A Kruskal-Katona Tétel

Előadó: Lovász László

May 15, 2013

Előzetes megjegyzés: Minden $r \geq 1$ esetén, minden $y \geq 0$ szám felírható

$$y = \binom{x}{r}$$

alakban, ahol $x \geq r-1$. Itt

$$\binom{x}{r} = \frac{x(x-1)\dots(x-r+1)}{r!}$$

minden valós x-re definiálva van. Továbbá az

$$\binom{x}{r} = \binom{x-1}{r} + \binom{x-1}{r-1} \tag{1}$$

azonosság minden valós x-re fennáll; ez következik abból, hogy minden pozitív egész x-re fennáll, és így a két oldalon álló polinomok végtelen sok helyen megegyeznek.

Legyen $\mathcal{H}$ egy r-uniform hipergráf, és legyen

$$\partial\mathcal{H} = \{A \setminus \{v\} : \ A \in \mathcal{H}, \ v \in A\}$$

az "árnyéka". Továbbá, ha $i \neq j \in V(\mathcal{H})$, akkor minden $A \in \mathcal{H}$-ra legyen

$$A_{j\to i} = \begin{cases} A \setminus \{j\} \cup \{i\} & \text{ha } A \setminus \{j\} \cup \{i\} \notin \mathcal{H}, \\ A & \text{egyébként,} \end{cases}$$

és

$$\mathcal{H}_{j\to i} = \{A_{j\to i} : A \in \mathcal{H}\}.$$

Azt az operációt, ami a $\mathcal{H}_{j\to i}$ hipergráfot $\mathcal{H}$-ból létrehozza, *lecsúsztatásnak* nevezzük.

1 Tétel *Ha* $|\mathcal{H}| = \binom{x}{r}$ $(x \geq r)$*, akkor* $|\partial\mathcal{H}| \geq \binom{x}{r-1}$.

2 Lemma *Bármely két* $i \neq j$ *csúcsra*

$$|\partial(\mathcal{H}_{j\to i})| \leq |\partial\mathcal{H}|.$$

Bizonyítás. Azt mutatjuk meg, hogy

$$\partial(\mathcal{H}_{j\to i}) \subseteq (\partial\mathcal{H})_{j\to i}. \tag{2}$$

Mivel nyilván $|(\partial\mathcal{H})_{j\to i})| = |\partial\mathcal{H}|$, ebből a lemma már következik.

A (2) bizonyítása egyszerű esetszétválasztás. $\square$

A tétel bizonyítása. Teljes indukció $\lfloor x \rfloor$ és r szerint. Az $r = 1$ és az $x \le r$ esetekben az állítás triviális.

Legyen $V(H) = \{1, \ldots, n\}$, és alkalmazzuk a lecsúsztatást $i < j$ párokra ismételte, amíg csak egyetlen halmaz is megváltozik. Ennek előbb-utóbb vége lesz, mert mondjuk a

$$\sum_{A\in\mathcal{H}} \sum_{i\in A} i$$

mennyiség minden valódi lecsúsztatásnál csökken. A Lemma miatt elegendő a tételt a végül kapott hipergráfra alkalmazni. Azt jelenti ez, hogy feltehetjük, hogy $(*)$ minden $A \in \mathcal{H}$ halmazra és minden $j \in A$, $i \notin A$, $i < j$ csúcspárra $A \setminus \{j\} \cup \{i\} \in \mathcal{H}$.

Legyen

$$\mathcal{H}_0 = \{A \in \mathcal{H} :\ 1 \notin A\}, \quad \mathcal{H}_1 = \{A \in \mathcal{H} :\ 1 \in A\}, \quad \mathcal{H}_1' = \{A \setminus \{1\} :\ A \in \mathcal{H}_1\}.$$

Nyilván

$$|\mathcal{H}_0| + |\mathcal{H}_1| = |\mathcal{H}| = \binom{x}{r} \quad \text{és} \quad |\mathcal{H}_1'| = |\mathcal{H}_1|. \tag{3}$$

Az is nyilvánvaló, hogy $\partial\mathcal{H} \supseteq \partial\mathcal{H}_1$. A $\partial\mathcal{H}_1$ halmazrendszerben szerepelnek a $\mathcal{H}_1'$-eli halmazok, ezek nem tartalmazzák az 1-et. Szerepelnek továbbá azok a halmazok, melyeket úgy kapunk, hogy egy $\mathcal{H}_1$-beli halmazból 1-től különböző elemet hagyunk ki. Ezek mind tartalmazzák az 1-et, és ha az 1-et kihagyjuk belőlük, akkor éppen a $\partial(\mathcal{H}_1')$-beli halmazokat kapjuk. Innen

$$|\partial\mathcal{H}| \ge |\mathcal{H}_1'| + |\partial(\mathcal{H}_1')|. \tag{4}$$

Továbbá a $(*)$ feltétel miatt $\partial\mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}_1'$, és így

$$|\partial\mathcal{H}_0| \le |\mathcal{H}_1'| = |\mathcal{H}_1|. \tag{5}$$

Azt állítjuk, hogy

$$|\mathcal{H}_1'| = |\mathcal{H}_1| \ge \binom{x-1}{r-1}. \tag{6}$$

Ha $|\mathcal{H}_0| \le \binom{x-1}{r}$, akkor ez következik (3)-ből. Ha $|\mathcal{H}_0| \ge \binom{x-1}{r}$, akkor az $\lfloor x \rfloor$ szerinti indukció miatt $|\partial\mathcal{H}_0| \ge \binom{x-1}{r-1}$, és így az állítás következik (5)-ből.

Mármost (6)-ből r szerinti indukció miatt következik, hogy $|\partial\mathcal{H}_1'| \ge \binom{x}{r-2}$, és így (4) miatt

$$|\partial\mathcal{H}| \ge |\mathcal{H}_1'| + |\partial(\mathcal{H}_1')| \ge \binom{x-1}{r-1} + \binom{x-1}{r-2} = \binom{x}{r-1}.$$