2. Házi feladat

Beadás: December 21.

1 Legyen G 3-szorosan összefüggő síkgráf, és tegyük föl, hogy a külső tartomány háromszög. Tekintsük a G-nek és duálisának egy közös körreprezentációját a síkban. Bizonyítsuk be, hogy hozzárendelhetők az élekhez olyan ,,rugóerősségek", hogy a külső lap csúcsait rögzítve, az egyensúlyi helyzetben minden csúcs az őt reprezentáló kör középpontja lesz.

2 Minden d-hez van olyan $\varepsilon(d) > 0$, hogy ha egy síkgráf minden foka legfeljebb d, akkor van olyan egyenes szakaszokkal való síkbarajzolása, melyben bármely két egy pontból kiinduló él szöge legalább $\varepsilon(d)$.

3 Bizonyítsuk be, hogy $\mu(K_{4,4}) \leq 5$.

4 Bizonyítsuk be, hogy minden gráfra $\mu(G) \leq \sqrt{2|V(G)| + 2|E(G)|}$.

5 Legyen $d(G)$ az a legkisebb dimenzió, melyben a G gráfnak van ortogonális reprezentációja. Bizonyítsuk be, hogy

$$\alpha(G) \leq d(G) \leq \chi(\overline{G})$$

(itt $\alpha(G)$ a G gráf független pontjainak maximális száma, $\chi(G)$ a kromatikus száma, $\overline{G}$ pedig a G komplementere.

6 Legyen H a 3-dimenziós kocka élhálójának komplementere. Mutassuk meg, hogy H-nak van 4-dimenziós ortogonális reprezentációja, és írjuk le az összes ilyen reprezentációt.