Kuratowski tételének bizonyítása

Előadó: Lovász László

May 16, 2013

1 Tétel *A G gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmaz topológikus teljes 5-szöget vagy topológikus három-ház-három-kút gráfot (TK_5-öt vagy $TK_{3,3}$-at) részgráfként.*

2 Lemma *Minden $G \neq K_4$ háromszorosan összefüggő gráfban van olyan él, melyet összehúzva a gráf 3-összefüggő marad.*

Bizonyítás. Ha az xy élt összehúzva nem marad 3-összefüggő, akkor van olyan z csúcs, hogy $\{x, y, z\}$ elvágó halmaz. Legyen H a $G \setminus \{x, y, z\}$ gráf összefüggő komponense, és válasszuk az x, y, z csúcsokat és H-t úgy, hogy $|V(H)|$ minimális legyen.

Mivel G 3-összefüggő, van H olyan u csúcs, mely szomszédos z-vel. Ha uz-t összehúzva a gráf nem marad 3-összefüggő, akkor van olyan v csúcs, melyre $G \setminus \{z, u, v\}$ nem összefüggő. Van ezért a $G \setminus \{z, u, v\}$ gráfnak olyan J összefüggő komponense, mely nem tartalmazza sem x-et sem y-t. A G 3-összefüggősége miatt J-nek van olyan w csúcsa, amely szomszédja u-nak. Továbbá J bármely csúcsát összeköti w-vel J-n belül út. Ez az út nem érinti x, y, z egyikét sem, tehát J része kell, hogy legyen H-nak. De ez ellentmond H minimalitásának. $\square$

A tétel bizonyítása:

Bizonyítás. Azt, hogy K_5 és $K_{3,3}$ nem síkgráfok, már láttuk az Euler-formula következményeként. Így TK_5 és $TK_{3,3}$ sem síkgráfok, és ezért semmilyen olyan gráf sem, mely valamelyiküket tartalmazza.

Megfordítva, tegyük fel, hogy G nem tartalmaz sem TK_5-öt, sem $TK_{3,3}$-at, és mégsem síkgráf. Legyen G minimális ilyen ellenpélda.

Ha G nem összefüggő, akkor $G = G_1 \cup G_2$, ahol $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$. Ekkor indukció szerint G_1 és G_2 síkgráfok, és ezért G is.

Ha G nem 2-összefüggő, akkor $G = G_1 \cup G_2$, ahol $V(G_1) \cap V(G_2) = \{v\}$. Ekkor indukció szerint G_1 és G_2 síkgráfok, és ezért könnyen láthatóan G is.

Ha G nem 3-összefüggő, akkor $G = G_1 \cup G_2$, ahol $V(G_1) \cap V(G_2) = \{x, y\}$. Ekkor indukció szerint $G_1 + xy$ és $G_2 + xy$ síkgráfok, és ezért G is.

Feltehetjük tehát, hogy G 3-összefüggő. Mivel nyilván $G \neq K_4$, a Lemma szerint van G-nek olyan xy éle, melyet összehúzva, a kapott G' gráf 3-összefüggő marad. Könnyű meggondolni, hogy G' nem tartalmaz sem TK_5-öt, sem $TK_{3,3}$-at. G minimalitása miatt tehát G' síkbarajzolható.

Legyen $\overline{xy}$ az a csúcs, melyet x ls y azonosításával kaptunk. Ekkor a $G'' = G' - \overline{xy} = G \setminus \{x, y\}$ gráf 2-összefüggő, ezért minden lapját kör határolja. Legyen F a G'' síkgráfnak az $\overline{xy}$ pontot tartalmazó lapja, és C ennek a határa.

A G' gráf sikbarajzolásából néhány élt elhagyva, kapjuk a $G - y$ egy síkbarajzolását. Ahhoz, hogy y-t és a belőle kiinduló éleket kereszteződés nélkül hozzá tudjuk adni $G - y$-hoz, elegendő belátni a következőt:

1 Állítás *Az y csúcs minden szomszédja a $G - y$ síkgráf egyetlen lapjának a határára esik.*

Ha ez az állítás nem igaz, akkor az alábbi két eset valamelyike fennáll (ez kis esetszétválasztással belátható):

(a) y-nak van két u_1, u_2 szomszédja C körön, és x-nek két z_1, z_2 szomszédja a C körön úgy, hogy ez a négy csúcs különböző, és u_1, z_1, u_2, z_2 a C körön ebben a ciklikus sorrendben követik egymást;

(b) x-nek és y-nak három közös z_1, z_2, z_3 szomszédja van a C körön.

Az (a) esetben u_1, u_2, z_1, z_2, x, y, a köztük levő élek, és a kör egy $TK_{3,3}$ részgráfot ad. A (b) esetben z_1, z_2, z_3, x, y, a köztük levő élek, és a kör egy TK_5 részgráfot ad. Mindkét esetben ellentmondásra jutottunk. $\square$