Gráfok homomorfizmusai

Előadás–vázlat, 2004 ősz
Lovász László

December 15, 2004

1 Homomorfizmus fogalma.

1.1 Példák:

1.1 Példa. 3 színnel való szinezés: homomorfizmus K_3-ba.

1.2 Példa. Független halmaz: homomorfizmus H-ba, ahol H-t K_2-ből egy hurok hozzávételével kapjuk.

1.3 Példa. Séta G-ben: Út homomorfizmusa G-be.

1.2 Áttekintés:

1.2.1 Van-e homomorfizmus?

NP-teljes (irányítatlan), néha P-ben van. Példa: $G \to P_k$ (irányított)

1.2.2 Hány homomorfizmus van?

hom(F, G): $F \to G$ homomorfizmusok száma.

$$t(F, G) = \frac{\hom(F, G)}{n^k}$$

(homomorfizmus-sűrűség).
Háromszögek és élek száma: Mantel–Turán, Goodman:

1.1 Tétel. $t(K_3, G) \geq t(K_2, G)(2t(K_2, G) - 1)$.

Felhasznált 2 lemma:

1.2 Lemma. $t(K_3, G) - 2t(P_3, G) + t(K_2, G) \geq 0$.

1.3 Lemma. $t(P_3, G) \geq t(K_2, G)^2$.

1.1 Házi feladat. Kruskal–Katona élesítés: $t(K_3, G)^2 \leq t(K_2, G)t(C_4, G)$.

Kromatikus polinom: Ha x nemnegatív egész, akkor $p_G(x)$ a G gráf x színnel való szinezéseinek száma:

$$p_G(x) = \hom(G, K_x)$$

1.4 Állítás. *$P_G(x)$ x-nek polinomja.*

Igy $p_G(x)$ értelmezve van minden komplex x-re.

1.2.3 Mi a homomorfizmusok struktúrája?

1.4 Példa. Mikor lehet egyik szinezést a másikba transzformálni, egyszerre csak egy színt változtatva.

1.2.4 Súlyozott gráfokba való homomorfizmusok

Súlyozott gráf:

$$\alpha_H : V(H) \to \mathbb{R}_+, \qquad \beta_H : E(H) \to \mathbb{R}.$$

Egyszerű súlyozott gráf: $0 \le \beta_H(i,j) \le 1$ minden $i, j \in V(H)$-ra.
Normalizált súlyozott gráf:

$$\alpha(H) = \sum_{i \in V(H)} \alpha_H(i) = 1.$$

Súlyozott gráfok homomorfizmusai: Legyen $\phi : V(G) \to V(H)$, H súlyozott:

$$\alpha_\phi = \prod_{i \in V(G)} \alpha_H(i), \qquad \beta_\phi = \prod_{ij \in E(G)} \beta_H(\phi(i)\phi(j)),$$

$$\hom(G, H) = \sum_{\phi : V(G) \to V(H)} \alpha_\phi \beta_\phi.$$

1.2.5 Statisztikus fizika

Ising-modell.

1.2.6 További példák

1.5 Példa. Csillagok és fokszámok:

$$\hom(S_k, G) = \sum_{i \in V(G)} d_i^{k-1}.$$

1.6 Példa. Körök és az adjacencia–mátrix hatványai:

$$\hom(C_k, G) = \mathrm{tr}(A^k).$$

1.7 Példa. Maximális vágás: H élsúlyai $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{max vágás} \le \log \hom(G, H) \le n + \text{max vágás}.$$

1.8 PÉLDA. Véletlen gráfok:

$$\mathsf{E}(\hom(F,\mathbf{G}(n,p)) = n^k p^{|E(F)|} + O(n^{k-1}).$$

$$\mathsf{Var}(\hom(F,\mathbf{G}(n,p))) = O(n^{2k-1}).$$

2 Azonosságok

2.1 Jelölések

$|V(G)| = n$, $|V(F)| = k$, $|V(H)| = q$.

2.2 Változatok a homomorfizmus fogalmára

$$\mathrm{inj}(F,G) = \#\{\phi :\ V(F)\to V(H),\ \text{injektiv homomorfizmus}\},$$

$$\mathrm{ind}(F,G) = \#\{\phi :\ V(F)\to V(H),\ \text{feszített beágyazás}\},$$

A változatok ekvivalenciája:

$$\mathrm{inj}(F,G) = \sum_{\substack{V(F')=V(F)\\ E(F')\supseteq E(F)}} \mathrm{ind}(F',G)$$

$$\hom(F,G) = \sum_{\theta} \mathrm{inj}(F/\theta),$$

ahol $\Theta = \{A_1,\dots,A_{c(\theta)}\}$ a $V(F)$ partícióin fut végig. Innen szitával

$$\mathrm{ind}(F,G) = \sum_{\substack{V(F')=V(F)\\ E(F')\supseteq E(F)}} (-1)^{|E(F')\setminus E(F)|}\mathrm{inj}(F',G),$$

és

$$\mathrm{inj}(F,G) = \sum_{\theta} \mu(\theta)\hom(F/\theta,G),$$

ahol $\theta = \{A_1,\dots,A_{c(\Theta)}\}$ a $V(F)$ egy partíciója, és

$$\mu(\theta) = (-1)^{n-c(\theta)}(|A_1|-1)!...(|A_{c(\theta)}|-1)!\,.$$

Homomorfizmus sűrűségek:

$$t(F,G) = \frac{\hom(F,G)}{n^k} \qquad t_0(F,G) = \frac{\mathrm{inj}(F,G)}{(n)_k} \qquad t_1(F,G) = \frac{\mathrm{ind}(F,G)}{(n)_k}$$

Azonosságok:

$$t_0(F,G) = \sum_{\substack{V(F')=V(F)\\ E(F')\supseteq E(F)}} t_1(F',G)$$

$$t_1(F,G) = \sum_{\substack{V(F')=V(F)\\ E(F')\supseteq E(F)}} (-1)^{|E(F')\setminus E(F)|} t_0(F',G),$$

A homomorfizmus-sűrűségekre az együtthatók függnek n-től:

$$t(F,G) = \sum_{\theta} \frac{(n)_{c(\theta)}}{n^k} t_0(F/\theta),$$

és

$$t_0(F,G) = \sum_{\theta} \mu(\theta) \frac{(n)_{c(\theta)}}{n^k} t(F/\theta).$$

