# Véletlen struktúrák és alkalmazásaik

Előadó: Lovász László

2013 tavasz

*Az előadás leginkább Alon-Spencer [1] könyvét követi. Alább azok a témák vannak részletezve, ahol ettől eltérünk. ∗ jelöli a nem tárgyalt részeket.*

## 1 Bevezető példák

2013. március 19.

### 1.1 2-kromatikus hipergráfok

1.1 Tétel. (Erdős–Hajnal) *Ha egy $r$-gráf élszáma $\leq 2^{r-1}$, akkor 2-szinezhető.*

### 1.2 Ramsey számok

1.2 Tétel. (Erdős, Erdős–Szekeres)

$$2^{(k-1)/2} \leq R(k,k) \leq \binom{2k-2}{k-1}.$$

1.3 Megjegyzés. Ezt a bizonyítást el lehet mondani úgy is, hogy csak a megfelelő tulajdonságú gráfok számáról beszélünk, nem beszélve valószínűségekről. Azonban a valószínűségi szemlélet az, ami továbbvezet.

### 1.3 *Dominált turnament

*$k$-dominált* egy turnament, ha bármely $k$ csúcsához van olyan további csúcs, melyből mindegyikhez él megy.

1.4 Tétel. (Erdős) *Minden $k$-ra van $k$-dominált turnament.*

### 1.4 Turnament Hamilton útjainak száma

1.5 Állítás. (Rédei) *Minden turnamentben van Hamilton út.*

1.6 Tétel. (Szele) *Van olyan $n$ csúcsú turnament, melyben legalább $n!/2^{n-1}$ Hamilton-út van.*

A megfordítást csak kimondjuk.

1.7 TÉTEL. (ALON) *Minden $c < 2$-höz van olyan $n_0$, hogy ha $n \geq n_0$, akkor minden $n$ csúcsú turnamentben legfeljebb $n!/c^{n-1}$ Hamilton-út van.*

### 1.5 *LYM egyenlőtlenség, Sperner tétele

*Sperner rendszernek* hívjuk az olyan hipergráfot, melyben egyik él sem tartalmaz egy másikat.

1.8 TÉTEL. *Sperner rendszerre*

$$\sum_{A \in \mathcal{H}} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \leq 1.$$

1.9 KÖVETKEZMÉNY. (SPERNER TÉTELE) $|\mathcal{H}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

### 1.6 *Bollobás egyenlőtlenség

1.10 TÉTEL. *Legyenek $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m$ véges halmazok, és tegyük föl, hogy minden $i$-re $A_i \cap B_i = \emptyset$, de ha $i \neq j$, akkor $A_i \cap B_j \neq \emptyset$. Ekkor*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{|A_i|+|B_i|}{|A_i|}} \leq 1.$$

1.11 KÖVETKEZMÉNY. *Ha $|A_i| = p$, $|B_i| = q$, akkor $m \leq \binom{p+q}{q}$.*

# 2 Várható érték

## 2.1 Alsó becslés a független pontok maximális számára

2.1 ÁLLÍTÁS. *Legyen $G$ egy $n$ csúcsú, $m$ élű gráf, és legyen $0 \leq p \leq 1$. Ekkor*

$$\alpha(G) \geq pn - p^2 m.$$

**Bizonyítás.** Válasszunk ki véletlenszerűen minden pontot $p$ valószínűséggel, majd a kapott pontok által kifeszített minden élnek hagyjuk el valamelyik végpontját. □

Ha $m \geq n/2$, akkor $p$ legjobb választása $p = n/2m$, és így

$$\alpha(G) \geq \frac{n^2}{4m}.$$

Ennél Turán tételéből sokkal jobb becslés nyerhető:

$$\alpha(G) \geq \frac{n^2}{2m+n}.$$

Erre (és ezzel Turán tételére is) adunk egy véletlent használó bizonyítást. A következő erősebb egyenlőséget igazoljuk:

2.2 TÉTEL.

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{d_v + 1}.$$

## 2.2 Gráfok keresztezési száma

Egy $G$ gráf $\mathrm{cr}(G)$ keresztezési száma az a minimális $c$, melyre $G$ legfeljebb $c$ kereszteződéssel lerajzolható a síkba.

2.3 Lemma.

$$\mathrm{cr}(G) \geq m - 3n + 6.$$

2.4 Tétel. (Ajtai, Chvátal, Newborn, Szemerédi; Leighton) *Ha* $|V(G)| = n$ *és* $|E(G)| = m \geq 5n$*, akkor*

$$\mathrm{cr}(G) \geq \frac{m^3}{100n^2}$$

**Bizonyítás.** Válasszunk ki minden pontot $p$ valószínűséggel ($0 < p < 1$), igy kapunk egy $G' = (V', E')$ feszitett részgráfot. Ekkor

$$\mathsf{E}(|V'|) = pn,$$
$$\mathsf{E}(|E'|) = p^2 m,$$
$$\mathsf{E}(\mathrm{cr}(G')) \leq p^4 \mathrm{cr}(G).$$

A 2.3 lemma szerint

$$\mathrm{cr}(G') > |E'| - 3|V'|,$$

és várható értéket véve azt kapjuk, hogy

$$p^4 \mathrm{cr}(G) > p^2 m - 3pn, \qquad \mathrm{cr}(G) > \frac{m}{p^2} - 3\frac{n}{p^3}.$$

A jobboldal maximuma $p = 9n/(2m)$ értéknél van, ahol az adódik, hogy

$$\mathrm{cr}(G) > \frac{4m^3}{243n^2}.$$

$\square$

A fenti becslésnek sok alkalmazása van különböző geometriai kérdésekre. Például egyszerű bizonyítást ad arra, hogy $n$ síkbeli pont között az 1 távolság csak $O(n^{4/3})$-szor fordulhat elő.

2013. március 22.

## 2.3 Rövid kört nem tartalmazó nagy kromatikus számú gráf

2.5 Tétel. (Erdős) *Minden* $k, l$*-hez van olyan gráf, melynek kromatikus száma legalább* $k$*, és melyben minden kör hossza legalább* $l$*.*

Legyen

$$p = \frac{(\log n)^3}{n}, \qquad t = \frac{n}{\log n}, \quad l = \frac{\log n}{10 \log\log n}.$$

Ekkor $G(n,p)$-ben nagy valószínűséggel nincs $t$ elemű független, és a legfeljebb $l$ hosszúságú körök várható száma kisebb, mint $n/4$. Így $n/2$ pontot elhagyva olyan gráfot kapunk, melynek kromatikus száma $> n/(2t)$, és minden körének hossza $> k$.

## 3 Második momentum módszer

Ha $X$ nemnegatív, egészértékű valószínűségi változó, akkor a Markov egyenlőtlenség szerint

$$\mathsf{P}(X > 0) \leq \mathsf{E}(X). \tag{1}$$

Ha $X$ nemnegatív valószínűségi változó, akkor a Csebisev Egyenlőtlenség szerint

$$\mathsf{P}(X = 0) \leq \frac{\mathsf{Var}(X)}{\mathsf{E}(X)^2}. \tag{2}$$

### 3.1 $K_4$ küszöbfüggvénye

3.1 Tétel. *Legyen* $p(n) \in [0, 1]$.

(a) *Ha* $p(n)n^{2/3} \to 0$, *akkor 1-hez tartó valószínűséggel* $G(n, p(n))$*-ben nincs teljes négyszög.*

(b) *Ha* $p(n)n^{2/3} \to \infty$, *akkor 1-hez tartó valószínűséggel* $G(n, p(n))$*-ben van teljes négyszög.*

### 3.2 Prímosztók száma

Legyen $\lambda(n)$ az $n$ szám különböző prímosztóinak száma.

