Kuratowski tételének bizonyítása

Előadó: Lovász László

June 26, 2007

1 Tétel *A G gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmaz topológikus teljes 5-szöget vagy topológikus három-ház-három-kút gráfot (K_5-öt vagy $K_{3,3}$-at) részgráfként.*

2 Lemma *Legyen G olyan háromszorosan összefüggő gráf, mely nem tartalmaz Θ-gráfot és tőle diszjunkt élt. Ekkor G az alábbi gráfok valamelyike: (a) K_4, (b) K_5, (c) K_5-ből egy él elhagyva, (d) K_5-ből 2 független él elhagyva, (e) 3-szögű prizma, (f) $K_{3,3}$.*

Bizonyítás. 1. eset. *G-ben van teljes 4-szög.* A csúcsai legyenek a, b, c, d. Ha nincs több csúcs, az (a) eset áll fenn. Ha vannak további csúcsok, akkor azok között nem megy él (különben lenne Θ-gráf és tőle diszjunkt él). A 3-szoros összefüggőség miatt minden további csúcs a, b, c, d közül legalább hárommal össze van kötve. Ha csak egy további u csúcs van, akkor vagy (b) vagy (c) áll fenn. Tegyük föl, hogy van két további csúcs, u és v. Ekkor feltehetjük, hogy u össze van kötve a-val, és v össze van kötve b-vel és c-vel. De ekkor a b, c, d, v pontok az au éltől diszjunkt Θ-gráfot alkotnak, ami ellentmondás.

2. eset. *G-ben nincs teljes 4-szög, de van egy él híján.* A csúcsai legyenek a, b, c, d, ahol a és b nincsenek összekötve. A 3-szoros összefüggőség miatt van még további u csúcs, és a fentiekhez hasonlóan, ez is a, b, c, d közül legalább hárommal össze van kötve. Mivel nincs teljes 4-szög, ez a 3 csúcs vagy a, b, c vagy a, b, d; szimmetria miatt feltehetjük, hogy a, b, c. További csúcs már nem lehet; ennek ugyanis a, b, u közül legalább eggyel össze kellene kötve lenni, de akkor találnánk Θ-gráfot és tőle diszjunkt élt. Így a (d) eset áll fenn.

3. eset. *G-ben nincs teljes vagy 1 él híján teljes 4-szög, de van háromszög.* A csúcsai legyenek a, b, c, és legyen u az a egy további szomszédja. A 3-szoros összefüggőség miatt u-ból vezet még két diszjunkt út a háromszöghöz, melyeknek csak u-beli végpontjuk közös. Egyik út sem állhat egyetlen élből, mert akkor lenne 1 él híján teljes 4-szög. De egyik út sem állhat több, mint 2 élből, mert akkor középső éléhez lenne tőle diszjunkt Θ-gráf. Így a két út mondjuk bxu és cyu. Tekintsünk egy x-ből kiinduló további élt. Ez nem mehet az eddigi 6 csúcstól különböző csúcshoz, mert akkor lenne tőle diszjunkt Θ-gráf. De nem mehet a-hoz vagy c-hez sem, mert akkor lenne 1 él híján teljes 4-szög. Tehát x az y csúccsal van összekötve, és más élvagy csúcs már nem lehet, vagyis az (e) eset áll fenn.

4. eset. *G-ben nincs háromszög.* Azt állítjuk, hogy *ha egy C körnek van húrja, akkor C minden csúcsot tartalmaz.* Legyen xz a C kör egy húrja, és legyen P_1, P_2 a C-ben x-et y-nal

összekötő két út. Mivel nincs háromszög, a P_1, P_2 utaknak legalább három élük van. Ha volna C-n kívüli u csúcs, akkor ebből a 3-szoros összefüggés miatt menne a körhöz három olyan út, melyek u-tól eltekintve diszjunktak. Ebből legalább kettő mondjuk P_1-en végződne (a végpontokat is megengedve), de ekkor volna P_2 középső élétől diszjunkt Θ-gráf, ami ellentmondás.

Következik ebből, hogy ha egy körnek 2 húrja van, akkor azok keresztezik egymást; máskülönben, az egyik húr a körből olyan rövidebb kört vágna le, melynek a másik húrja volna.

Tetszőleges xz élhez van két további x-et y-nal összekötő, végpontjaitól eltekintve diszjunkt út. Másszóval, van olyan C kör, melynek van húrja. Láttuk, hogy ez a kör minden csúcsot tartalmaz, és legalább 6 csúcsa van. Minden csúcsából ki kell, hogy induljon még egy él, ami szükségképpen húrja C-nek. Tehát C-nek legalább 3 húrja van, melyek páronként keresztezik egymást. Három húr 6 végpontja 6 ívre osztja a kört, melyből 2 átellenes ívet elhagyva olyan kört kapunk, melynek van húrja. Ez tehát minden csúcsot tartalmaz, és így csak éleket hagyhattunk el. Tehát a körnek 6 csúcsa van, és így az (f) eset áll fenn. □

A tétel bizonyítása:

Bizonyítás. Legyen G minimális ellenpélda. Ekkor

2.1 ÁLLÍTÁS *Minden e élre $G - e$ síkbarajzolható.*

(Nyilvánvaló.)

