva p_0^3-nal, akkor

$$h_{c_r}(\mu_0^+) = \frac{p_0}{|\cdot|} \cdot \mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}} =: \eta \cdot \mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}} \ .$$

Továbbá, ha $\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}$ jelöli a $(\mathbb{E}_{c_r}, \gamma_{c_r}, \mathbb{I})$ euklidészi tér kanonikus mértékét szorozva p_0^3-nal, akkor $\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}$ és $\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}$ duális mértékek.

Legyen $\Psi\in\mathcal{K}(V(0)^+,Z^\sigma)$, ekkor $o\in M$ esetén $F_o^{-1}(\alpha^{|\sigma|-1/2}\cdot\Psi\cdot\mu_0^+)$ reguláris disztribúció, jelölje μ_M-re vonatkozó sűrűségfüggvényét Φ, azaz

$$F_o^{-1}(\alpha^{|\sigma|-1/2}\cdot\Psi\cdot\mu_0^+)=\Phi\cdot\mu_M \ ,$$

akkor $x\in M$ esetén

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\cdot\int \alpha(k)^{|\sigma|-1/2}\cdot\Psi(k)e^{ik(x-o)}d\mu_0^+(k) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\cdot\int \eta(\mathbf{p})^{|\sigma|-1/2}\cdot\Psi(h_{c_r}^{-1}(\mathbf{p}))e^{ih_{c_r}^{-1}(\mathbf{p})(x-o)}\eta(\mathbf{p})d\mu_{\mathbb{E}_{c_r}^*}(\mathbf{p}) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\cdot\int \eta(\mathbf{p})^{|\sigma|+1/2}\cdot\Psi(h_{c_r}^{-1}(\mathbf{p}))e^{i\mathbf{p}(x-o)}e^{i|\mathbf{p}|c_r\cdot(x-o)}d\mu_{\mathbb{E}_{c_r}^*}(\mathbf{p}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot F^+_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}^*}}\left(\eta^{|\sigma|+1/2}\cdot\big(\Psi\circ h_{c_r}^{-1}\big)\cdot e^{i|\,\cdot\,|\cdot c_r\cdot(x-o)}\right)\big((x-o)_{\|c_r}\big) \ .\end{aligned}$$

Azonban $\Psi\in\hat{\mathcal{H}}^{0,\sigma}\subset L^2_{Z^\sigma}(\alpha^{2|\sigma|}\cdot\mu_0^+)$ esetén $\eta^{|\sigma|+1/2}\big(\Psi\circ h_{c_r}^{-1}\big)\cdot\in L^2_Z(\mu_{\mathbb{E}_{c_r}^*})$, és a

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot F^+_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}^*}}\left(\eta^{|\sigma|+1/2}\big(\Psi\circ h_{c_r}^{-1}\big)\cdot e^{i|\,\cdot\,|\cdot c_r\cdot(x-o)}\right)\big((x-o)_{\|c_r}\big)$$

formula értelmes, ha F^+ a Fourier–Plancherel-operátor, és $F_o^{-1}(\alpha^{|\sigma|-1/2}\cdot\Psi\cdot\mu_0^+)$ reguláris disztribúció Φ sűrűségfüggvénnyel.

Jelölje I_{c_r} az M-beli $\mathbb{E}_{c_r}$-rel párhuzamos hipersíkok halmazát, ez affin tér $\mathbb{I}$ felett, $t\in I_{c_r}$ esetén a $\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}$ mérték egyértelműen meghatároz egy t-feletti eltolásinvariáns pozitív mértéket, melyet μ_t-vel jelölünk.

$t\in I_{c_r}$ és $x\in t$ esetén, ha $o\in t_o$, akkor $\Phi_{|t}\in\mathcal{L}^2_{Z^\sigma}(\mu_t)$, és

$$\begin{aligned}\|\Phi_{|t}\|^2 &= \int \|\Phi(x)\|^2 d\mu_t(x) = \\ &= \frac{1}{2\pi}\cdot\int\left\|F^+_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}^*}}\left(\eta^{|\sigma|+1/2}\cdot\big(\Psi\circ h_{c_r}^{-1}\big)\cdot e^{-i|\,\cdot\,|\cdot(t-t_o)}\right)\big((x-o)_{\|c_r}\big)\right\|^2 d\mu_t(x) = \\ &= \frac{1}{2\pi}\cdot\int\left\|F^+_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}^*}}\left(\eta^{|\sigma|+1/2}\cdot\big(\Psi\circ h_{c_r}^{-1}\big)\cdot e^{-i|\,\cdot\,|\cdot(t-t_o)}\right)(q)\right\|^2 d\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}(q) = \\ &= \frac{1}{2\pi}\cdot\int\left\|\eta^{|\sigma|+1/2}\cdot\big(\Psi\circ h_{c_r}^{-1}\big)\right\|^2 d\mu_{\mathbb{E}_{c_r}^*} \ ,\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}\|\Psi\|^2 &= \int\limits_{V(0)^+} \|\Psi\|^2\alpha^{2|\sigma|}d\mu_0^+ = \int\big\|\big(\Psi\circ h_{c_r}^{-1}\big)\big\|^2\cdot\eta^{2|\sigma|+1}d\mu_{\mathbb{E}_{c_r}^*} = \\ &= \int\left\|\eta^{|\sigma|+1/2}\big(\Psi\circ h_{c_r}^{-1}\big)\right\|^2 d\mu_{\mathbb{E}_{c_r}^*} \ ,\end{aligned}$$

tehát tetszőleges $t\in I_{c_r}$ esetén

$$\|\Phi_{|t}\|^2 = \frac{1}{2\pi}\cdot\|\Psi\|^2_{\hat{\mathcal{H}}^{0,\sigma}} = \|\Phi\|^2_{H^{0,\sigma}} \ .$$