Nagy n-re ezeknél hasznosabb:

$$|t(F,G) - t_0(F,G)| < \frac{1}{n}\binom{k}{2}. \tag{1}$$

2.3 Egyebek

2.3.1 Komplementálás

$$\begin{aligned}
\mathrm{ind}(F,\overline{G}) &= \mathrm{ind}(\overline{F},G),\\
\mathrm{inj}(F,\overline{G}) &= \sum_{\substack{V(F')=V(F)\\ E(F')\subseteq E(F)}} (-1)^{|E(F)|-|E(F')|}\mathrm{inj}(F',G).\\
\mathrm{hom}(F,\overline{G}) &= \sum_{\substack{V(F')=V(F)\\ F'\subseteq F}} (-1)^{|E(F)|-|E(F')|}\mathrm{hom}(F',G).
\end{aligned}$$

2.3.2 Átlagolás

Ha $|V(F_0)| = |V(G)| = n$, $|E(F_0)| = \ell_0 \leq \ell \leq |E(G)| = m$, akkor

$$\mathrm{inj}(F_0,G) = \frac{1}{\binom{m-\ell_0}{\ell-\ell_0}} \sum_{|E(F)|=\ell} \frac{\mathrm{inj}(F_0,F)\mathrm{inj}(F,G)}{\mathrm{Aut}(F)}.$$

2.3.3 Gráf-műveletek

$$\mathrm{hom}(F_1 \cup F_2, G) = \mathrm{hom}(F_1,G)\mathrm{hom}(F_2,G).$$

Ha F összefüggő:

$$\mathrm{hom}(F, G_1 \cap G_2) = \mathrm{hom}(F,G_1) + \mathrm{hom}(F,G_2).$$

$$\mathrm{hom}(F, G_1 \times G_2) = \mathrm{hom}(F,G_1)\mathrm{hom}(F,G_2)$$

3 Homomorfizmus és izomorfizmus

3.1 Homomorfizmus–profilok

3.1.1 Homomorfizmus–számok: jobb és baloldali profil

Egyszerű gráfparaméter: egyszerű gráfok izomorfia–osztályain értelmezett komplex értékű függvény. *Multigráf-paraméter:* multigráfok (többszörös éleket megengedő gráfok) izomorfia–osztályain értelmezett komplex értékű függvény.

3.1 Tétel. *Legyen G súlyozatlan egyszerű gráf. Ekkor a* $\hom(.,G)$ *egyszerű gráfparaméter meghatározza G-t.*

3.1 Házi feladat. $\hom(G,.)$ meghatározza G-t.

3.2 Rekonstrukció–sejtés

3.2 Sejtés. Ha $|V(G)| > 2$, akkor ($\hom(F,G)$: $|V(F)| < |V(G)|$) meghatározza G-t.

Élváltozat:

3.3 Sejtés. Ha $|E(G)| > 6$, akkor ($\hom(F,G)$: $|E(F)| < |E(G)|$) meghatározza G-t.

3.4 Tétel. *Élrekonstrukció igaz, ha $|E(G)| > n\log n$.*

3.3 Egyszerűsitési szabály, gyökvonás

Szorzat(ok) definíciója:
Gyenge (kategóriaelméleti) szorzat: $V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$, $E(G_1 \times G_2) = \{((u_1,u_2),(v_1,v_2)) : u_1v_1 \in E(G_1), u_2v_2 \in E(G_1)\}$.
Erős szorzat: Minden csúcsba hurkot képzelünk.

3.5 Tétel. *Gyökvonás egyértelmű:* $G_1^2 \cong G_2^2 \Rightarrow G_1 \cong G_2$

3.1 Példa. Egyszerűsítési szabály általában nem igaz:

$$K_2 \times C_6 \cong K_2 \times (K_3 \cup K_3).$$

3.6 Tétel. $G_1 \times G_3 \cong G_2 \times G_3$, *$G_3$-ben van hurok* $\Rightarrow G_1 \cong G_2$.

3.7 Tétel. *Nem-páros gráffal lehet egyszerűsíteni.*

3.2 Házi feladat. Ha $G_1 \times G_3 \cong G_2 \times G_3$ és $\hom(G_4,G_3) > 0$, akkor $G_1 \times G_4 \cong G_2 \times G_4$.

3.3.1 Prímfelbontás

3.2 Példa. Prímfelbontás nem egyértelmű, még akkor sem, ha minden ponton van hurok.

$$(1+x+x^2)(1+x^3) = (1+x)(1+x^2+x^4).$$

3.8 Tétel. *Összefüggő gráfok erős szorzatra vonatkozó prímfelbontása egyértelmű.*

3.3.2 Homomorfizmus–sűrűségek

3.9 Megjegyzés. $t(.,G)$ nem határozza meg G-t, de ,,majdnem": Ha G'-t úgy kapjuk G-ből, hogy minden csúcsát N parhuzamos ponttal helyettesítjük, akkor $t(F,G') = t(F,G)$. L. később.

4 Homomorfizmus-sűrűség és extremális gráfelmélet

4.1 Egyenlőtlenségek

4.1.1 Monotonitás

$$F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow t(F_1, G) \geq t(F_2, G). \tag{2}$$

4.1.2 Cauchy-Schwarz

$$t(K_{1,2}, G) \geq t(K_2, G)^2, \quad t(K_{2,2}, G) \geq t(K_{1,2}, G)^2.$$

r-címkézett gráf: r csúcsa $1, \dots, r$-rel van címkézve, a többi címkézetlen.

r-címkézett gráfok izomorfiája: az izomorfizmus a címkét is tartja.

r-címkézett gráfok szorzata: $F_1 F_2$, ahol $F_1 \cup F_2$-ben a címkézett pontokat ragasztjuk.