3.2 Tétel. (Turán) *Legyen* $k \in [n]$ *véletlen. Ekkor minden* $t > 0$ *számra és (*$t$*-től függően) elég nagy* $n$*-re*

$$\mathsf{P}(|\lambda(k) - \ln\ln k| > t\sqrt{\ln\ln k}|) < \frac{20}{t^2}.$$

**Bizonyítás.** A legtöbb $k \in [n]$ számra $\ln\ln n \approx \ln\ln k$. Pontosabban, ha $\sqrt{n} \leq k \leq n$, akkor

$$\ln\ln n - \ln\ln k \leq \ln\ln n - \ln\ln\sqrt{n} < 1.$$

Ezért elegendő azt bizonyítani, hogy minden $s > 0$-ra és ($s$-től függően) elég nagy $n$-re

$$\mathsf{P}(|\lambda(k) - \ln\ln n| > s\sqrt{\ln\ln k}) < \frac{10}{s^2}.$$

Ehhez vegyük észre, hogy $\lambda(k)$ így írható:

$$\lambda(k) = \sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ prime}}} X_p,$$

ahol

$$X_p = \begin{cases} 1, & \text{ha } p \mid k, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Így

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(\lambda(k)) &= \sum_p \mathsf{E}(X_p) = \frac{1}{n}\sum_p \lfloor \frac{n}{p} \rfloor = \frac{1}{n}\sum_{p \leq n}\Big(\frac{n}{p} - \Big\{\frac{n}{p}\Big\}\Big) \\ &= \sum_{p \leq n}\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\sum_{p \leq n}\Big\{\frac{n}{p}\Big\} = \ln\ln n + c_1, \end{aligned}$$

ahol $|c_1| \leq 1$. Továbbá,

$$\begin{aligned}
\mathsf{Var}(\lambda(k)) &= \sum_p \mathsf{Var}(X_p) + \sum_{p \neq q} \mathrm{Cov}(X_p, X_q) \leq \mathsf{E}(\lambda(k)) + \frac{1}{n} \sum_{p \neq q} \lfloor \frac{n}{pq} \rfloor - \frac{1}{n^2} \sum_{p \neq q} \lfloor \frac{n}{p} \rfloor \lfloor \frac{n}{q} \rfloor \\
&\leq \mathsf{E}(\lambda(k)) + \frac{1}{n} \sum_{p \neq q} \frac{n}{pq} - \frac{1}{n^2} \sum_{p \neq q} \Big(\frac{n}{p} - 1\Big)\Big(\frac{n}{q} - 1\Big) \\
&\leq \mathsf{E}(\lambda(k)) + \sum_{p \neq q} \frac{1}{n} \Big(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\Big) \\
&\leq \mathsf{E}(\lambda(k)) + 2(1 + \ln \ln n) < 4 \ln \ln n.
\end{aligned}$$

Így a Csebisev Egyenlőtlenség szerint

$$\mathsf{P}(|\lambda(k) - \ln \ln n| > s\sqrt{\ln \ln n}) \leq \mathsf{P}(|\lambda(k) - \mathsf{E}(\lambda(k))| > s\sqrt{\ln \ln n} - 3) \leq \frac{\mathsf{Var}(\lambda(k))}{(s\sqrt{\ln \ln n} - 3)^2} < \frac{10}{s^2}.$$

ha $n$ elég nagy. $\square$

## 3.3 Véletlen gráf maximális teljes részgráfja I

3.3 Tétel. *Legyen $k = k(n) \geq 1$ egész szám.*

(a) *Ha $\binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}} \to 0$, akkor*

$$\mathsf{P}(\omega(G(n, 1/2)) \geq k) \to 0.$$

(b) *Ha $\binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}} \to \infty$, akkor*

$$\mathsf{P}(\omega(G(n, 1/2)) < k) \to 0.$$

2013. március 26.

**Bizonyítás.** Legyen $k_0 = k_0(n)$ az a legkisebb pozitív egész szám, melyre $\binom{n}{k_0} 2^{-\binom{k_0}{2}} < 1$. Könnyű látni, hogy

$$k_0 \sim 2 \log n,$$

és hogy ha $k \leq k_0 - 2$, akkor (b) feltétele áll fenn, míg ha $k \geq k_0 + 1$, akkor (a) feltétele. Ezért feltehetjük, hogy $k \sim 2 \log n$.

Minden $k$ elemű $S$ halmazra, legyen

$$X_S = \begin{cases} 1 & \text{ha } S \text{ teljes részgráf,} \\ & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ekkor $X = \sum_S x_S$ a teljes $k$-asok száma, és

$$\mathsf{E}(X) = \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}}. \tag{3}$$

Így

$$\mathsf{P}(\omega(G(n, 1/2)) \geq k) = \mathsf{P}(|X| \geq 1) \leq \mathsf{E}(X) = \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}}.$$

Ebből (a) adódik.

A másik oldali becsléshez kiszámítjuk a szórást.

$$\mathsf{Var}(X) = \sum_S \mathsf{Var}(X_S) + \sum_{S \neq T} \mathrm{Cov}(X_S, X_T).$$

Az első szumma kisebb, mint $\mathsf{E}(X)$. A másodikban csak azok a tagok nem nullák, ahol $S$ és $T$ legalább két pontban metszik egymást. Ha $|S \cap T| = i$, akkor

$$\mathrm{Cov}(X_S, X_T) = 2^{-2\binom{k}{2}+\binom{i}{2}} - 2^{-2\binom{k}{2}} < 2^{-2\binom{k}{2}+\binom{i}{2}},$$

és így, felhasználva, hogy az ilyen $(S,T)$ párok száma $\binom{n}{k}\binom{k}{i}\binom{n-k}{k-i}$,

$$\mathsf{Var}(X) \leq \mathsf{E}(X) + \sum_{i=2}^{k-1} \binom{n}{k}\binom{k}{i}\binom{n-k}{k-i} 2^{-2\binom{k}{2}+\binom{i}{2}}.$$

A (2) egyenlőtlenség szerint elég azt megmutatni, hogy $\mathsf{Var}(X)/\mathsf{E}(X)^2 \to 0$. A fentiekből

$$\begin{aligned}\frac{\mathsf{Var}(X)}{\mathsf{E}(X)^2} &\leq \frac{1}{\mathsf{E}(X)} + \sum_{i=2}^{k-1} \frac{\binom{n}{k}\binom{k}{i}\binom{n-k}{k-i}2^{-2\binom{k}{2}+\binom{i}{2}}}{\binom{n}{k}^2 2^{-2\binom{k}{2}}} \\ &= \frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{i=2}^{k} \binom{k}{i}\binom{n-k}{k-i} 2^{\binom{i}{2}}.\end{aligned}$$

A szummában nézzük két egymásutáni tag hányadosát:

$$\binom{k}{i+1}\binom{n-k}{k-i-1}2^{\binom{i+1}{2}} \Big/ \binom{k}{i}\binom{n-k}{k-i}2^{\binom{i}{2}} = \frac{2^i (k-i)^2}{(i+1)(n-2k+i+1)}.$$