Eddig $H^{0,\sigma}$ elemeinek néhány tulajdonságát ismertük meg. A pontos jellemzést egyenlőre csak $\sigma{=}\pm1/2$ esetén tudjuk elvégezni.

Legyen $\Phi{:}M{\to}Z$ lokálisan μ_M-integrálható leképezés úgy, hogy minden $t{\in}I_{c_r}$ esetén $\Phi|_t{\in}\mathcal{L}^2_Z(\mu_t)$, továbbá disztribúció értelemben teljesül a Dirac-egyenlet.

Legyen

$$r_{c_r,o} : \mathbb{I}{\times}\mathbb{E}_{c_r} \to M \ , \ (\mathbf{t},\mathbf{q}) \mapsto o + c_r\mathbf{t} + \mathbf{q}$$

a (c_r, o) szerinti bontás, és $\overline{\Phi}{:=}\Phi{\circ}h_{c_r,o}$. Ekkor az előző pontban elmondottakhoz hasonlóan

$$D_M\Phi = (\mathbf{r}_{c_r}^{-1})^* D\overline{\Phi}{\circ}r_{c_r,o}^{-1} = \big(-c_r\partial_o\overline{\Phi} + \nabla_{c_r}\overline{\Phi}\big){\circ}r_{c_r,o}^{-1} \ ,$$

így $\sigma{=}1/2$ esetén

$$\begin{aligned} 0 = r\left(\frac{-iD_M}{p_0}\right)^{\bullet}\Phi &= \left(r\left(\frac{ic_r\partial_o - i\nabla_{c_r}}{p_0}\right)^{\bullet}\overline{\Phi}\right){\circ}r_{c_r,o}^{-1} = \\ &= \left(\frac{-i\partial_o}{p_0}\overline{\Phi} + r\left(\frac{-i\nabla_{c_r}}{p_0}\right)\overline{\Phi}\right){\circ}r_{c_r,o}^{-1} \ , \end{aligned}$$

így a Dirac-egyenlet (c_r, o)-bontott alakja

$$i\partial_o\overline{\Phi} = p_0 r\left(\frac{-i\nabla_{c_r}}{p_0}\right)\overline{\Phi} \ .$$

Hasonlóan, $\sigma{=}{-}1/2$ esetén

$$i\partial_o\overline{\Phi} = -p_0 r\left(\frac{-i\nabla_{c_r}}{p_0}\right)\overline{\Phi} \ ,$$

a két eset együtt:

$$i\partial_o\overline{\Phi} = 2\sigma p_0{\cdot}r\left(\frac{-i\nabla_{c_r}}{p_0}\right)\overline{\Phi} \ .$$

$\mathbf{t}{\in}\mathbb{I}$ és $\mathbf{p}{\in}\mathbb{E}^*_{c_r}$ esetén legyen

$$Y(\mathbf{t},\mathbf{p}) := F^-_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}}\overline{\Phi}(\mathbf{t},\,.\,)(\mathbf{p}) \ ,$$

ekkor a bontott Dirac-egyenlet mindkét oldalát rögzített $\mathbf{t}{\in}\mathbb{I}$ mellett negatív Fourier-transzformálva kapjuk, hogy

$$i\partial_o Y(\mathbf{t},\mathbf{p}) = 2\sigma p_0 r\left(\frac{\mathbf{p}}{p_0}\right)Y(\mathbf{t},\mathbf{p}) \ .$$

Ez rögzített $\mathbf{p}{\in}\mathbb{E}^*_{c_r}$ esetén közönséges differenciálegyenlet az $Y(\,.\,,\mathbf{p})$ függvényre. Könyen ellenőrizhető, hogy a jobb oldalon álló

$$A(\mathbf{p}) := r\left(\frac{\mathbf{p}}{p_0}\right) \in L(Z)$$

lineáris operátor önadjungált, $p_0{\cdot}A(\mathbf{p})$ sajátértékei $\pm|\mathbf{p}|$, így a differenciálegyenlet általános megoldása

$$Y(\mathbf{t},\mathbf{p}) = e^{-i2\sigma|\mathbf{p}|\cdot\mathbf{t}}{\cdot}Y_+(\mathbf{p}) + e^{i2\sigma|\mathbf{p}|\cdot\mathbf{t}}{\cdot}Y_-(\mathbf{p}) \ , \qquad (T)$$