Ha F_1, F_2 izomorf r-címkézett multigráfok, akkor

$$t(F_1 F_2, G) \geq t(F_1, G)^2. \tag{3}$$

4.1.3 Szita

Ha $V(F_1) = V(F_2)$, akkor

$$\sum_{F_1 \subseteq F \subseteq F_2} (-1)^{|E(F_2) \setminus E(F)|} \hom(F, G)$$

azon $F_1 \to G$ homomorfizmusok száma, melyek $E(F_2) \setminus E(F_1)$ éleit $\overline{G}$-be képezik. Ezért

$$\sum_{\substack{V(F')=V(F) \\ E(F') \supseteq E(F)}} (-1)^{|E(F') \setminus E(F)|} t_0(F', G) \geq 0 \tag{4}$$

Hasonlóan:

$$\sum_{F_1 \subseteq F \subseteq F_2} (-1)^{|E(F_2) \setminus E(F)|} t(F, G) \geq 0. \tag{5}$$

4.1.4 Szupermodularitás

(5)-ből következik, hogy

$$t(F_1 + e, G) + t(F_1 + f, G) \leq t(F_1, G) + t(F_1 + e + f, G). \tag{6}$$

Ebből:

$$t(F_1 \cup F_2) + t(F_1 \cap F_2) \geq t(F_1) + t(F_2). \tag{7}$$

4.2 Szemidefinitás

4.2.1 Kapcsolási mátrix és tükrözési pozitivitás

Kapcsolási mátrixok: r-címkézett gráfokkal vannak indexelve, és

$$M(r,G)_{F_1,F_2} = \hom(F_1F_2,G).$$

4.1 TÉTEL. *Minden G súlyozott gráfra, és minden $r \geq 0$-ra,*

(a) *$M(0,G)$ pozitív szemidefinit;*

(b) $\mathrm{rk}(M(0,G)) \leq n^k$.

4.2 ÁLLÍTÁS. *(a)-ból a (2), (3), (5) egyenlőtlenségek következnek.*

A bizonyításban az alábbi lemma játszik szerepet. Legyen V véges halmaz és $f:\ 2^V \to \mathbb{R}$ egy halmazfüggvény.

f (felső) összegezési függvénye:

$$f^*(S) = \sum_{R\supseteq S} f(R).$$

f (felső) Möbius transformáltja:

$$f^\dagger(S) = \sum_{R\supseteq S} (-1)^{|R\setminus S|} f(R).$$

Könnyen látható, hogy $(f^\dagger)^* = (f^*)^\dagger = f$.

4.3 LEMMA. (LINDSTRÖM–WILF) *Legyen $A \in \mathbb{R}^{2^V\times 2^V}$ az a (szimmetrikus) mátrix, melyben*

$$A_{S,T} = f(S\cup T).$$

Legyenek a $Z \in \mathbb{R}^{2^V\times 2^V}$ mátrix elemei

$$Z_{S,T} = \begin{cases} 1, & \text{ha } S\subseteq T,\\ 0 & \text{egyébként,}\end{cases}$$

és legyen $D \in \mathbb{R}^{2^V\times 2^V}$ az a (diagonális) mátrix, melyre

$$D_{S,T} = \begin{cases} f^\dagger(S), & \text{ha } S = T,\\ 0 & \text{egyébként.}\end{cases}$$

Akkor

$$A = Z^{\mathsf{T}} D Z.$$

4.4 KÖVETKEZMÉNY. *A akkor és csak akkor pozitív szemidefinit, ha $f^\dagger \geq 0$.*

4.5 Megjegyzés. A lemma általánosabban is érvényes. Legyenek L véges háló. Bizonyítható, hogy van olyan egyértelműen meghatározott $\mu : L \times L \to \mathbb{Z}$ függvény (a háló *Möbius függvénye*), melyre bármely két $x, z \in L$ elemre

$$\sum_{y:\ x \le y \le z} \mu(y, z) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = z, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Egy $f : L \to \mathbb{R}$ függvény *(felső) összegzési függvénye* az

$$f^*(x) = \sum_{\substack{y \in L \\ y \ge x}} f(y)$$

fügvény, és *(felső) Möbius transformáltja* az

$$f^\dagger(x) = \sum_{\substack{y \in L \\ y \ge x}} \mu(y, 1) f(y)$$

definícióval definiált függvény. Ha az $A, Z, D \in \mathbb{R}^{L \times L}$ mátrixokat a következőképpen definiáljuk:

$$A_{x,y} = f(x \vee y),$$

$$Z_{x,y} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \le y, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

és

$$D_{x,y} = \begin{cases} f^\dagger(x), & \text{ha } x = y, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

akkor

$$A = Z^\mathsf{T} D Z.$$

4.3 Tükrözési pozitivitás alkalmazásai

4.3.1 Kvázivéletlen gráfok

Sok ekvivalens megfogalmazás van (Chung, Graham és Wilson):

4.6 Tétel. *Legyen* $0 < p < 1$. *Egy* $(G_N :\ N = 1, 2 \dots)$ *gráfsorozatra az alábbiak ekvivalensek:*

(a) *Minden* F*-re*

$$t(F, G_N) \to p^{|E(F)|} \qquad (N \to \infty).$$

(b) $F = K_2, C_4$*-re*

$$t(F, G_n) \to p^{|E(F)|} \qquad (N \to \infty).$$

(c) *Minden* $S \subseteq V(G_n)$*-re*

$$\frac{1}{n_N^2} \Big| |E(G_n[S])| - p\binom{|S|}{2} \Big| \to 0 \qquad (N \to \infty).$$

(d) *Ha G_N sajátértékei $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots$, akkor*

$$\frac{\lambda_1}{n_N} \to p, \qquad \frac{\lambda_i}{n_N} \to 0 \quad (i \neq 1).$$

Kvázivéletlen p sűrűségű (G_N) gráfsorozat: a fenti tétel feltételeinek eleget tevő sorozat.

4.1 Példa. (Véletlen gráf) $\mathbf{G}(n,p)$-nek n csucsa van, és bármely kettőt egymástól függetlenül p valószínűséggel kötünk össze. A $(\mathbf{G}(n,p) : \ n = 1, 2, \dots)$ sorozat majdnem mindíg kvázivéletlen.

4.2 Példa. (Paley gráf) Legyen p prím, $p \equiv 1 \pmod 4$. A Pal_p gráf csúcsai $\{0, \dots, p-1\}$, i és j akkor és csak akkor cannak összekötve, ha $i - j$ kvadratikus maradék.

4.1 Házi feladat. (Pal_p) kvázivéletlen sorozat.

A 4.6 tételből csak azt bizonyítjuk, hogy (b)$\Rightarrow$(a). A bizonyítás fő lépései:
1°. Feltehetjük, hogy minden F-re

$$t(F) = \lim_{n\to\infty} t(F, G_N)$$

létezik.
2°. Erre a t gráfparaméterre

$$t(F) = p^{|E(F)|} \tag{8}$$

ha $F = K_2, C_4$, és azt akarjuk bizonyítani, hogy minden F-re ugyanez fennáll.
3°. A t gráfparaméterből képzett $M(r,t)$ kapcsolási mátrix pozitív szemidefinit. (Megj.: Minden gráf paraméterből képezhető kapcsolási mátrix.)
4°. (8) fennáll, ha F csillag.
5°. (8) fennáll, ha F kettős csillag.
6°. (8) minden F-re fennáll.