Kis számolgatással látható, hogy ez $i = 2$ esetén 1-nél jóval kisebb, majd $i$-vel monoton nő, valahol (nem fontos, hogy hol) túllépi az 1-et, és $i = k-1$ esetén már igen nagy. Így a két szélső tag valamelyike a legnagyobb, és a többiek összege kisebb, mint ezek összegének kétszerese (ha $n$ elég nagy). De a két szélső tag kicsi:

$$\frac{\binom{k}{2}\binom{n-k}{k-2}}{\binom{n}{k}} 2^{\binom{2}{2}} = k(k-1)\frac{(n-k)\dots(n-2k+3)}{n(n-1)\dots(n-k+1)} < \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty),$$

és

$$\frac{\binom{k}{k}\binom{n-k}{0}}{\binom{n}{k}} 2^{\binom{k}{2}} = \frac{1}{\binom{n}{k}} 2^{\binom{k}{2}} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

□

# 4 Martingálok

Valószínűségi változóknak egy $X_1, X_2, \dots$ sorozatát *martingálnak* nevezzük, ha minden $k \geq 0$ indexre

$$\mathsf{E}(X_{k+1} \mid X_1, \dots, X_k) = X_k.$$

Hozzávehetjük mindig az $X_0 = \mathsf{E}(X_1)$ értéket (ez tehát olyan valószínűségi változó, ami nem változik). Minden martingálra

$$X_0 = \mathsf{E}(X_1) = \mathsf{E}(X_2) = \dots$$

Valószínűségi változóknak egy $X_1, X_2, \dots$ sorozatát *szupermartingálnak* nevezzük, ha minden $k \geq 0$ indexre

$$\mathsf{E}(X_{k+1} \mid X_1, \dots, X_k) \leq X_k.$$

Minden szupermartingálra

$$X_0 \geq \mathsf{E}(X_1) \geq \mathsf{E}(X_2) \geq \dots$$

A submartingálok hasonlóan definiálhatók.

Három tételt mondunk ki martingálokra, melyeknek kombinatorikai alkalmazásai vannak, de ezek közül a harmadikkal foglalkozunk részletesen.

## 4.1 *Megállási Tétel

Legyen $(X_0, X_1, \dots)$ valószínűségi változóknak egy sorozata (az értékük nem kell, hogy szám legyen). Egy $T$ nemnegatív egész értékű valószínűségi változót *megállási időnek* nevezünk (az $(X_0, X_1, \dots)$ sorozatra vonatkozóan), ha minden $k \geq 0$-ra a $T = k$ esemény független az $X_{k+1}, X_{k+2} \dots$ változóktól. Számítógéptudományi alkalmazásokban szokás ezt *megállási szabálynak* is hívni: azt, hogy a sorozatot megállítjuk-e $k$ lépés után, az addigi változó-értékek ismeretében döntjük el (esetleg randomizált algoritmussal), a későbbi változókat nem ismerve.

4.1 Tétel. *Legyen $(X_1, X_2, \dots)$ olyan szubmartingál, melyre $|X_{m+1} - X_m|$ korlátos, és legyen $T$ olyan megállási idő, melyre $\mathsf{E}(T)$ véges. Ekkor $\mathsf{E}(X_T) \leq X_0$. Ha $(X_1, X_2, \dots)$ martingál, akkor egyenlőség áll.*

4.2 Következmény. *Indítsunk el 0-ból egy bolyongást az egyenes rácspontjain, és álljunk meg, ha vagy $a$-ba, vagy $-b$-be jutunk ($a, b \in \mathbb{Z}_+$). Annak a valószínűsége, hogy $a$-ban állunk meg, $b/(a+b)$. A megtett lépések várható száma $ab$.*

## 4.2 *Konvergencia Tétel

4.3 Tétel. (Doob) *Ha $X_1, X_2, \dots$ korlátos martingál, akkor 1 valószínűséggel $\lim_{n\to\infty} X_n$ létezik.*

Alkalmazás: Pólya-urna.

## 4.3 Azuma Egyenlőtlenség

4.4 Tétel. *Legyen $X_1, X_2, \dots$ olyan martingál, melyre $|X_{m+1} - X_m| \leq 1$ minden $m$-re. Ekkor*

$$\mathsf{P}\big(X_m \geq X_0 + \lambda\big) < e^{-\lambda^2/(2m)}.$$

Ha $\lambda = \varepsilon m$, akkor azt kapjuk, hogy

$$\mathsf{P}\big(X_m - X_0 \geq \varepsilon m\big) < e^{-\varepsilon^2 m/2}.$$

Ugyanezt $(-X_m)$-re is alkalmazva kapjuk, hogy

$$\mathsf{P}\big(|X_m - X_0| \geq \varepsilon m\big) < 2e^{-\varepsilon^2 m/2}.$$

Érdekes még a $\lambda = c\sqrt{m}$ választás:

$$\mathsf{P}\big(X_m - X_0 \geq c\sqrt{m}\big) < e^{-c^2/2}.$$

4.5 Következmény. (Bernstein–Csernov–Hoeffding) *Legyenek* $X_1, X_2, \dots$ *független azonos eloszlású valószínűségi változók,* $|X_i| \leq 1$. *Ekkor*

$$\mathsf{P}\left(\Big|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_m - \mathsf{E}(X_1)\Big| > \varepsilon\right) < 2e^{-\varepsilon^2 m/2}.$$

4.6 Következmény. *Legyenek* $(\Omega, \mathcal{A}, \pi)$ *egy valószínűségi mező, és legyen* $f : \Omega^n \to \mathbb{R}$ *olyan mérhető függvény, melyre*

$$|f(x_1, \dots, x_n) - f(y_1, \dots, y_n)| \leq 1$$

*ha* $(x_1, \dots, x_n)$ *és* $(y_1, \dots, y_n)$ *csak egy koordinátában különböznek. Ekkor*

$$\mathsf{P}\big(f(x) - \mathsf{E}(f(x)) > \varepsilon n\big) < e^{-\varepsilon^2 n/2}.$$

*és*

$$\mathsf{P}\big(|f(x) - \mathsf{E}(f(x))| > \varepsilon n\big) < 2e^{-\varepsilon^2 n/2}.$$

### 4.3.1 Véletlen leképezés képhalmaza

4.7 Tétel. *Legyen* $|S| = n$, *és legyen* $\phi : S \to S$ *véletlen leképezés. Ekkor*

$$\mathsf{P}\left(\Big||\phi(S)| - \Big(1 - \frac{1}{e}\Big)n\Big| > \lambda\right) < 2e^{-\lambda^2/(2n)}.$$

### 4.3.2 Véletlen részgráf élszáma

2013. április 9.