ahol $Y_\pm(\mathbf{p})$ a $\pm|\mathbf{p}|$ sajátértékhez tartozó sajátvektora a $p_0{\cdot}A(\mathbf{p})$ operátornak, ami azzal ekvivalens, hogy

$$r\left(\frac{\mathbf{p}\mp|\mathbf{p}|{\cdot}c_r}{p_0}\right)Y_\pm(\mathbf{p}) = 0 \ , \tag{$*$}$$

ez $\sigma{=}1/2$ esetén a pozitív előjelet választva

$$r\left(\frac{\mathbf{p}{+}|\mathbf{p}|{\cdot}c_r}{p_0}\right)^{\bullet}Y_+(\mathbf{p}) = 0 \ ,$$

$\sigma{=}{-}1/2$ esetén pedig a negatív előjelet választva

$$r\left(\frac{\mathbf{p}{+}|\mathbf{p}|{\cdot}c_r}{p_0}\right)Y_-(\mathbf{p}) = 0 \ .$$

Az

$$M_A : L^2_Z(\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}) \rightarrowtail L^2_Z(\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}) \ , \ \psi \mapsto A\psi$$

szorzásoperátor önadjungált, és belátható, hogy spekruma $\mathbb{R}$, $\mathbf{p}{\in}\mathbb{E}^*_{c_r}$ esetén legyen $\lambda_\pm(\mathbf{p}){:=}\pm\dfrac{|\mathbf{p}|}{p_0}$, és

$$P_\pm(\mathbf{p}) := \frac{A(\mathbf{p}) + \lambda_\pm(\mathbf{p})\,\mathrm{id}_Z}{2\lambda_\pm(\mathbf{p})}$$

az $A(\mathbf{p})$ operátor $\lambda_\pm(\mathbf{p})$ sajátértékéhez tartozó sajátalterének ortogonális projektora. Ekkor

$$A(\mathbf{p}) = \lambda_+(\mathbf{p})P_+(\mathbf{p}) + \lambda_-(\mathbf{p})P_-(\mathbf{p}) \ .$$

Jelölje $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ az $\mathbb{R}$ Borel-féle σ-algebráját, ekkor

$$R_A : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to L(L^2_Z(\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}})) \ , \ H \mapsto M_{(\chi_H\circ\lambda_+)\cdot P_+ + (\chi_H\circ\lambda_-)\cdot P_-}$$

projektormérték, $\varphi{\in}L^2_Z(\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}})$ és $\psi{\in}\,\mathrm{Dom}(M_A)$ esetén

$$\begin{aligned}\left\langle\varphi, \left(\int \mathrm{id}_{\mathbb{R}}\, dR_A\right)\psi\right\rangle &= \int \mathrm{id}_{\mathbb{R}}\, d\,\langle\varphi, R_A(\,.\,)\psi\rangle = \\ &= \int\Big(\lambda_+\,\langle\varphi, P_+\psi\rangle + \lambda_-\,\langle\varphi, P_-\psi\rangle\Big)d\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}} = \\ &= \int\Big\langle\varphi, \Big(\lambda_+P_+ + \lambda_-P_-\Big)\psi\Big\rangle\, d\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}} = \\ &= \int\langle\varphi, A\psi\rangle\, d\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}} = \langle\varphi, M_A\psi\rangle \ ,\end{aligned}$$

tehát

$$\int \mathrm{id}_{\mathbb{R}}\, dR_A = M_A \ ,$$

azaz az R_A projektormérték az M_A operátor spektrálfelbontása.

Jelölje $H_+(L^2_Z(\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}))$ illetve $H_-(L^2_Z(\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}))$ az $R_A(]0,+\infty[)$ illetve $R_A(]-\infty,0[)$ ortogonális projektorok értékkészletét. Mivel R_A definíciója szerint

$$R_A(\{0\}){=}M_0 \ \ , \ \ R_A(]0,+\infty[){=}M_{P_+} \ \text{ és } \ R_A(]-\infty,-0[){=}M_{P_-} \ ,$$

$\psi \in L^2_Z(\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}})$ esetén $\psi \in H_\pm(L^2_Z(\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}))$ akkor és csak akkor, ha $M_{P_\pm}\psi = \psi$, azaz, ha $\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}$-majdnem minden $\mathbf{p} \in \mathbb{E}^*_{c_r}$ esetén

$$p_0 r\left(\frac{\mathbf{p}}{p_0}\right)\psi(\mathbf{p}) = \pm|\mathbf{p}|\psi(\mathbf{p})\ .$$

Az

$$\mathcal{A} := r\left(\frac{-i\nabla_{c_r}}{p_0}\right)$$

$L^2_Z(\mu_{\mathbb{E}_{c_r}})$-ben értelmezett operátor önadjungált, spektruma $\mathbb{R}$, jelölje $\mathcal{R}_\mathcal{A}$ a spektrálfelbontását, és $\mathcal{H}_+(L^2_Z(\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}))$ illetve $\mathcal{H}_-(L^2_Z(\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}))$ az $\mathcal{R}_\mathcal{A}(]0,+\infty[)$ illetve $\mathcal{R}_\mathcal{A}(]-\infty,0[)$ ortogonális projektorok értékkészletét.