4.3.2 Extremális gráfelmélet

4.7 Tétel. (Moon–Moser)

$$r\frac{t(K_r, G)}{t(K_{r-1}, G)} \le (r-1)\frac{t(K_{r+1}, G)}{t(K_r, G)} + 1$$

5 Milyen függvények állnak elő homfüggvényként?

Homomorfizmus-függvény vagy *homfügvény*: $\hom(., G)$, ahol G súlyozott gráf.

5.1 Gráf-paraméter kapcsolási rangja és tükrözési pozitivitása

Minden f gráf paraméterre a kapcsolási mátrixok $M(r, f)$ értelmezhetők.

Multiplikatív paraméter: Két címkézetlen gráfra $f(F_1F_2) = f(F_1)f(F_2)$.

Normalizált paraméter: $f(K_1) = 1$.

Gyakorló kérdés: a $\hom(., G)$, $\mathrm{inj}(., G)$, $\mathrm{ind}(., G)$, $t(., G)$ és $t_0(., G)$ gráfparaméterk közül melyek homfüggvények, melyek normalizáltak, és melyek multiplikatívok?

5.1 Állítás. *$f \not\equiv 0$ akkor és csak akkor multiplikatív, ha $f(K_0) = 1$, $M(0, f)$ pozitív szemidefinit, és $\mathrm{rk}(M(0, f)) = 1$.*

5.2 Állítás. *Ha f multiplikatív gráfparaméter és $p, q \in \mathbb{Z}_+$, akkor*

$$\mathrm{rk}(M(p + q, f)) \geq \mathrm{rk}(M(p, f)) \cdot \mathrm{rk}(M(q, f)).$$

5.2 A karakterizáció

5.3 Tétel. *Egy f multigráf-paraméterhez akkor és csak akkor létezik olyan legfeljebb q csucsú H súlyozott gráf, melyre $f = \hom(., H)$, ha f tükrözéspozitív és $\mathrm{rk}(M(r, f)) \leq q^r$ minden $r \geq 0$-ra.*

5.4 Következmény. *Egy f multigráf-paraméter akkor és csak akkor homfüggvény, ha f tükrözéspozitív és $\mathrm{rk}(M(r, f))^{1/r}$ korlátos.*

5.2.1 Gráfalgebrák

Kvantumgráf: Véges sok (multi-)gráf formális lineáris kombinációja.
r-címkézett kvantumgráf: Véges sok r-címkézett (multi-)gráf formális lineáris kombinációja. $\mathcal{G}_r$ az r-címkézett kvantumgráfok lineáris tere.
r-címkézett kvantum gráfok szorzata: Két generátorra F_1F_2 mint feljebb, innen lineárisan terjesztjük ki.
r-címkézett kvantum gráfok skalárszorzata (egy f paraméterre nézve): Két generátorra $\langle F_1, F_2\rangle = f(F_1F_2)$, innen lineárisan terjesztjük ki.

5.5 Állítás. *$\mathcal{G}_k$ asszociatív és kommutatív algebra, melyen a skalárszorzatra teljesül:*

$$\langle x, yz\rangle = \langle xy, z\rangle.$$

Az algebrában $\overline{K_r}$ egységelem.

5.6 Állítás. *$\langle x, x\rangle \geq 0$ minden x-re akkor és csak akkor, ha f tükrözéspozitív.*

Legyen

$$\mathcal{N}_r = \mathcal{N}_{r,f} = \{x \in \mathcal{G}_r : \ \langle x, y\rangle = 0 \text{ minden } y \in \mathcal{G}_r\text{-re}\},$$

és

$$\hat{\mathcal{G}}_r = \mathcal{G}_r/\mathcal{N}_r.$$

5.7 Állítás. *Ha f tükrözéspozitív, akkor*

$$\mathcal{N}_r = \mathcal{N}_{r,f} = \{x \in \mathcal{G}_r : \ \langle x, x \rangle = 0\}.$$

5.8 Állítás. *$\hat{\mathcal{G}}_k$ asszociatív és kommutatív algebra, melyen a skalárszorzatra teljesül:*

$$\langle x, yz \rangle = \langle xy, z \rangle,$$

és melynek dimenziója $\mathrm{rk}(M(r, f))$.

5.9 Állítás. *A $\hat{\mathcal{G}}_k$ algebrának van olyan $\{e_1, \ldots, e_r\}$ bázisa, melyre*

$$e_i e_j = \begin{cases} e_i & \text{ha } i = j, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

5.1 Példa. Legyen $f(F)$ az F gráf független ponthalmazainak száma. Ekkor f tükrözéspozitív, és $\mathrm{rk}(M(r, f)) = 2^r$. Tehát f homfüggvény.

5.2 Példa. Legyen

$$f(F) = \begin{cases} 1 & \text{ha } F \text{ minden foka páros,} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor f tükrözéspozitív, és $\mathrm{rk}(M(r, f)) = 2^{r-1}$. Tehát f homfüggvény.

5.3 Példa. Legyen $f(F)$ az F gráf teljes párosításainak száma. Ekkor $\mathrm{rk}(M(r, f)) = 2^r$, de f nem tükrözéspozitív. Tehát f nem homfüggvény.

5.2.2 A tétel bizonyítása

(a) Könnyű eset: $\mathrm{rk}(M(r, f)) = q^r$.
(b) Általános eset.

5.3 Más félcsoportok és kategóriák

6 Kapcsolási rang

6.1 Homfüggvények kapcsolási rangja

Ikerpont: Súlyozott G gráfban $u, v \in V(G)$ ikrek, ha minden $w \in V(G)$-re $\beta_G(uw) = \beta_G(vw)$. Ikrek azonosítása: v-t elhagyjuk, $\alpha_G(u)$-t $\alpha_G(u) + \alpha_G(v)$-re növeljük.

6.1 Állítás. *Ha egy súlyozott G gráfban az ikreket azonosítjuk, akkor* $\hom(.G)$ *nem változik.*

Jelölések: $\mathrm{Aut}(G)$ a G automorfizmuscsoportja. $\mathrm{orb}_r(G)$ az $\mathrm{Aut}(G)$ orbitjainak száma a G pont-r-esein.