4.8 Tétel. *Legyen* $G$ $n$ *csúcsú* $m$ *élű gráf, jelölje* $d = m/\binom{n}{2}$ *az élsűrűségét, legyen* $k \geq 1$, *és legyen* $S$ *a* $V(G)$ *egy véletlen* $k$ *elemű részhalmaza. Ekkor*

$$\mathsf{P}\left(\Big|\frac{|E(G[S])|}{\binom{k}{2}} - d\Big| > \varepsilon\right) \leq e^{-\varepsilon^2 k/8}.$$

Legyenek $v_1$ véletlen pont $V(G)$-ben, $v_2$ véletlen pont $V(G) \setminus \{v_1\}$-ben, stb. $v_k$ véletlen pont $V(G) \setminus \{v_1, \dots, v_{k-1}\}$-ben, és $S = \{v_1, \dots, v_k\}$. Legyen

$$X_m = \frac{1}{k-1}\mathsf{E}(|E(G[S])| \ \mid \ v_1, \dots, v_m).$$

Ekkor $X_0, X_1, \dots, X_k$ martingál, és

$$|X_{m+1} - X_m| \le 1.$$

Továbbá $X_0 = d\frac{k}{2}$. Így Azuma egyenlőtlensége szerint

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{|E(G[S])|}{\binom{k}{2}} - d\right| > \varepsilon\right) = \mathsf{P}\left(|X_k - X_0| > \varepsilon\frac{k}{2}\right) < \exp\Big(-\frac{\varepsilon^2 k}{8}\Big).$$

4.9 Megjegyzés. Választhatnánk a $v_1, v_2, \dots, v_k$ csúcsokat egymástól függetlenül, és alkalmazhatnánk a 4.6 Következményt. Ekkor azonban egy maradéktagot kellene külön megbecsülnünk, amit abból kapunk, hogy két $v_i$ egybeesik.

### 4.3.3 Véletlen részgráf kromatikus száma

4.10 Tétel. *Minden $G$ gráfhoz és $1 \le k \le |V(G)|$ egész számhoz van olyan $s = s(G,k)$ szám, hogy a $V(G)$ egy véletlen $k$ elemű $S$ részhalmazára*

$$\mathsf{P}(|\chi(G[S]) - s| > \varepsilon k) \le e^{-\varepsilon^2 k/2}.$$

Konkrétan $s = \mathsf{E}(\chi(G[S]))$, de erről nehéz a definíciónál többet mondani. Legyen $v_1, v_2 \dots$ mint fentebb, és legyen

$$X_m = \mathsf{E}(\chi(G[S]) \mid v_1, \dots, v_m).$$

Ekkor $X_0, X_1, \dots, X_k$ martingál, és

$$|X_{m+1} - X_m| \le 1.$$

Így Azuma egyenlőtlensége szerint

$$\mathsf{P}(|X_k - X_0| > \varepsilon k) < e^{-\varepsilon^2 k/2}.$$

### 4.3.4 Véletlen gráf maximális teljes részgráfja II

Legyen $k_0$ a legkisebb olyan egész szám, melyre

$$\binom{n}{k_0} 2^{-\binom{k_2}{2}} \le 1.$$

4.11 Tétel. *Legyen $k = k_0 - 3$. Ekkor $G = G(n, 1/2)$-re teljesül, hogy*

$$\mathsf{P}(\omega(G) < k) \le \exp(\frac{-n^2}{64k^8}).$$

**Bizonyítás.** Legyen $N$ a teljes $k$-asok száma $G$-ben, legyen $M$ az olyan $\{X, Y\}$ párok száma, melyekre $X, Y \subseteq V(G)$, $|X| = |Y|$ és $|X \cap Y| \ge 2$, és legyen $A$ az élidegen teljes $k$-asok maximális száma $G$-ben. Nyilvánvaló, hogy $\mathsf{P}(\omega(G) < k) = \mathsf{P}(N = 0) = \mathsf{P}(A = 0)$. A $\mathsf{P}(N = 0)$ valószínűségre felső becslést kaphatunk a Második Momentum Módszerrel, de ez nem elég éles.

Az Azuma egyenlőtlenség 4.6 következményét alkalmazzuk az

$$A = \alpha(X_{12}, X_{13}, \dots, X_{n-1,n})$$

függvényre, ahol $X_{ij}$ annak az indikátora, hogy $i$ és $j$ össze vannak-e kötve $G$-ben. Nyilvánvaló, hogy egy $X_{ij}$-t megváltoztatva, $\alpha(X_{12}, X_{13}, \dots, X_{n-1,n})$ legfeljebb 1-gyel változik. (Emiatt használjuk $A$-t, és nem $N$-et, ami sokkal többet tud változni.) Legyen $a = \mathsf{E}(A)$, $n_0 = \mathsf{E}(N)$, $m_0 = \mathsf{E}(M)$, akkor

$$\mathsf{P}(A = 0) = \mathsf{P}(A - \mathsf{E}(A) \leq -a) \leq \exp\left(-\frac{a^2}{n(n-1)}\right).$$

Itt $a$-t alulról kell becsülnünk. Ehhez a 2.1 Állítást használjuk. Legyen $\mathcal{G}$ az a gráf, melynek csúcsai a teljes $k$-asok, és kettő akkor van összekötve, ha van közös élük. Ekkor $N = |V(\mathcal{G})|$, $M = |E(\mathcal{G})|$, $A = \alpha(\mathcal{G})$, és így minden $0 \leq q \leq 1$ esetén $A \geq qN - q^2 M$, és várható értéket véve $a \geq qn_0 - q^2 m_0$. Így a $q = \frac{n_0}{2m_0}$ választással (amiről majd ellenőrizni kell, hogy legfeljebb 1), azt kapjuk, hogy

$$a \geq \frac{n_0^2}{4m_0}.$$

Itt

$$n_0 = \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}} \qquad \text{és} \qquad m_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{k-1} \binom{n}{k} \binom{k}{i} \binom{n-k}{k-i} 2^{-2\binom{k}{2} + \binom{i}{2}}$$

A 3.3 tétel bizonyításához hasonló módon kiszámítható, hogy

$$\frac{1}{8} k^4 n_0 \leq m_0 \leq \frac{2k^4}{n^2} n_0^2.$$

Innen $q < 1$ és $a \geq \frac{n^2}{8k^4}$, és ezt helyettesítve, és azt használva, hogy $k \sim 2 \log n$, a tétel következik. □

### 4.3.5 Véletlen gráf kromatikus száma

4.12 Tétel. *Legyen $n \geq 1$ egész, $p \in [0,1]$ és $G = G(n,p)$. Ekkor van olyan $c > 0$, hogy*

$$\mathsf{P}(|\chi(G) - c| > \lambda\sqrt{n-1}) < 2e^{-\lambda^2/2}.$$

De mi ez a $c$ érték? A 4.11 tételből levezethető:

4.13 Következmény. *Minden $\varepsilon > 0$-ra*

$$\mathsf{P}\left(\left|\chi(G) - \frac{n}{2\log n}\right| > \varepsilon \frac{n}{2\log n}\right) = o(n).$$

# 5 Lokális Lemma

5.1 Tétel. *Legyenek* $A_1, \ldots, A_n$ *események, és tegyük föl, hogy minden* $A_i$*-hez van* $n-d-1$ *másik esemény úgy, hogy azoktól* $A_i$ *teljesen független. Tegyük föl, hogy* $\mathsf{P}(A_i) \leq 1/(e(d+1))$ *minden* $i$*-re. Ekkor* $\mathsf{P}(\overline{A}_1 \wedge \cdots \wedge \overline{A}_n) > 0$.