Mivel

$$F^-_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}} \circ \mathcal{A} = M_A \circ F^-_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}}\ ,$$

így

$$F^-_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}} \circ \mathcal{R}_\mathcal{A}(\,.\,) = R_A(\,.\,) \circ F^-_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}}\ ,$$

következésképpen

$$F^-_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}}\left\langle \mathcal{H}_\pm(L^2_Z(\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}))\right\rangle = H_\pm(L^2_Z(\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}))\ .$$

Jelölje $x \in M$ esetén Pos_x azon $\Phi : M \to Z$ lokálisan μ_M-integrálható leképezések halmazát, melyekre $(Z_x\Phi)|_{\mathbb{E}_{c_r}} \in \mathcal{H}_+(L^2_Z(\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}))$ teljesül, és legyen

$$\mathrm{Pos} := \bigcap_{x \in M} \mathrm{Pos}_x\ .$$

Tegyük fel, hogy az eddigi feltételek mellett $\Phi \in \mathrm{Pos}_o$ is teljesül. Ekkor $\overline{\Phi}(0,\,.\,) \in \mathcal{H}_+(L^2_Z(\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}))$, következésképpen $Y(0,\,.\,) \in H_+(L^2_Z(\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}))$, így a (T)-vel jelölt képletben $\sigma = 1/2$ esetén csak az $Y_-(\mathbf{p}) := 0$ eset lehetséges, tehát

$$Y(\mathbf{t},\mathbf{p}) = e^{-i|p|\cdot \mathbf{t}} \cdot Y_+(\mathbf{p}) = e^{-i|\mathbf{p}|\cdot \mathbf{t}} \cdot Y(0,\mathbf{p})\ ,$$

$\sigma = -1/2$ esetén csak az $Y_+(\mathbf{p}) := 0$ eset lehetséges, tehát

$$Y(\mathbf{t},\mathbf{p}) = e^{-i|\mathbf{p}|\cdot \mathbf{t}} \cdot Y_-(\mathbf{p}) = e^{-i|\mathbf{p}|\cdot \mathbf{t}} \cdot Y(0,\mathbf{p})\ ,$$

így mindkét esetben minden $\mathbf{t} \in \mathbb{I}$ esetén $Y(\mathbf{t},\,.\,) \in H_+(L^2_Z(\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}))$, következésképpen $\Phi \in \mathrm{Pos}$, és

$$e^{i|\mathbf{p}|\cdot \mathbf{t}} \cdot F^-_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}} \overline{\Phi}(\mathbf{t},\,.\,)(\mathbf{p}) = F^-_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}} \overline{\Phi}(0,\,.\,)(\mathbf{p})\ ,$$

azaz

$$e^{i|\mathbf{p}|\cdot \mathbf{t}} \cdot F^-_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}} \Phi(o + c_r\mathbf{t} + (\,.\,))(\mathbf{p}) = F^-_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}}\big((Z_o\Phi)|_{\mathbb{E}_{c_r}}\big)(\mathbf{p})\ . \qquad (**)$$

Legyen

$$\Psi : V(0)^+ \to Z\ ,\ k \mapsto \sqrt{2\pi} \cdot \alpha(k)^{-1} \cdot F^-_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}}\big((Z_o\Phi)|_{\mathbb{E}_{c_r}}\big)(h_{c_r}(k))\ ,$$

ekkor $(*)$ szerint (a pozitív előjelet véve) $\Psi\in\hat{\mathcal{H}}^{0,\sigma}$, és $\mathbf{p}\in\mathbb{E}^*_{c_r}$ és $\mathbf{t}\in\mathbb{I}$ esetén $(**)$ szerint

$$\Psi(h_{c_r}^{-1}(\mathbf{p})) = \sqrt{2\pi}\cdot\eta(\mathbf{p})^{-1}\cdot F^-_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}}\big((Z_o\Phi)|_{\mathbb{E}_{c_r}}\big)(\mathbf{p}) =$$
$$= \sqrt{2\pi}\cdot\eta(\mathbf{p})^{-1}\cdot e^{i|\mathbf{p}|\cdot\mathbf{t}}\cdot F^-_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}}\Phi(o+c_r\mathbf{t}+(\,.\,))(\mathbf{p}) \ ,$$

így $(\mathbf{t},\mathbf{q})\in\mathbb{I}\times\mathbb{E}_{c_r}$ esetén

$$\Phi(o+c_r\mathbf{t}+\mathbf{q}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot F^+_{\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}}\Big(\eta\cdot\big(\Psi\circ h_{c_r}^{-1}\big)\cdot e^{-i|\,.\,|\cdot\mathbf{t}}\Big)(\mathbf{q}) \ ,$$

azaz

$$F_o(\Phi\cdot\mu_M) = \Psi\cdot\mu_0^+ \ .$$

Az eddigiek összefoglalásaként: $H^{0,\sigma}$ azon $\Phi\in\mathrm{Pos}$ függvényekből áll, melyekre teljesül $\sigma{=}1/2$ esetén a

$$r\left(\frac{-iD_M}{m}\right)^{\bullet}\Phi = 0 \ ,$$

$\sigma{=}-1/2$ esetén a

$$r\left(\frac{-iD_M}{m}\right)\Phi = 0$$

Dirac-egyenlet.