6.2 Tétel. *Ikermentes súlyozott G gráfra* $\mathrm{rk}(M(r, G)) = \mathrm{orb}_r(G)$.

6.2 Átfogalmazások és alkalmazások

6.2.1 Homomorfizmus-sűrűség

6.3 TÉTEL. *Ha két súlyozott ikermentes G_1, G_2 gráf olyan, hogy minden F egyszerű gráfra $t(F, G_1) = t(F, G_2)$, akkor $G_1 \cong G_2$.*

6.4 LEMMA. *Ha két súlyozott G_1, G_2 gráf olyan, hogy minden F egyszerű gráfra $t(F, G_1) = t(F, G_2)$, akkor minden F multigráfra is $t(F, G_1) = t(F, G_2)$,*

6.2.2 Kontraktorok és konnektorok

7 Kapcsolási rang általános gráfparaméterre

7.1 A Tutte polinom

7.1.1 A Tutte sík

7.1.2 A Tutte polinom kapcsolási rangja

7.1 TÉTEL. (LL,D. WELSH) *A Tutte polinom $T(G; x, y)$ kapcsolási rangja*

$$\begin{cases} q^n & \text{ha } q = (x-1)(y-1) \text{ pozitív egész szám,} \\ B_n & \text{egyébként.} \end{cases}$$

7.1.3 A Tutte polinom síkgráfokra

7.2 Párosítások

7.3 Fa-szélesség és kapcsolási rang

7.2 TÉTEL. *Ha egy gráfparaméter kapcsolási rangja véges, akkor korlátos fa-szélességű gráfokra polinom időben kiszámítható.*

8 Élmodellek

8.1 Definíció

Élmodell: (C, h), ahol C véges halmaz, és $h: \mathbb{Z}_+^C \to \mathbb{R}$.

Élszinezés: $\sigma: E(G) \to C$.

$v \in V(G)$ *szín-foka:* $a \in \mathbb{Z}_+^C$, ahol a_i a v-beli élek között az i színűek száma. Jelölés: $a(\sigma, v)$.

σ *értéke:* $h_\sigma = \prod_{v \in V(G)} h(a(\sigma, v))$.

Élmodell értéke: $Z(G, h) = \sum_\sigma h_\sigma$.

8.2 Példák

8.1 PÉLDA. Élszinezések száma.

8.2 PÉLDA. Teljes párosítások száma.

8.3 PÉLDA. Nem-nulla folyamok száma.

8.3 Él-tükrözési pozitivitás

r-szakadt élű gráfok: r elsőfokú pont cimkézve van $1, \ldots, r$-rel.

r-szakadt élű gráfok szorzása: F_1F_2, ahol a cimkézett pontokat azonosítjuk, és utána kisimítjuk. Speciálisan: Ha K_2 mindkét csúcsa cimkézett, akkor $K_2K_2 = \bigcirc$ egyetlen élből és 0 pontból áll.

Él-kapcsolási mátrix: $M'(r,f)$, ahol a sorok és oszlopok r-szakadt élű gráfokkal vannak indexelve, és $M'_{F_1,F_2} = f(F_1F_2)$.

Él-tükrözési pozitivitás: $M'(r,f)$ pozitív szemidefinit.

Él-kapcsolási rang: $\mathrm{rk}(M'(r,f))$.

8.1 Állítás. *Ha az f gráfparaméter multiplikatív és él-tükrözésre pozitív, akkor*

$$\mathrm{rk}(M'(r,f)) \le f(\bigcirc)^r.$$

8.4 Élmodellek jellemzése

8.2 Tétel. (Szegedy B.) *Egy gráfparaméter akkor és csak akkor élmodel, ha multiplikatív és él-tükrözésre pozitív.*

Bizonyítás: Nehéz, esetleg külön bemutatom az algebra iránt érdeklődőknek. Ugyanez áll az alábbi 8.7, 8.8 részekre.

8.5 Élmodellek és pontmodellek

8.3 Tétel. *Minden $hom(.,H)$ egyben élmodel.*

8.4 Példa. Abel-csoport részhalmaza fölötti folyamok száma homfüggvény is.

8.5 Példa. Teljes párosítások száma hom függvények limesze, ha negatív pontsúlyokat is megengedünk.

8.6 Nem-kommutatív gráfalgebrák

8.7 Temperley–Lieb algebrák

8.8 Topológikus kvantumtérelmélet

9 Gráfok távolsága és a Szemerédi Lemma

9.1 Szemerédi Lemma

Gráf irregularitása:

$$\mathrm{irr}(G) = \max_{S \subseteq V(G)} \left| 2e_G(S) - \frac{2e(G)}{|V|^2}|T|^2 \right|.$$

Páros gráf irregularitása: Ha U, V a két színosztály, akkor

$$\mathrm{irr}(G) = \max_{\substack{S \subseteq U \\ T \subseteq V}} \left| e(S,T) - \frac{e(U,V)}{|U| \cdot |V|}|S| \cdot |T| \right|.$$

Partíció irregularitása: Ha G tetszőleges gráf, és $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_k\}$ a $V(G)$ egy partíciója, akkor

$$\operatorname{irr}(\mathcal{P}) = \sum_{i,j=1}^{n} \operatorname{irr}(G[V_i, V_j])$$

(ahol $G[V_i, V_j]$ a V_i és V_j közötti páros gráf, ha $i \neq j$, és a V_i által feszített gráf, ha $i = j$).

9.1 Lemma. (Szemerédi Regularitási lemma) *Minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $k(\varepsilon)$, hogy minden G gráfnak van olyan legfeljebb $k(\varepsilon)$ osztályú $\mathcal{P}$ partíciója, melyre*

$$\operatorname{irr}(\mathcal{P}) \le \varepsilon.$$

9.2 Megjegyzés. A bizonyításból $k(\varepsilon)$-re egy $1/\varepsilon$ magas torony adódik, és sajnos ez az igazság.

9.2 Módosítások

Több további megkötést tehetünk a partícióra:

9.3 Állítás. (a) *Feltehető, hogy $\mathcal{P}$ osztályai annyira egyformák, amennyire csak lehet; vagyis $\left||V_i| - \frac{|V|}{k}\right| < 1$ minden $1 \le i \le k$-ra.*
(b) *Feltehető, hogy $\mathcal{P}$ egy adott $\mathcal{P}_0$ partíciót finomít.*

ε-reguláris páros gráf: minden olyan $S \subseteq U$, $T \subseteq V$ halmazra, melyre $|S| > \varepsilon|U|$ és $|T| > \varepsilon|V|$,

$$\left| \frac{e(S,T)}{|S| \cdot |T|} - \frac{e(U,V)}{|U| \cdot |V|} \right| < \varepsilon.$$

ε-reguláris partíció: azon $i \neq j$ párok száma, melyre $G[V_i, V_j]$ nem ε-reguláris, legfeljebb εk^2.