Általánosabb alakja:

5.2 Tétel. *Legyenek* $A_1, \ldots, A_n$ *események, és tegyük föl, hogy vannak olyan* $x_1, \ldots, x_n \in (0,1)$ *valós számok, és minden* $i$*-hez van olyan* $S_i \subseteq \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$*, hogy minden* $S \subseteq S_i$*-re*

$$\mathsf{P}\Big(A_i \;\Big|\; \bigwedge_{j \in S} \overline{A}_j\Big) \leq x_i \prod_{j \notin S_i} (1 - x_j).$$

*Ekkor*

$$\mathsf{P}(\overline{A}_1 \wedge \cdots \wedge \overline{A}_n) \geq \prod_{j=1}^{n} (1 - x_i) > 0.$$

A bevezető alakon kívül még két következményt érdemes megfogalmazni:

5.3 Következmény. *Legyenek* $A_1, \ldots, A_n$ *események, és tegyük föl, hogy minden* $i$*-hez van olyan* $S_i \subseteq \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$, $|S_i| = n-d-1$*, hogy minden* $S \subseteq S_i$*-re*

$$\mathsf{P}\Big(A_i \;\Big|\; \bigwedge_{j \in S} \overline{A}_j\Big) \leq \frac{1}{e(d+1)}.$$

*Ekkor*

$$\mathsf{P}(\overline{A}_1 \wedge \cdots \wedge \overline{A}_n) > 0.$$

5.4 Következmény. *Legyenek* $A_1, \ldots, A_n$ *események, és tegyük föl, hogy minden* $i$*-hez van olyan* $S_i \subseteq \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$*, hogy* $A_i$ *teljesen független az* $\{A_j :\ j \in S_i\}$ *eseményektől, továbbá*

$$\sum_{j \notin S_i} \mathsf{P}(A_j) \leq \frac{1}{4}.$$

*Ekkor*

$$\mathsf{P}(\overline{A}_1 \wedge \cdots \wedge \overline{A}_n) > 0.$$

5.5 Megjegyzés. A függetlenségi feltételt gyakran úgy adjuk meg, hogy definiálunk a $V = \{1, \ldots, n\}$ egy gráfot, melyre az áll, hogy minden $i$ csúcsra az $A_i$ esemény teljesen független az $(A_j :\ j \in V \setminus N(i) \setminus \{i\})$ eseményektől (figyelem: nem csak külön-külön mindegyiktől!).

## 5.1 Brooks tétel hipergráfra

5.6 Tétel. *Ha egy $k$-uniform hipergráfban minden él legfeljebb $2^{k-3}$ másik élt metsz, akkor a hipergráf 2 színnel szinezhető.*

5.7 Következmény. *Ha egy $k$-uniform hipergráfban minden pont foka legfeljebb $2^{k-3}/k$, akkor a hipergráf 2 színnel szinezhető.*

5.8 Következmény. *Ha egy $k$-uniform hipergráfban bármely két élnek legfeljebb egy közös pontja van, és éleinek száma legfeljebb $4^{k-4}/k^3$, akkor a hipergráf 2 színnel szinezhető.*

## 5.2 $k$-val osztható hosszúságú irányított kör

Kőnnyű bebizonyítani, hogy ha egy gráfban minden befok legalább $\delta$, akkor van benne legalább $\delta + 1$ hosszúságú irányított kör. Mi mondható még a körök hosszáról?

5.9 Tétel. *Legyen $G$ irányított gráf, legyen a maximális kifok $\Delta$ és a minimális befok $\delta$. Ekkor minden $1 \leq k \leq \delta/(1+\ln(1+\delta\Delta))$ egész számra van $G$-ben olyan irányított kör, melynek hossza osztható $k$-val.*

## 5.3 Fedések felbontása

5.10 Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ olyan hipergráf, melyben minden pont foka legalább $k$, és minden pontra a pontot tartalmazó élek úniója legfeljebb $2^{k-3}$ elemű. Ekkor $\mathcal{H}$ felbontható két olyan hipergráf úniójára, melyek mindegyike minden csúcsot lefed.*

5.11 Következmény. *Ha $\mathcal{F}$ nyílt egységkörök olyan halmaza, mely minden pontot legalább $k$-szor és legfeljebb $2^{k/2-6}$–-szorosan fednek le, akkor $\mathcal{F}$ felbontható két olyan halmaz úniójára, melyek mindegyike minden pontot lefed.*

## 5.4 *Latin transzverzális

5.12 Tétel. (Erdős–Spencer) *Legyen $A$ olyan $n \times n$ mátrix, melyben minden elem legfeljebb $(n-1)/(4e)$-szer fordul elő. Ekkor van olyan $\pi$ permutáció, hogy az $a_{i\pi(i)}$ elemek mind különbözőek.*

# 6 Vapnik-Cservonenkisz dimenzió

## 6.1 Lefogás és törtlefogás

Legyen $(V, \mathcal{H})$ egy hipergráf, $n = |V|$, $m = |\mathcal{H}|$. A

$$\begin{array}{rll} \text{minimize} & \sum_{i \in V} x_i & \\ \text{subject to} & x_i \geq 0 & (i \in V) \\ & \sum_{i \in E} x_i \geq 1 & (E \in \mathcal{H}). \end{array} \tag{4}$$

linearis program minden megoldását *tört-lefogó halmaznak*, a program optimális értékét a *törtlefogási számnak* nevezzük, és $\tau^* = \tau^*(\mathcal{H})$-val jelöljük. Nyilvánvaló, hogy $\tau^*$ alsó korlátot ad a lefogó pontok minimális $\tau(\mathcal{H})$ számára. Kérdés, hogy mennyire éles ez a korlát, és egy optimális törtlefogásból (ami polinomiális időben kiszámítható) megkonstruálható-e egy közelítő egész megoldás.

Tekintsük (4) egy optimális $x$ megoldását, és legyen $p_i = x_i/\tau^*$. Ekkor $(p_i : i \in V)$ egy valószínűségeloszlás $V$-n, melyben minden $E \in \mathcal{H}$ él valószínűsége legalább $1/\tau^*$.

Két (nem lényegesen különböző) módon próbálhatunk meg ebből lefogó halmazt konstruálni:

(a) Generáljunk $v_1, v_2, ...$ csúcsokat a $p$ eloszlásból, és álljunk meg, ha minden él le van fogva.

(b) Minden csúcsról egymástól függetlenül $cp_i$ valószínűséggel eldöntjük, hogy ki akarjuk-e választani, és reménykedünk abban, hogy a kiválasztott pontok minden élt lefognak.

Az (a) változatban könnyen látható. hogy nagy valószínűséggel polinomiális számú lépés után megállunk. Legyen $T_{\rm rand}$ az így megkonstruált (véletlen) lefogó halmaz mérete.

Egy rögzített $A$ élre, annak a valószínűsége, hogy az első $t$ kiválasztott pont nem fogja le,

$$\left(1 - \frac{1}{\tau*}\right)^t < e^{-t/\tau^*}.$$

Így

$$\mathsf{P}(T_{\rm rand} > t) < me^{-t/\tau^*},$$

és ha $t > \tau^* \ln(2m)$, akkor nagyobb, mint $1/2$ annak a valószínűsége, hogy minden élt lefogtunk, vagyis $1/2$-nél nagyobb valószínűséggel

$$T_{\rm rand} \le \tau^* \ln(2m) \le \tau \ln(2m). \tag{5}$$

Jobb becslést kapunk, ha a Lokális Lemmát alkalmazzuk, 5.3 változatában. Tegyük fel, hogy $\mathcal{H}$ minden éle legfeljebb $D$ másik élt metsz. Legyen $S = \{v_1, \dots, v_t\}$, és legyenek a „rossz” események azok, hogy $S$ nem fog le egy adott élt. Ha

$$De^{-t/\tau^*} < \frac{1}{4},$$

akkor a Lokális Lemma szerint pozitív valószínűséggel minden él le lesz fogva. Továbbá,

$$\mathsf{E}(|S|) \le \tau^* \ln(4D) \le \tau \ln(4D). \tag{6}$$

Algoritmikus szempontból ez a becslés sem igazán érdekes, mert a mohó algoritmus kicsit jobb korlátot ad, igen gyors algoritmussal együtt:

6.1 ÁLLÍTÁS. *Ha egy $H$ hipergráf maximális foka $D$, akkor a mohó algoritmus által adott $T_{\rm moho}$ lefogó halmazra*

$$|T_{\rm moho}| \le \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{D}\right)\tau^*(H).$$

## 6.2 Becslés a Vapnik-Cservonenkisz dimenzió alapján

Egy $H$ hipergráf *Vapnik-Cservonenkisz dimenziója* az a legnagyobb $k$ egész szám, melyre van olyan $S \subseteq V(H)$, $|S| = k$, hogy minden $X \subseteq S$ halmazhoz van olyan $A \in H$, melyre $X = S \cap A$.