Megjegyzés A Dirac-egyenletből következik a Klein–Gordon-egyenletnek megfelelő *hullámegyenlet*:

$$g^*(D_M,D_M)\Phi = 0 \ ,$$

melynek bontott alakja

$$\partial_o^2\overline{\Phi} - \Delta_{c_r}\overline{\Phi} = 0 \ ,$$

és a térbeli részben Fourier-transzformált egyenlet:

$$-\partial_o^2 Y(\,.\,,\mathbf{p}) = |\mathbf{p}|^2 Y(\,.\,,\mathbf{p}) \ .$$

3.4 A foton ábrázolás

Legyen most $o\in M$ esetén

$$F_o := (F^-_\mu\circ Z_o)\otimes\mathrm{id}_{\mathbb{M}^*_{\mathbb{C}}} : S(M)'\otimes\mathbb{M}^*_{\mathbb{C}} \to S(\mathbb{M}^*)'\otimes\mathbb{M}^*_{\mathbb{C}} \ .$$

Jelölje μ_M azt az egyetlen eltolásinvariáns pozitív Radon-mértéket M felett, melyre minden $o\in M$ esetén $O_o(\mu_M){=}\mu$ teljesül.

Legyen $p\in V(0)^+$ rögzített, és $p_0{:=}(p\|c_r)$. Az előző részben elmondottakhoz hasonlóan, $\Psi\in\hat{\mathcal{H}}\subset L^2_{\mathbb{M}^*_{\mathbb{C}}}(\mu_0^+)$ esetén

$$\alpha^{-1/2}\cdot\Psi \in L^2_{\mathbb{M}^*_{\mathbb{C}}}(\alpha\cdot\mu_0^+) \ ,$$

így az $\alpha^{-1/2}\cdot\Psi\cdot\mu_0^+$ Radon mérték kiterjeszthető $\mathbb{M}^*$-re Radon mértékké, ez a kiterjesztett mérték mérsékelt disztribúció, így $o\in M$ esetén $F_o^{-1}(\alpha^{-1/2}\cdot\Psi\cdot\mu_0^+)$ mérsékelt disztribúció M felett.

$\Psi \in \mathcal{K}(V(0)^+, \mathbb{M}^*_{\mathbb{C}})$ esetén $F_o^{-1}(\alpha^{-1/2} \cdot \Psi \cdot \mu_0^+)$ reguláris disztribúció, sűrűségfüggvénye μ_M-re nézve: $x \in M$ esetén

$$K(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \int \alpha(k)^{-1/2} \cdot \Psi(k) e^{ik(x-o)} d\mu_0^+(k) \ .$$

Később látni fogjuk, hogy $F_o^{-1}(\alpha^{-1/2} \cdot \Psi \cdot \mu_0^+)$ reguláris disztribúció $\Psi \in \hat{\mathcal{H}} \subset L^2_{\mathbb{M}^*_{\mathbb{C}}}(\mu_0^+)$ esetén is.

Továbbá, az

$$i : L^2_{\mathbb{M}^*_{\mathbb{C}}}(\mu_0^+) \to L^2_{\mathbb{M}^*_{\mathbb{C}}}(\alpha \cdot \mu_0^+) \ , \ \Psi \mapsto \alpha^{-1/2} \cdot \Psi$$

leképezés unitér a két Hilbert-tér között.

Tekintsük a $\mathbb{M} \circledS_r SL(Z)$ csoport következő ábrázolását:

(1) Az ábrázolás tere:

$$H := (F_o^{-1} \circ i) \langle \hat{\mathcal{H}} \rangle \ ,$$

(2) Az ábrázolási tér skalárszorzata:

$$(S, T) \mapsto \frac{1}{2\pi} \left\langle (i^{-1} \circ F_o)(S), (i^{-1} \circ F_o)(T) \right\rangle_{\hat{\mathcal{H}}} \ ,$$

(3) Az ábrázló operátorok: $(\mathbf{x}, A) \in \mathbb{M} \circledS_r SL(Z)$ esetén

$$V(\mathbf{x}, A) := F_o^{-1} \circ i \circ \hat{V}(\mathbf{x}, A) \circ i^{-1} \circ F_o \ .$$

Ekkor V folytonos unitér ábrázolása az $\mathbb{M} \circledS_r SL(Z)$ csoportnak, mely ekvivalens a $\hat{V}$ ábrázolással.