2.2 ÁLLÍTÁS *Minden e élre G/e síkbarajzolható.*

Ehhez azt kell meggondolni, hogy ha G/e-ben van egy H részgráf, ami topológikus K_5 vagy $K_{3,3}$, akkor G-ben is van ilyen. Ha H nem tartalmazza az e élnek megfelelő e' csúcsot, akkor ez triviális. Ha H-nak másodfokú vagy harmadfokú csúcsát tartalmazza, akkor könnyen láthatóan G tartalmazza H-nak egy felosztását. Az egyetlen figyelmet igénylő eset, amikor H topológikus K_5, melynek egyik negyedfokú csúcsa az e'. Ekkor is csak akkor van gond, ha G-ben H ősképében e végpontjai másodfokúak. Ekkor tehát G azt a gráfot tartalmazza topológikusan, melyet úgy kapunk, hogy K_5 egy csúcsát két másodfokú csúcsra húzzuk szét, és ezeket összekötjük. Ez a gráf viszont tartalmaz $K_{3,3}$-at.

2.3 ÁLLÍTÁS *G háromszorosan összefüggő.*

Ha G nem összefüggő, akkor komponensei kisebbek, tehát G minimalitása miatt síkbarajzolhatók. De akkor G is.

Ha G-ben van egy v elvágópont, akkor G felírható $G = G_1 \cup G_2$ alakban, ahol $V(G_1) \cap V(G_2) = \{v\}$, és $|V(G_1)|, |V(G_2)| > 1$. Itt G_1-et és G_2-t lerajzolhatjuk úgy a síkba, hogy v a végtelen lap határán legyen, és a két rajz diszjunkt legyen. A v két képét éllel összekötve, majd az élt összehúzva, megkapjuk G egy síkbarajzolását.

Végül, ha G-ben van egy elvágó $\{u, v\}$ pontpár, akkor G felírható $G = G_1 \cup G_2$ alakban, ahol $V(G_1) \cap V(G_2) = \{u, v\}$, és $|V(G_1)|, |V(G_2)| > 2$. Jelölje G_i' azt a gráfot, melyet G_1-ből úgy kapunk, hogy u-t és v-t összekötjük. Könnyű ellenőrizni, hogy G'_i nem tartalmaz topológikus K_5-öt vagy $K_{3,3}$-at, így síkbarajzolható. Az előzőekhey hasonlóan lerajzolhatjuk úgy, hogy az új él a végtelen tartomány határán legyen; innen ugyanúgy fejezzük be az érvelést, mint az előbb.

2.4 Állítás *G nem tartalmaz Θ-gráfot és tőle diszjunkt élt.*

Tegyük fel, hogy G tartalmaz egy H Θ-gráfot és tőle diszjunkt ij élt. A G/ij gráf a 2.2 állítás szerint síkbarajzolható; rögzítsük egy G' síkbarajzolását. A H gráf rajza 3 részre osztja a síkot, melyek közül az egyik tartalmazza az ij él $\overline{ij}$ képét. Feltehetjük, hogy ez a végtelen rész, és legyen C ennek határa H-ban. Legyen $e \in E(H) \setminus E(C)$, ekkor tehát e a C kör belsejében van.

Legyen D a G/ij lerajzolásában egy olyan kör, melynek $\overline{ij}$ a külsejében van, e a belsejében van, és melynek belseje a lehető legnagyobb (legtöbb országot tartalmazza). Tekintsük a $G - e$ gráfnak is egy G'' síkbarajzolását; feltehetjük, hogy az ij él a D kör külsejében van. Ezekután tekintsük a G' síkgráfban D belsejét (D-vel együtt), és ragasszuk össze a G'' síkgráfban D külsejéval D mentén. Így nyilván egy síkgráfot kapunk.

Azt állítjuk, hogy ez tartalmazza G-t, vagyis hogy G minden éle vagy G'-ben D belsejébe, vagy G''-ben D külsejébe esik. Ez az ij és e élekre nyilvánvaló. Legyen $f \neq ij, e$ olyan él, mely G'-ben D külsejébe esik. Mivel G/ij kétszeresen összefüggő, f összeköthető a D körrel két diszjunkt Q_1, Q_2 úttal. Ezek valamelyike át kell, hogy menjen az $\overline{ij}$ csúcson, ellenkező esetben a D egyik ívét a $Q_1 \cup \{f\} \cup Q_2$ úttal helyettesítve, olyan D' kört kapnánk, melynek $\overline{ij}$ a külsejében van, e a belsejében van, és melynek belseje több országot tartalmazna, mind D belseje. Így G-ben van olyan R út, mely f-et i, j valamelyikével D érintése nélkül köti össze. De ekkor f a G'' síkgráfban is D külsejébe esik. Ezzel a 2.4 állítást beláttuk.

Ezekután a tétel következik a 2 lemmából: az ott felsorolt gráfok K_5 és $K_{3,3}$ kivételével síkgráfok. $\square$