9.4 Állítás. *Ha a $\mathcal{P}$ partíció majdnem egyforma osztályokra oszt, akkor* $\operatorname{irr}(\mathcal{P})^4$*-reguláris.*

9.3 Az általános elv

9.5 Lemma. *Legyenek $\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1, \dots$ a $\mathcal{H}$ Hilbert tér tetszőleges nem-üres részhalmazai. Legyen $\varepsilon > 0$, $f \in \mathcal{H}$, és $m = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor$. Ekkor vannak olyan $g_i \in \mathcal{K}_i$ $(0 \le i \le m)$ vektorok és olyan $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m$ valós számok, hogy minden $g \in \mathcal{K}_{m+1}$ vektorra*

$$\langle g, f - (\gamma_1 g_1 + \cdots + \gamma_m g_m) \rangle^2 \le \varepsilon \|g\|^2 \|f\|^2.$$

9.4 Alkalmazások

9.6 Tétel. (Erdős–Stone) *Legyen F r-kromatikus gráf ($r \ge 3$). Minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $n_0 > 0$, hogy ha G olyan $n \ge n_0$ pontú gráf, mely nem tartalmazza F-et részgráfként, akkor*

$$|E(G)| \le \left(1 - \frac{1}{r-1} + \varepsilon\right) \binom{n}{2}$$

9.7 Tétel. (Alon–Fischer–Krivelevich–Szegedy) *Minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha G olyan n pontú gráf melyben a háromszögek száma kisebb, mint δn^3, akkor G-ből elhagyható εn^2 él úgy, hogy a maradék gráfban ne legyen háromszög.*

9.5 Gráfok távolsága

ℓ_1-távolság: ha G_1 és G_2 címkézett gráfok a $V = \{1, \dots, n\}$ halmazon, akkor

$$d_1(G_1, G_2) = \frac{|E(G_1) \triangle E(G_2)|}{n^2}.$$

Téglalap-távolság:

$$d_\square(G_1, G_2) = \max_{S,T \subseteq V} \frac{|e_{G_1}(S,T)) - e_{G_2}(S,T)|}{n^2}.$$

Általánosabban, ha G_1 és G_2 címkézett súlyozott gráfok, melyekben a megfelelő csúcsok súlya egyenlő, akkor

$$d_1(G_1, G_2) = \frac{1}{\alpha_{G_1}^2} \sum_{i,j \in V} \alpha_{G_1}(i)\alpha_{G_1}(j)|\beta_{G_1}(i,j) - \beta_{G_2}(i,j)|$$

és a *téglalap-távolság:*

$$d_\square(G_1, G_2) = \max_{S,T \subseteq V} \frac{1}{\alpha(G_1)^2} \left| \sum_{i \in S, j \in T} \alpha_{G_1}(i)\alpha_{G_1}(j)(\beta_{G_1}(i,j) - \beta_{G_2}(i,j)) \right|.$$

Ha G_1 és G_2 címkézetlen gráfok n ponton, akkor legyen G_i' a G_i tetszőleges címkézése.
ℓ_1-távolság:

$$\delta_1(G_1, G_2) = \min_{G_1', G_2'} d_1(G_1', G_2');$$

téglalap-távolság:

$$\delta_\square(G_1, G_2) = \min_{G_1', G_2'} d_\square(G_1', G_2').$$

Minden H súlyozott gráfra legyen

$$\ell(H) = \sum_{ij \in E(H)} |\ln \beta_{ij}|.$$

9.8 Lemma. *Legyen G_1 és G_2 két n pontú gráf. Ekkor minden F egyszerű gráfra*

$$\big|t(F, G_1) - t(F, G_2)\big| \le |E(F)|\delta_\square(G_1, G_2),$$

és minden olyan H súlyozott teljes gráfra, melyben minden élsúly pozitív,

$$\frac{1}{n^2}\big|\ln \hom(G_1, H) - \ln \hom(G_2, H)\big| \le \ell(H)\delta_\square(G_1, G_2).$$

A G gráf csúcsainak egy $\mathcal{P}$ partíciójához jelölje $K(G, \mathcal{P})$ a $V(G)$ csúcsain definiál teljes gráfot, melyben minden $u \in V_i$ és $v \in V_j$ esetén az ij él súlya

$$\beta(uv) = \begin{cases} \frac{e_G(V_i, V_j)}{|V_i| \cdot |V_j|} & \text{ha } i \ne j, \\ \frac{e_G(V_i)}{\binom{|V_i|}{2}} & \text{ha } i = j. \end{cases}$$

9.9 Tétel. (Frieze–Kannan) *Legyen $\varepsilon > 0$. Minden G gráf csúcsainak van olyan legfeljebb $2^{1/\varepsilon^2}$ osztályú $\mathcal{P}$ partíciója, melyre*

$$d_\square(G, K(G, \mathcal{P})) \le \varepsilon.$$

10 Martingálok

Martingál: valószínűségi változóknak egy olyan $X_1, X_2, \ldots$ sorozata, melyre

$$\mathsf{E}(X_{n+1} \mid X_n) = X_n.$$

10.1 Példa. Legyenek $Y_1, Y_2, \ldots$ független, 0 várható értekű valószínűségi változók. Ekkor az

$$X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$$

részletösszegek martingált alkotnak.

10.2 Példa. Legyenek $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ független valószínűségi változók, és f mérhető fűgvény. Tegyük fel hogy az

$$X_k = \mathsf{E}(f(Y_1, \ldots, Y_n) | Y_1, \ldots, Y_k)$$

valószínűségi változók ($k = 0, 1, \ldots, n$) martingált alkotnak.

10.1 Tétel. (Doob) *Ha $X_1, X_2, \ldots$ korlátos martingál, akkor 1 valószínűséggel* $\lim_{n\to\infty} X_n$ *létezik.*

10.2 Tétel. (Azuma) *Legyen $X_1, X_2, \ldots$ olyan martingál, melyre $|X_{m+1} - X_m| \leq 1$ minden m-re. Ekkor*

$$\Pr\big(|X_m - \mathsf{E}(X_m)| > \lambda\big) < e^{-\frac{\lambda^2}{2m}}.$$

11 Konvergens gráfsorozatok: sűrű eset

Gráfsorozat konvergens: Minden egyszerű F-re $\lim_{n\to\infty} t(F, G_n)$ létezik.