Mint az előző fejezetben, legyen

$$F_{(\mathbf{x},A)} : M \to M \ , \ x \mapsto o + \mathbf{x} + \delta_r(A)(x - o) \ ,$$

és

$$\kappa_A : V(0)^+ \to \mathbb{R}^*_+ \ , \ k \mapsto \frac{\alpha(k)}{\alpha(\delta_r(A)^* k)} \ ,$$

ekkor $(\mathbf{x}, A) \in \mathbb{M} \circledS_r SL(Z)$ és $K \in H$ esetén

$$V(\mathbf{x}, A) K = F_o^{-1} \left(\kappa_A^{-1/2} \cdot F_o \left(\hat{\delta}_r(A)_{\mathbb{C}} K \circ F^{-1}_{(\mathbf{x},A)} \right) \right) \ .$$

A Fourier-transzformáció tulajdonságai szerint $K \in H$ esetén

$$-iD_M K = F_o^{-1}(\mathrm{id}_{\mathbb{M}^*} \cdot F_o K) \ ,$$

következésképpen a fényszerű ábrázolásokra vonatkozó Dirac-egyenlet

$$g^*_{\mathbb{C}}(-iD_M, K) = 0 \ ,$$

vagy más alakban

$$\operatorname{div} K = 0 \ ,$$

ezt az elektrodinamikában *Lorentz-feltételnek* nevezik.

$K{\in}H$ esetén $\langle K,K\rangle=0$ ekvivalens azzal, hogy

$$-iD_M{\wedge}K=0\ ,$$

vagy más alakban

$$dK=0\ .$$

Megjegyzés Abból, hogy a $\hat{\mathcal{H}}$ elemeinek megfelelő disztribúciók tartója része a $V(0)^+$ halmaznak, következik a *hullámegyenlet*:

$$\Box\, K=0\ ,$$

melyet az elektrodinamikában *Maxwell-egyenletnek* is szokás nevezni.

Emlékeztetünk arra, hogy

$$h_{c_r}:V(0)^+\to\mathbb{E}^*_{c_r}\backslash\{0\}\ ,\ k\mapsto k-(k\|c_r)\,c_r$$

diffeomorfizmus, inverze $\mathbf{p}{\mapsto}\mathbf{p}{+}|\mathbf{p}|{\cdot}c_r$, és ha $\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}$ jelöli a $(\mathbb{E}^*_{c_r},\gamma^*_{c_r},\mathbb{I}^*)$ euklidészi tér kanonikus mértékét osztva p_0^3-nal, akkor

$$h_{c_r}(\mu_0^+)=\frac{p_0}{|\cdot|}{\cdot}\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}=:\eta{\cdot}\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}\ .$$

Továbbá, ha $\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}$ jelöli a $(\mathbb{E}_{c_r},\gamma_{c_r},\mathbb{I})$ euklidészi tér kanonikus mértékét szorozva p_0^3-nal, akkor $\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}$ és $\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}$ duális mértékek.

Legyen $\Psi{\in}\mathcal{K}(V(0)^+,\mathbb{M}^*_{\mathbb{C}})$, ekkor $o{\in}M$ esetén $F_o^{-1}(\alpha^{-1/2}{\cdot}\Psi{\cdot}\mu_0^+)$ reguláris disztribúció, jelölje μ_M-re vonatkozó sűrűségfüggvényét K, azaz

$$F_o^{-1}(\alpha^{-1/2}{\cdot}\Psi{\cdot}\mu_0^+){=}K{\cdot}\mu_M\ ,$$

akkor $x{\in}M$ esetén

$$\begin{aligned}K(x)&=\frac{1}{(2\pi)^2}{\cdot}\int\alpha(k)^{-1/2}{\cdot}\Psi(k)e^{ik(x-o)}d\mu_0^+(k)=\\&=\frac{1}{(2\pi)^2}{\cdot}\int\eta(\mathbf{p})^{-1/2}{\cdot}\Psi(h_{c_r}^{-1}(\mathbf{p}))e^{ih_{c_r}^{-1}(\mathbf{p})(x-o)}\eta(\mathbf{p})d\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}(\mathbf{p})=\\&=\frac{1}{(2\pi)^2}{\cdot}\int\eta(\mathbf{p})^{1/2}{\cdot}\Psi(h_{c_r}^{-1}(\mathbf{p}))e^{i\mathbf{p}(x-o)}e^{i|\mathbf{p}|c_r\cdot(x-o)}d\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}(\mathbf{p})=\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}{\cdot}F^+_{\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}}\Big(\eta^{1/2}{\cdot}\big(\Psi{\circ}h_{c_r}^{-1}\big){\cdot}e^{i|\,\cdot\,|\cdot c_r\cdot(x-o)}\Big)\big((x{-}o)_{\|c_r}\big)\ .\end{aligned}$$

Azonban $\Psi{\in}\hat{\mathcal{H}}{\subset}L^2_{\mathbb{M}^*_{\mathbb{C}}}(\mu_0^+)$ esetén $\eta^{1/2}\big(\Psi{\circ}h_{c_r}^{-1}\big){\cdot}{\in}L^2_{\mathbb{M}^*_{\mathbb{C}}}(\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}})$, és a

$$K(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}{\cdot}F^+_{\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}}\Big(\eta^{1/2}\big(\Psi{\circ}h_{c_r}^{-1}\big){\cdot}e^{i|\,\cdot\,|\cdot c_r\cdot(x-o)}\Big)\big((x{-}o)_{\|c_r}\big)$$

formula értelmes, ha F^+ a Fourier–Plancherel-operátor, és $F_o^{-1}(\alpha^{-1/2}{\cdot}\Psi{\cdot}\mu_0^+)$ reguláris disztribúció K sűrűségfüggvénnyel.