6.2 Lemma. (Sauer–Shelah) *Ha $H$ Vapnik-Cservonenkisz dimenziója $k$, akkor $|H| \le 1 + n + \cdots + \binom{n}{k}$.*

6.3 Tétel. *Ha egy $H$ hipergráf Vapnik-Cservonenkisz dimenziója $k$, akkor*

$$T_{\text{rand}} \le 8k\tau^*(H)\log(k\tau^*(H)).$$

Legyen $t = \lfloor 8k\tau^*(H)\log(k\tau^*(H))\rfloor$ és $s = \lfloor 4k\log(k\tau^*(H))\rfloor$. Legyen $p$ annak a valószínűsége, hogy van olyan $A$ él, melyet $\{v_1, \ldots, v_t\}$ nem metsz. Annak a $B$ eseménynek a valószínűségét fogjuk kétféleképpen megbecsülni, hogy van olyan $A$ él, melyet $\{v_1, \ldots, v_t\}$ nem metsz, de $\{v_{t+1}, \ldots, v_{2t}\}$ legalább $s$ pontban metsz.

Tegyük föl, hogy van olyan $A$ él, melyet $\{v_1, \ldots, v_t\}$ nem metsz. Csebisev Egyenlőtlensége szerint

$$\mathsf{P}\Big(|E \cap \{v_{t+1}, \ldots, v_{2t}\}| \le s\Big) < \frac{1}{2}.$$

Így

$$\mathsf{P}(B) > \frac{1}{2}p. \tag{7}$$

Másrészt, a $B$ esemény valószínűsége nem változik, ha a $\{v_1, \ldots, v_{2t}\}$ pontokat véletlenszerűen permutáljuk. Ha egy $A \in \mathcal{H}$ legalább $s$ pontot tartalmaz $\{v_1, \ldots, v_{2t}\}$-ből, akkor annak a valószínűsége hogy a permutáció után ezek közül mind a maásodik felében lesz

$$\frac{\binom{2t-s}{t}}{\binom{2t}{t}} \le \left(1 - \frac{s}{2t}\right)^t < e^{-s/2}.$$

Ezt a korlátot nem kell minden $A \in \mathcal{H}$ élre összeadni, hanem csak olyanokra, melyeknek a $\{v_1, \ldots, v_{2t}\}$ halmazzal különböző metszeteket adnak. Az ilyenek száma a 6.2 Lemma szerint legfeljebb

$$\binom{2t}{d} + \binom{2t}{d-1} + \cdots + 1 < (2t)^d.$$

Így

$$\mathsf{P}(B) = (2N)^d e^{-s/2} < 1/4$$

(7)-gyel összevetve adódik, hogy $p \le 1/2$.

Kicsit gondosabb számolás azt mutatja, hogy legalább $1/2$ valószínűséggel $T_{\text{rand}} = O(k\tau^* \log \tau^*)$.

### 6.3 $\varepsilon$-hálók és $\varepsilon$-minták

Legyen $(V, \mathcal{H})$ egy hipergráf és $\varepsilon > 0$. Egy $S \subseteq V$ halmaz *$\varepsilon$-háló*, ha bármely $A \in \mathcal{H}$, $|A| > \varepsilon|V|$ halmazt metsz. Egy $S \subseteq V$ halmaz *$\varepsilon$-minta*, ha bármely $A \in \mathcal{H}$ halmazra

$$\left| \frac{|A \cap S|}{|S|} - \frac{|A|}{|V|} \right| \leq \varepsilon.$$

6.4 Következmény. *Legyen $\mathcal{H}$ Vapnik-Cservonenkisz-dimenziója $k$, ekkor minden $\varepsilon > 0$-ra van $(V, \mathcal{H})$-ban olyan $S$ $\varepsilon$-háló, melyre*

$$|S| \leq 8\frac{k}{\varepsilon} \ln \frac{k}{\varepsilon}.$$

A fenti bizonyítás módosításával belátható:

6.5 Következmény. *Legyen $\mathcal{H}$ Vapnik-Cservonenkisz-dimenziója $k$, ekkor minden $\varepsilon > 0$-ra van $(V, \mathcal{H})$-ban olyan $S$ $\varepsilon$-minta, hogy*

$$|S| \leq \text{const}\frac{k}{\varepsilon^2} \ln \frac{k}{\varepsilon}.$$

6.6 Következmény. *Legyen $V$ egy $n$ elemű ponthalmaz a síkban. Ekkor van olyan $S \subseteq V$ halmaz, hogy minden $T$ háromszögre*

$$\left| \frac{|T \cap S|}{|S|} - \frac{|T \cap V|}{|V|} \right| \leq \varepsilon,$$

*és*

$$|S| \leq \text{const}\frac{1}{\varepsilon^2} \ln \frac{1}{\varepsilon}.$$

6.7 Következmény. *Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ olyan integrálható függvény, melyre $\int f = 1$. Ekkor van olyan $S \subseteq \mathbb{R}^2$ véges halmaz, melyre minden $T$ háromszögre*

$$\left| \int_T f - \frac{|T \cap S|}{|S|} \right| \leq \varepsilon,$$

*és*

$$|S| \leq \text{const}\frac{1}{\varepsilon^2} \ln \frac{1}{\varepsilon}.$$

# 7 *Szitamódszerek

Legyenek $A_1, \ldots, A_n$ tetszőleges események. Minden $I \subseteq [n] = \{1, \ldots, n\}$ halmazra legyen $A_I = \bigwedge_{i \in I} A_i$. A szitaformula szerint

$$\mathsf{P}(\overline{A}_1 \wedge \cdots \wedge \overline{A}_n) = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \mathsf{P}(A_I).$$

### 7.1 Bonferoni egyenlőtlenségek

Legyen $k \geq 0$ egész. Ha $k$ páros, akkor

$$\mathsf{P}(\overline{A}_1 \wedge \cdots \wedge \overline{A}_n) \leq \sum_{|I| \leq k} (-1)^{|I|} \mathsf{P}(A_I), \tag{8}$$

míg ha $k$ páratlan, akkor

$$\mathsf{P}(\overline{A}_1 \wedge \cdots \wedge \overline{A}_n) \geq \sum_{|I| \leq k} (-1)^{|I|} \mathsf{P}(A_I). \tag{9}$$

### 7.2 Brunn szita

Legyen $f(k) \geq 0$ tetszőleges egészértékű függvény az $\{1, \ldots, n\}$ halmazon, és legyen

$$\mathcal{I} = \{I \subseteq \{1, \ldots, n\} : |I \cap \{1, \ldots, k\}| \leq 2f(k),\ k = 1, \ldots, n\}.$$

Ekkor

$$\mathsf{P}(\overline{A}_1 \wedge \cdots \wedge \overline{A}_n) \leq \sum_{I \in \mathcal{I}} (-1)^{|I|} \mathsf{P}(A_I).$$

### 7.3 Selberg szita

7.1 Lemma. *Minden $I \subseteq [n]$ részhalmazhoz legyen $\lambda_I$ egy valós szám, továbbá $\lambda_\emptyset = 1$. Ekkor*

$$\mathsf{P}(\overline{A}_1 \wedge \cdots \wedge \overline{A}_n) \leq \sum_{I, J \subseteq \{1, \ldots, n\}} \lambda_I \lambda_J \mathsf{P}(A_{I \cup J}). \tag{10}$$

Megjegyezzük, hogy $\lambda_I = (-1)^{|I|}$ választással az egyenlőség teljesül.