11.1 Példák

11.1 Példa. (Kvázivéletlen gráfsorozat) (G_n) akkor és csak akkor kvázivéletlen, ha

$$G_n \to K_1(p),$$

ahol $K_1(p)$ 1 csucsból és egy arra illeszkedő p súlyú hurokélből áll.

11.2 Példa. (Félgráfok) Legyen $V(G_n) = \{1, 2, \ldots, n, 1', 2', \ldots, n'\}$, és kössük össze az i és j' pontokat, ha $i \geq j$.
Ekkor minden nem-páros F gráfra

$$\lim_{n\to\infty} t(F, G_n) = 0,$$

míg minden páros F gráfra

$$\lim_{n\to\infty} t(F, G_n) = a(F),$$

ahol $a(F)$ annak a valószínűsége, hogy $V(F)$ egy véletlen rendezésében minden él ,,alsó'' végpontja megelőzi a ,,felső'' végpontját.

11.3 PÉLDA. (H-VÉLETLEN GRÁFOK) Legyen H egyszerű normalizált súlyozott gráf, és $V(H) = \{1, \dots, q\}$. Vegyünk n pontot, és osszuk őket $V_1, \dots, V_q$ osztályokba úgy, hogy minden pontot egymástól függetlenül $\alpha_H(i)$ valószínűséggel teszünk V_i-be. Minden $u \in V_i$, $v \in V_j$ pontpárt kössünk össze egymástól függetlenül $\beta_H(i,j)$ valószínűséggel. Jelölje $\mathbf{G}(n,H)$ a kapott véletlen gráfot. Ekkor 1 valószínűséggel minden F egyszerű gráfra

$$t(F, \mathbf{G}(n,H)) \to t(F,H).$$

11.1.1 H-kvázivéletlen gráfok

H-kvázivéletlen gráfsorozat: minden egyszerű F-re

$$t(F, G_n) \to t(F,H).$$

11.1 TÉTEL. (LL–T.SÓS) *Minden normalizált H súlyozott gráfhoz megadható véges sok egyszerű gráf $F_1, \dots, F_N$ úgy, hogy ha egy (G_n) gráfsorozatra minden $1 \le i \le N$ esetén*

$$t(F_i, G_n) \to t(F_i, H),$$

akkor (G_n) H-kvázivéletlen.

11.2 TÉTEL. (LL–T.SÓS) *Legyen (G_n) H-kvázivéletlen, $N_n = |V(G_n)|$, és legyen $\mathbf{G}(N_n, H)$ H-véletlen. Ekkor 1 valószínűséggel*

$$\delta_\square(G_n, \mathbf{G}(N_n, H)) \to 0.$$

Másszóval, létezik $V(G_n)$-nek olyan $(V_1, \dots, V_q)$ partíciója, hogy

$$\frac{|V_i|}{n} \to \alpha_G(i) \qquad (N \to \infty),$$

és minden $S_i \subseteq V_i$ halmazokra

$$\frac{1}{n^2}(e_{G_n}(S_i, S_j) - \beta_G(ij)|S_i||S_j|) \to 0 \qquad (N \to \infty).$$

11.2 Homfüggvények limesze

Általánosított homfüggvény: homfüggvények limesze. $\mathcal{T}$ jelöli a normalizált általánosított homfüggvények halmazát. $\mathcal{H}_k$ a $\mathcal{H}$-beli függvények megszorításai a legfeljebb k csúcsú gráfokra.

11.3 TÉTEL. (ERDŐS–LL–SPENCER) *$\mathcal{T}_k$ dimenziója a legfeljebb k csúcsú összefüggő gráfok száma.*

11.3 Gráfsorozat limesze

11.3.1 A limesz-objektum

Legyen $W: [0,1]^2 \to [0,1]$ szimmetrikus mérhető függvény, és minden egyszerű F gráfra, ha $V(F) = \{1, \dots, k\}$, legyen

$$t(F, W) = \int_{[0,1]^k} \prod_{ij \in E(F)} W(x_i, x_j)\, dx_1 \dots dx_k.$$

Minden egyszerű normalizált súlyozott H gráfhoz, melyre $V(H) = \{1, \ldots, q\}$, konstruáljunk egy $W_H : [0,1]^2 \to [0,1]$ függvényt a következőképpen: osszuk fel a $[0,1]$ intervallumot $I_1 \ldots I_q$ intervallumokra, ahol I_r hossza $\alpha_H(r)$, és minden $(x,y) \in I_r \times I_s$ pontra legyen $W_H(x,y) = \beta_H(r,s)$. Ekkor

$$t(F, W_H) = t(F, H).$$

11.3.2 $\mathcal{T}$ jellemzése

11.4 Tétel. (LL–Szegedy B.) *Minden f gráfparaméterre a következők ekvivalensek:*

(a) *$f \in \mathcal{T}$;*

(b) *Van olyan szimmetrikus mérhető $W : [0,1]^2 \to [0,1]$ függvény, melyre minden egyszerű F gráfra*

$$f(F) = t(F, W);$$

(c) *f normalizált, multiplikatív, $0 \le f \le 1$, és $M(r, f)$ pozitív szemidefinit minden $r \ge 0$-ra.*

Legyen

$$f^\dagger(F) = \sum_{\substack{F' \supseteq F \\ V(F') = V(F)}} (-1)^{|E(F') \setminus E(F')|} f(F),$$

és legyen $M'(r, f)$ az $M(r, f)$ az a (véges) részmátrixa, melyet az r-címkézett r csúcsú gráfok indexelnek.

Kiegészítés: *Két további feltétel is ekvivalens* (a)–(c)*-vel:*

(c') *f normalizált, multiplikatív, $0 \le f \le 1$, és $M'(r, f)$ pozitív szemidefinit minden $r \ge 0$-ra.*

(c") *f normalizált, multiplikatív, $0 \le f \le 1$, és $f^\dagger \ge 0$.*

11.3.3 Bizonyítás

A bizonyítás menete:
(a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (c') $\Longrightarrow$ (c") $\Longrightarrow$ (a).

11.3.4 A limesz-objektum egyértelműsége

11.5 Tétel. *Legyenek $W_1, W_2 : [0,1]^2 \to [0,1]$ szimmetrikus mérhető függvények. Akkor és csak áll fenn*

$$t(F, W_1) = t(F, W_2)$$

minden egyszerű F gráfra, ha egy olyan $W : [0,1]^2 \to [0,1]$ szimmetrikus mérhető függvény, és vannak olyan mértéktartó $\phi_1, \phi_2 : [0,1] \to [0,1]$ leképezések, melyekre

$$W_i(x,y) = W(\phi_i(x), \phi_i(y)) \qquad (i = 1, 2)$$

minden $x, y \in [0,1]$-re.