Jelölje I_{c_r} az M-beli $\mathbb{E}_{c_r}$-rel párhuzamos hipersíkok halmazát, ez affin tér $\mathbb{I}$ felett, $t{\in}I_{c_r}$ esetén a $\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}$ mérték egyértelműen meghatároz egy t-feletti eltolásinvariáns pozitív mértéket, melyet μ_t-vel jelölünk.

$t \in I_{c_r}$ és $x \in t$ esetén, ha $o \in t_o$, akkor $K_{|t} \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{M}^*_{\mathbb{C}}}(\mu_t)$, és

$$\begin{aligned}
\|K_{|t}\|^2 &= \int \|K(x)\|^2 d\mu_t(x) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \int \left\| F^+_{\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}} \left(\eta^{1/2} \cdot \left(\Psi \circ h^{-1}_{c_r} \right) \cdot e^{-i|\,\cdot\,|\cdot(t-t_o)} \right) \left((x-o)_{\|c_r} \right) \right\|^2 d\mu_t(x) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \int \left\| F^+_{\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}} \left(\eta^{1/2} \cdot \left(\Psi \circ h^{-1}_{c_r} \right) \cdot e^{-i|\,\cdot\,|\cdot(t-t_o)} \right) (q) \right\|^2 d\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}(q) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \int \left\| \eta^{1/2} \cdot \left(\Psi \circ h^{-1}_{c_r} \right) \right\|^2 d\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}} \ ,
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
\|\Psi\|^2 &= \int\limits_{V(0)^+} \|\Psi\|^2 d\mu^+_0 = \int \left\| \left(\Psi \circ h^{-1}_{c_r} \right) \right\|^2 \cdot \eta \, d\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}} = \\
&= \int \left\| \eta^{1/2} \left(\Psi \circ h^{-1}_{c_r} \right) \right\|^2 d\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}} \ ,
\end{aligned}$$

tehát tetszőleges $t \in I_{c_r}$ esetén

$$\|K_{|t}\|^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \|\Psi\|^2_{\hat{\mathcal{H}}} = \|K\|^2_H \ .$$

Legyen $K : M \to \mathbb{M}^*_{\mathbb{C}}$ lokálisan μ_M-integrálható leképezés úgy, hogy minden $t \in I_{c_r}$ esetén $K|_t \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{M}^*_{\mathbb{C}}}(\mu_t)$, továbbá disztribúció értelemben teljesül a

$$\Box K = 0$$

hullámegyenlet és a

$$\operatorname{div} K = 0$$

Lorentz-feltétel.

Legyen

$$r_{c_r,o} : \mathbb{I} \times \mathbb{E}_{c_r} \to M \ , \ (\mathbf{t}, \mathbf{q}) \mapsto o + c_r \mathbf{t} + \mathbf{q}$$

a (c_r, o) szerinti bontás, és $\overline{K} := K \circ r_{c_r,o}$. Ekkor az előző pontban elmondottakhoz hasonlóan

$$D_M K = (\mathbf{r}^{-1}_{c_r})^* D\overline{K} \circ r^{-1}_{c_r,o} = \left(-c_r \partial_o \overline{K} + \nabla_{c_r} \overline{K} \right) \circ r^{-1}_{c_r,o} \ , \qquad (*)$$

ennek nyomát véve kapjuk, hogy

$$\operatorname{div} K = \left(-\partial_o \overline{K}_{\mathbb{I}} c_r + \nabla_{c_r} \cdot \overline{K} \right) \circ r^{-1}_{c_r,o} \ ,$$

továbbá, $(*)$-ot még egyszer alkalmazva, és a második derivált nyomát képezve kapjuk, hogy

$$\Box K = \left(-\partial_o^2 \overline{K} + \Delta_{c_r} \overline{K} \right) \circ r^{-1}_{c_r,o} \ ,$$

tehát a két feltétel bontott alakja:

$$\begin{aligned}
-\partial_o \overline{K}_{\mathbb{I}} c_r + \nabla_{c_r} \cdot \overline{K} &= 0 \ , \\
-\partial_o^2 \overline{K} + \Delta_{c_r} \overline{K} &= 0 \ .
\end{aligned}$$

$\mathbf{t}\in\mathbb{I}$ és $\mathbf{p}\in\mathbb{E}^*_{c_r}$ esetén legyen

$$Y(\mathbf{t},\mathbf{p}) := F^-_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}}\overline{K}(\mathbf{t},\,.\,)(\mathbf{p})\ ,$$

ekkor a bontott hullámegyenlet mindkét oldalát rögzített $\mathbf{t}\in\mathbb{I}$ mellett negatív Fourier-transzformálva kapjuk, hogy

$$\partial_o^2 Y(\mathbf{t},\mathbf{p}) + |\mathbf{p}|^2\cdot Y(\mathbf{t},\mathbf{p}) = 0\ .$$