Legyen $0 < a_i < 1$, $b_i = 1 - a_i$, $a_I = \prod_{i \in I} a_i$ és $b_I = \prod_{i \in I} b_i$. Minden $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszerre és $J \subseteq [n]$ halmazra legyen

$$\mathcal{A}/J = \{I \subseteq [n] \setminus J :\ I \cup J \in \mathcal{A}\}, \qquad Q_{\mathcal{A}} = \sum_{I \in \mathcal{A}} \frac{a_I}{b_I}, \qquad Q_J = Q_{\mathcal{A}/J} = \sum_{\substack{I \subseteq [n] \setminus J \\ I \cup J \in \mathcal{A}}} \frac{a_I}{b_I}.$$

Megjegyezzük, hogy $\mathcal{A}/J \subseteq \mathcal{A}$, így $Q_{\mathcal{A}/J} \leq Q_{\mathcal{A}}$.

7.2 Lemma. *Legyen $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$ egy leszálló halmazrendszer. Ekkor*

$$\sum_{I, J \in \mathcal{A}} \lambda_I \lambda_J a_{I \cup J} \tag{11}$$

*minimuma a $\lambda_\emptyset = 1$ feltétel mellett $1/Q_{\mathcal{A}}$, amit a*

$$\lambda_I = (-1)^{|I|} \frac{Q_{\mathcal{A}/I}}{b_I Q_{\mathcal{A}}} \tag{12}$$

*választás ad.*

**Bizonyítás.** Alakítsuk át (11)-et:

$$\sum_{I,J} \lambda_I \lambda_J a_{I\cup J} = \sum_{I,J} \lambda_I \lambda_J \frac{a_I a_J}{a_{I\cap J}} = \sum_{I,J} \lambda_I \lambda_J a_I a_J \sum_{K\subseteq I\cap J} \frac{b_K}{a_K}$$
$$= \sum_K \frac{b_K}{a_K} \sum_{K\subseteq I} \sum_{J\supseteq K} \lambda_I \lambda_J a_I a_J = \sum_K \frac{b_K}{a_K} \left( \sum_{I\supseteq K} a_I \lambda_I \right)^2 = \sum_K \frac{b_K}{a_K} \mu_K^2,$$

ahol

$$\mu_K = \sum_{I\supseteq K} a_I \lambda_I. \tag{13}$$

Itt $\lambda_I$-t kifejezhetjük a $\mu_K$-kkal:

$$\lambda_I = \frac{1}{a_I} \sum_{K\supseteq I} (-1)^{|K-I|} \mu_K, \tag{14}$$

mert a $\mu_K$-k nyilvánvalóan meghatározzák a $\lambda_I$-ket és a (14) által definiált $\lambda_I$-k kielégítik (13)-et. A (13) és (14) egyenletekből következik, hogy $\lambda_I = 0$ minden $I \notin \mathcal{A}$-ra akkor és csak akkor, ha $\mu_I = 0$ minden $I \notin \mathcal{A}$-ra. Így (11) minimuma a $\lambda_\emptyset = 1$ feltétel mellett ugyanaz, mint

$$\sum_{K\in\mathcal{A}} \frac{b_K}{a_K} \mu_K^2 \tag{15}$$

minimuma a

$$\sum_{K\in\mathcal{A}} (-1)^{|K|} \mu_K = 1 \tag{16}$$

feltétel mellett. Tovább alakítva

$$\sum_{K\in\mathcal{A}} \frac{b_K}{a_K} \mu_K^2 = \sum_{K\in\mathcal{A}} \frac{a_K}{b_K} \left( \frac{b_K}{a_K} \mu_K - \frac{(-1)^{|K|}}{Q_\mathcal{A}} \right)^2 + \frac{1}{Q_\mathcal{A}}. \tag{17}$$

Mivel

$$\mu_K = \frac{(-1)^{|K|}}{Q_\mathcal{A}} \cdot \frac{a_K}{b_K} \tag{18}$$

a változóknak egy olyan választása, mely minimalizálja (17) jobboldalát, és ugyanakkor kielégíti a (16) feltételt, azt kapjuk, hogy a (15) minimuma $1/Q_\mathcal{A}$ és (18) adja a $\mu$-k optimális választását. Ebből (14) alapján $\lambda_I$ értéke is könnyen adódik. $\square$

7.3 KÖVETKEZMÉNY. *Legyen $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$ egy leszálló halmazrendszer és $\varepsilon > 0$. Tegyük fel, hogy minden $K \in \mathcal{A}$ halmazra $|\mathsf{P}(A_K) - a_K| < \varepsilon$. Ekkor*

$$\mathsf{P}(\overline{A}_1 \ldots \overline{A}_n) \le \frac{1}{Q_\mathcal{A}} + \varepsilon \left( \sum_{I\in\mathcal{A}} \frac{Q_I}{Q_{\mathcal{A}_I}} \right)^2.$$

**Bizonyítás.** Legyen $\mathsf{P}(A_K) = a_K + r_K$, ahol $|r_K| \le \varepsilon$, és legyen $\lambda$ a (12) szerint választva. Ekkor a 7.1 Lemma szerint

$$\mathsf{P}(\overline{A}_1 \dots \overline{A}_n) \le \sum_{I,J \subseteq \{1,\dots,n\}} \lambda_I \lambda_J \mathsf{P}(A_{I \cup J}) = \sum_{I,J \subseteq \{1,\dots,n\}} \lambda_I \lambda_J a_{I \cup J} + \sum_{I,J \subseteq \{1,\dots,n\}} \lambda_I \lambda_J r_{I \cup J}.$$

Itt a 7.2 Lemma szerint az első tag $\frac{1}{Q_{\mathcal{A}}}$, a második pedig így becsülhető:

$$\Big| \sum_{I,J \subseteq \{1,\dots,n\}} \lambda_I \lambda_J r_{I \cup J} \Big| \le \varepsilon \sum_{I,J \subseteq \{1,\dots,n\}} |\lambda_I| \cdot |\lambda_J| = \varepsilon \Big( \sum_{I \subseteq \{1,\dots,n\}} |\lambda_I| \Big)^2.$$

Innen (12) alapján következik a Lemma. $\square$

Megjegyezzük, hogy a maradéktag így alakítható át:

$$\sum_{I \in \mathcal{A}} \frac{Q_I}{Q_{\mathcal{A}} b_I} = \frac{1}{Q_{\mathcal{A}}} \sum_{I \in \mathcal{A}} \sum_{\substack{K \supseteq I \\ K \in \mathcal{A}}} \frac{a_{K \setminus I}}{b_K} = \frac{1}{Q_{\mathcal{A}}} \sum_{K \in \mathcal{A}} \frac{1}{b_K} \sum_{I \subseteq K} a_{K \setminus I} = \frac{1}{Q_{\mathcal{A}}} \sum_{K \in \mathcal{A}} \prod_{i \in K} \frac{1 + a_i}{1 - a_i}.$$

