Gráfok homomorfizmusai

4. Házi feladat
Határidő: Dec. 28

December 14, 2004

4.1 Feladat. (a) Legyenek $F_1, \dots, F_n$ páronként nem izomorf egyszerű gráfok. Bizonyítandó, hogy az alábbi mátrix nem szinguláris:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{inj}(F_1, F_1) & \cdots & \mathrm{inj}(F_1, F_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{inj}(F_n, F_1) & \cdots & \mathrm{inj}(F_n, F_n) \end{pmatrix}$$

(b) Legyenek $F_1, \dots, F_n$ páronként nem izomorf egyszerű gráfok, és legyen G_i az F_i-nek egy pontsúlyozott példánya. Tegyük fel, hogy a szereplő pontsúlyok algebrailag függetlenek. Bizonyítandó, hogy az alábbi mátrix nem szinguláris:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{hom}(F_1, G_1) & \cdots & \mathrm{hom}(F_1, G_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{hom}(F_n, G_1) & \cdots & \mathrm{hom}(F_n, G_n) \end{pmatrix}$$

4.2 Feladat. Bizonyítsuk be, hogy minden egyszerű G gráfra

$$3\frac{t(K_3, G)}{t(K_2, G)} \le 2\frac{t(K_4, G)}{t(K_3, G)} + 1$$

4.3 Feladat. Jelölje $\mathrm{Eul}(G)$ a G gráf Euler-féle irányításainak számát (ha G-ben van páratlan fokú pont, akkor $\mathrm{Eul}(G) = 0$), és legyen $f(G) = \mathrm{Eul}(G)/2^{|E(G)|}$.

(a) Mutassuk meg, hogy $M(k, f)$ pozitív szemidefinit.

(b)* Mutassuk meg, hogy $M(k, f)$ rangja végtelen.

4.4 Feladat. Legyen G_n az $(n \times n)$-es rács. Bizonyítandó, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{hom}(G_n, H)^{1/n^2}$$

minden H gráfra létezik.