Ez rögzített $\mathbf{p}\in\mathbb{E}^*_{c_r}$ esetén közönséges differenciálegyenlet az $Y(\,.\,,\mathbf{p})$ függvényre, általános megoldása

$$Y(\mathbf{t},\mathbf{p}) = e^{-i|\mathbf{p}|\cdot\mathbf{t}}\cdot Y_+(\mathbf{p}) + e^{i|\mathbf{p}|\cdot\mathbf{t}}\cdot Y_-(\mathbf{p})\ , \qquad (T)$$

ahol $Y_\pm(\mathbf{p})\in\mathbb{M}^*_{\mathbb{C}}$ tetszőleges.

A bontott Lorentz-feltétel mindkét oldalát rögzített $\mathbf{t}\in\mathbb{I}$ mellett negatív Fourier-transzformálva kapjuk, hogy

$$-\partial_o Y(\mathbf{t},\mathbf{p})_{\mathbb{I}}c_r + i\mathbf{p}\cdot Y(\mathbf{t},\mathbf{p}) = 0\ .$$

Ebbe behelyettesítve az előző általános megoldást kapjuk, hogy:

$$e^{-i|\mathbf{p}|\cdot\mathbf{t}}\cdot Y_+(\mathbf{p})\cdot(\mathbf{p}+|\mathbf{p}|\cdot c_r) + e^{i|\mathbf{p}|\cdot\mathbf{t}}\cdot Y_-(\mathbf{p})\cdot(\mathbf{p}-|\mathbf{p}|\cdot c_r) = 0$$

minden $\mathbf{t}\in\mathbb{I}$ esetén, következésképpen

$$Y_\pm(\mathbf{p})\cdot(\mathbf{p}\pm|\mathbf{p}|\cdot c_r) = 0\ . \qquad (*)$$

Tegyük fel, hogy adott egy olyan feltétel, melynek teljesülése esetén a (T)-vel jelölt képletben csak az $Y_-(\mathbf{p}):=0$ eset lehetséges. Ekkor

$$Y(\mathbf{t},\mathbf{p}) = e^{-i|p|\cdot\mathbf{t}}\cdot Y_+(\mathbf{p}) = e^{-i|\mathbf{p}|\cdot\mathbf{t}}\cdot Y(0,\mathbf{p})\ ,$$

tehát

$$e^{i|\mathbf{p}|\cdot\mathbf{t}}\cdot F^-_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}}\overline{K}(\mathbf{t},\,.\,)(\mathbf{p}) = F^-_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}}\overline{K}(0,\,.\,)(\mathbf{p})\ ,$$

azaz

$$e^{i|\mathbf{p}|\cdot\mathbf{t}}\cdot F^-_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}}K(o+c_r\mathbf{t}+(\,.\,))(\mathbf{p}) = F^-_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}}\big((Z_oK)|_{\mathbb{E}_{c_r}}\big)(\mathbf{p})\ . \qquad (**)$$

Legyen

$$\Psi : V(0)^+ \to Z\ ,\ k\mapsto \sqrt{2\pi}\cdot\alpha(k)^{-1/2}\cdot F^-_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}}\big((Z_oK)|_{\mathbb{E}_{c_r}}\big)(h_{c_r}(k))\ ,$$

ekkor $(*)$ szerint (a pozitív előjelet véve) $\Psi\in\hat{\mathcal{H}}$, és $\mathbf{p}\in\mathbb{E}^*_{c_r}$ és $\mathbf{t}\in\mathbb{I}$ esetén $(**)$ szerint

$$\begin{aligned}\Psi(h^{-1}_{c_r}(\mathbf{p})) &= \sqrt{2\pi}\cdot\eta(\mathbf{p})^{-1/2}\cdot F^-_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}}\big((Z_oK)|_{\mathbb{E}_{c_r}}\big)(\mathbf{p}) = \\ &= \sqrt{2\pi}\cdot\eta(\mathbf{p})^{-1/2}\cdot e^{i|\mathbf{p}|\cdot\mathbf{t}}\cdot F^-_{\mu_{\mathbb{E}_{c_r}}}K(o+c_r\mathbf{t}+(\,.\,))(\mathbf{p})\ ,\end{aligned}$$

így $(\mathbf{t},\mathbf{q})\in\mathbb{I}\times\mathbb{E}_{c_r}$ esetén

$$K(o+c_r\mathbf{t}+\mathbf{q}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot F^+_{\mu_{\mathbb{E}^*_{c_r}}}\Big(\eta^{1/2}\cdot\big(\Psi\circ h^{-1}_{c_r}\big)\cdot e^{-i|\,.\,|\cdot\mathbf{t}}\Big)(\mathbf{q})\ ,$$

azaz

$$F_o(K\cdot\mu_M) = \alpha^{-1/2}\cdot\Psi\cdot\mu_0^+\ ,$$

és így $K\in H$.

.