1. Házi feladat

Beadás: November 7.

1 Tegyük fel, hogy ismerjük egy egyszerű d-reguláris G gráf spektrumát (adjacencia-mátrixának a sajátértékeit). Határozzuk meg (a) komplementerének, (b) élgráfjának a sajátértékeit.

2 Legyen P_n az n csúcsú út. (a) Bizonyítandó, hogy adjacencia-mátrixának a karakterisztikus polinomja az alábbi két alakba írható:

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n - \binom{n-1}{1}\lambda^{n-2} + \binom{n-2}{2}\lambda^{n-4} - \binom{n-3}{3}\lambda^{n-6}\ldots,$$

és

$$\det(\lambda I - A) = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2-4}}\left(\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2-4}2\right)^{n+1} - \left(\lambda - \sqrt{\lambda^2-4}2\right)^{n+1}\right)$$

(b) Határozzuk meg P_n sajátértékeit.

3 Legyen G egyszerű összefüggő gráf n csúcson. Bizonyítandó, hogy Laplace-mátrixának legkisebb pozitív sajátértéke legalább $1/n^2$.

4 Egy síkgráf éleit pirossal és kékkel színezzük. Bizonyítandó, hogy van olyan csúcsa, melyből a kiinduló élek ciklikus sorrendjében a kék élek is, és a piros élek is egymásután következnek.

5 (a) Mutassuk meg, hogy a (végtelen) négyzetrács csúcsain van olyan függvény, amely mindenütt harmónikus.

(b) Bizonyítsuk be, hogy ilyen függvény nem lehet korlátos.

6 Legyen G egy gráf és s egy csúcsa. Legyenek a gráf élei ideális gumiból (mely x erő hatására x hosszúságúra nyúlik), és helyezzünk minden csúcsba akkora súlyt, mint a csúcs foka. Szögezzuk az s csúcsot a falhoz, és hagyjuk, hogy a többi pont egyensúlyba kerülj'on. Jelölje $h(v)$ a v csúcs távolságát s-től.

(a) Indítsunk el egy véletlen bolyongást egy adott v csúcsból, és kövessuk addíg, amíg az s csúcsba nem ér. Bizonyítandó, hogy az eddig tett lépések várható száma $h(v)$.

(b) Határozzuk meg, hogy hány lépésig tart várhatóan, amíg egy v-ből induló bolyongás s-be ér, ha (b1) v és s egy n hosszű út két végpontja, (b2) v és s egy d dimenziós kocka élhálójának két átellenes csúcsa.