12 W-véletlen gráfok

Adott $W : [0,1]^2 \to [0,1]$ szimmetrikus mérhető függvényhez definiáljunk egy véletlen $\mathbf{G}(n,W)$ gráfot a következőképpen: $V(G) = \{1,\dots,n\}$. Legyenek $X_1,\dots,X_n$ független, $[0,1]$-ben egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Az i és j csúcsokat kössük össze $W(X_i,X_j)$ valószínűséggel. Minden egyszerű F gráfra ($k = |V(F)|$):

$$\mathsf{E}\big(t_0(F,\mathbf{G}(n,W))\big) = t(F,W). \tag{9}$$

$$\big|\mathsf{E}\big(t(F,\mathbf{G}(n,W))\big) - t(F,W)\big| < \frac{1}{n}\binom{k}{2}. \tag{10}$$

$$\mathsf{Var}(t(F,\mathbf{G}(n,W))) \le \frac{3}{n}k^2 \tag{11}$$

$$\Pr\Big(|t(F,\mathbf{G}(n,W)) - t(F,W)| > \varepsilon\Big) \le 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{18k^2}n\right). \tag{12}$$

Innen következik, hogy 1 valószínűséggel

$$t(F,\mathbf{G}(n,W)) \longrightarrow t(F,W) \qquad (n\to\infty), \tag{13}$$

vagyis $\mathbf{G}(n,W) \to W$.

12.1 Sznob gráfok

$\mathbf{S}(n,m)$ *konstrukciója:* Legyen $V(\mathbf{S}(n,m)) = [n]$. Az éleket egyenként adjuk hozzá. Tegyük fel, hogy $\mathbf{S}(n,m)$ már megvan. Annak a valószínűsége, hogy az u és v csúcsokat összekötjük,

$$\begin{cases} \dfrac{2(d(u)+1)(d(v)+1)}{(2m+n)(2m+n+1)} & \text{ha } u \ne j, \\[2ex] \dfrac{(d(u)+1)(d(u)+2)}{(2m+n)(2m+n+1)} & \text{ha } u = v. \end{cases}$$

(Lehetnek többszörös élek és hurkok.) Legyen $\Pi_{n,m}$ az $E(\mathbf{S}(n,m))$ azon permutációja, amely sorrendben az élek előálltak.

12.1 Lemma. *Legyen G tetszőleges m élű multigráf $[n]$-en. Feltéve, hogy $\mathbf{S}(n,m) = G$, az $E(G)$ minden permutációja ugyanolyan valószínűséggel áll elő, mint $\Pi_{n,m}$.*

Ebből könnyen levezethető:

$$\Pr(\mathbf{S}(n,m) = G) = \frac{2^m \cdot m! \cdot \prod_{i=1}^n d(i)!}{(2m+n-1)(2m+n-2)\cdots(n+1)n} \tag{14}$$

Ha $|V(F)| = k$ és $|E(F)| = l$, akkor

$$\mathsf{E}(t_0(F,\mathbf{S}(n,m))) = \frac{2^l\prod_{i=1}^k (d_i!)(m)_l}{(n+2l-1)_{2l}}. \tag{15}$$

Legyen $m = c\binom{n}{2}$, és $n\to\infty$ (c fix).

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\Big(t(H,\mathbf{S}(n,c\binom{n}{2}))\Big) = \prod_{i=1}^k (d_i!)c^l. \tag{16}$$

Legyen $W_c = c\ln(1/x)\ln(1/y)$, akkor

$$t(F, W_c) = \prod_{i=1}^{k} (d_i!)c^l.$$

12.2 Tétel. *Van olyan $n_i \to \infty$ sorozat, hogy*

$$\mathbf{S}\left(n_i, c\binom{n_i}{2}\right) \to W_c.$$

13 Végtelenben folytonos függvények

13.1 Jellemzések

13.2 Tulajdonság-ellenőrzés

13.3 Konvergencia különböző metrikákban

14 Konvergens gráfsorozatok: ritka eset

14.1 Példák

14.1 Példa. (Körök)

14.2 Példa. (Rácsok)

14.3 Példa. (Véletlen számozott fák)

14.4 Példa. (Galton–Watson fák)

14.5 Példa. (Barabási–Albert fák) Legyen $T_1 = K_1$, $T_2 = K_2$. Adott T_n fa'bo'l a T_{n+1} fa't u'gy kapjuk, hogy kiva'lasztjuk T_n egy ve'letlen i pontja't a foksza'mokkal ara'nyos valo'szi'nu se'ggel va'lasztjuk, e's ezt egy u'j $(n+1)$-edik ponttal o'sszeko'tjuk.

14.2 Limesz-objektumok: ritka eset

15 Végtelenben folytonos függvények: ritka eset

15.1 Segédeszközök a statisztikus fizikából

15.1.1 Dobrusin lemma

15.1.2 Dobrusin egyértelműség

15.2 Bal- és jobbkonvergencia

15.1 Példa. Rácsok.

15.1 Tétel. (a) *Ha a* (G_n) *gráfsorozatban minden fokszám legfeljebb* D, *és a sorozat konvergens, akkor minden olyan* H *gráfra, melyben minden csúcs foka* $\geq \left(1 - \frac{1}{2D}\right)|V(H)|$,

$$\lim \frac{\log \hom(G_n, H)}{|V(G_n)|}$$

létezik.

(b) *Ha a* (G_n) *gráfsorozatban minden fokszám legfeljebb* D, *és minden pozitívan súlyozott* H *gráfra*

$$\lim \frac{\log \hom(G_n, H)}{|V(G_n)|}$$

létezik, akkor a sorozat convergens.

15.3 Feszítő fák száma

Jelölje $T(G)$ a G gráf feszítő fáinak számát, és $D_{prod}(G)$ a fokszámok szorzatát.

15.2 Tétel. (R. Lyons) *Ha a bal-konvergens* (G_n) *gráfsorozatban aaz átlagfokszám korlátos, akkor*

$$\log \frac{T(G_n)}{D_{prod}(G_n)}$$

konvergens.

16 Homomorfizmus-komplexusok

Kneser-probléma

Babson–Kozlov tétele