7.4 Következmény. *Legyen $\varepsilon, \delta > 0$, és tegyük fel, hogy az előző következmény feltételei mellett*

$$\prod_{i \in K} \left( 1 + \frac{1}{a_i} \right) \le C$$

*minden $I \in \mathcal{A}$ halmazra. Ekkor*

$$\mathsf{P}(\overline{A}_1 \dots \overline{A}_n) \le \frac{1}{Q_{\mathcal{A}}} + \varepsilon C^2.$$

**Bizonyítás.** A 7.3 Következménybeli maradéktagot kell becsülnünk:

$$\sum_{K \in \mathcal{A}} \prod_{i \in K} \frac{1 + a_i}{1 - a_i} = \sum_{K \in \mathcal{A}} \prod_{i \in K} \left( 1 + \frac{1}{a_i} \right) \frac{a_i}{1 - a_i} \le a \sum_{K \in \mathcal{A}} \prod_{i \in K} \frac{a_i}{1 - a_i} = C Q_{\mathcal{A}},$$

és így a maradéktag legfeljebb $\varepsilon C^2$. $\square$

Alkalmazásként bebizonyítjuk a kovetkező számelméleti tételt:

7.5 Következmény. *Minden elég nagy $x$ számra*

$$\pi(x) \le 4 \frac{x}{\ln x}.$$

**Bizonyítás.** Legyenek $p_1, \dots, p_n$ a $\sqrt{x}$-nél nem nagyobb primszámok, és a korábbiakhoz hasonlóan legyen $p_K = \prod_{i \in K} p_i$. Legyen $a_i = 1/p_i$. Legyen $M = \lfloor x^{2/5} \rfloor$, és legyen $\mathcal{A} = \{K \subseteq [n] : p_K \le M\}$. Legyen $z$ az $[x]$ halmazból egyenletes eloszlás szerint választott véletlen szám, és jelölje $A_i$ azt az eseményt, hogy $p_i \mid z$. Ekkor

$$\mathsf{P}(\overline{A}_1 \dots \overline{A}_n) = \mathsf{P}(z \text{ prím}, \ z > \sqrt{x}) = \frac{\pi(x) - \pi(\sqrt{x})}{x},$$

és így

$$\pi(x) = \mathsf{P}(\overline{A}_1 \dots \overline{A}_n)x + O(\sqrt{x}). \tag{19}$$

A 7.4 Következményt alkalmazzuk. Minden $K \subseteq [n]$ halmazra

$$\mathsf{P}(A_K) = \mathsf{P}\Big(p_K \mid z\Big) = \frac{1}{x}\Big\lfloor \frac{x}{p_K} \Big\rfloor,$$

és így

$$|\mathsf{P}(A_K) - a_K| < \frac{1}{x}$$

minden $K \subseteq [n]$ halmazra. Továbbá ha $K \in \mathcal{A}$, akkor

$$\prod_{i \in K} \left(1 + \frac{1}{a_i}\right) = \prod_{i \in K}(1 + p_i) \leq M \prod_{i \in K}(1 + \frac{1}{p_i}) < M \exp\Big(\sum_{i \in K} \frac{1}{p_i}\Big).$$

Itt

$$\sum_{i \in K} \frac{1}{p_i} \leq \sum_{p < M} \frac{1}{p} < \ln\ln x,$$

és így

$$\prod_{i \in K} \left(1 + \frac{1}{a_i}\right) < M \exp(\ln\ln x) \leq x^{1/3} \ln x.$$

Tehát a 7.4 Következmény feltételei teljesülnek $\varepsilon = 1/x$ és $C = x^{1/3} \ln x$ választással, és ezért

$$\mathsf{P}(\overline{A}_1 \dots \overline{A}_n) \leq \frac{1}{Q_{\mathcal{A}}} + \frac{1}{x} x^{2/3} (\ln x)^2 = \frac{1}{Q_{\mathcal{A}}} + x^{-1/3} (\ln x)^2.$$

Az első tag becsléséhez

$$Q = \sum_{K \in \mathcal{A}} \frac{a_K}{b_K} = \sum_{K \in \mathcal{A}} \prod_{i \in K} \frac{a_i}{1 - a_i} = \sum_{K \in \mathcal{A}} \prod_{i \in K} (a_i + a_i^2 + \dots) = \sum_{K \in \mathcal{A}} \prod_{i \in K} (\frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \dots).$$

Az utóbbi szorzatot kifejtve, $\frac{1}{k}$ alakú tagokat kapunk, és biztosan megkapunk minden olyan tagot, melyben $k \leq M$. Így

$$Q_{\mathcal{A}} \geq \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{k} > \frac{1}{3} \ln x.$$

Így

$$\frac{1}{Q_{\mathcal{A}}} + x^{-1/3} (\ln x)^2 \leq \frac{3}{\ln x} + x^{-1/3} (\ln x)^2 \leq \frac{3 + o(1)}{\ln x}.$$

Ebből (19) alapján

$$\pi(x) \leq \frac{(3 + o(1))x}{\ln x} + O(\sqrt{x}) = \frac{3 + o(1)x}{\ln x}.$$

□

7.6 MEGJEGYZÉS. 1. Gondosabb számolással a 4-es konstans $2 + o(1)$-re csökkenthető. A Selberg-szitát használva a pontos $1 + o(1)$ is bizonyítható, de az sokkal bonyolultabban.

2. A $\pi(x) = O(x/\ln x)$ becslés a fentinél egyszerűbb elemi eszközökkel is bizonyítható (lásd pl. Erdős-Surányi [2]). A Selberg-szita azonban más irányú általánosításokhoz is használható, például a fenti bizonyításhoz hasonlóan levezethető a következő tétel.

7.7 KÖVETKEZMÉNY. *Legyen $0 < l < k$, és legyen $x$ a $k$-hoz képest elég nagy szám. Ekkor az $l, k+l, \ldots, k(x-1)+l$ számtani sorozatban előforduló prímek száma nem nagyobb, mint*

$$3 \cdot \frac{k}{\varphi(k)} \cdot \frac{x}{\log x}.$$

# 8 Korrelációs egyenlőtlenségek

## 8.1 A 4-Függvény Tétel

Bármely $S$ halmaz és $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq 2^S$ esetén legyen $\mathcal{A} \underline{\cup} \mathcal{B} = \{A \cup B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$, $\mathcal{A} \underline{\cap} \mathcal{B} = \{A \cap B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ és $\mathcal{A} \underline{\setminus} \mathcal{B} = \{A \setminus B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$. Bármely $\alpha : 2^S \to \mathbb{R}_+$ függvényre legyen $\alpha(\mathcal{A}) = \sum_{A \in \mathcal{A}} \alpha(A)$.

8.1 TÉTEL. (AHLSWEDE-DAYKIN 4-FÜGGVÉNY-TÉTELE) *Legyen $S$ véges halmaz és $\alpha, \beta, \gamma, \delta : 2^S \to \mathbb{R}_+$ olyan halmazfüggvények, melyekre*

$$\alpha(A)\beta(B) \leq \gamma(A \cup B)\delta(A \cap B)$$

*teljesül bármely két $A, B \subseteq S$ halmazra. Ekkor*

$$\alpha(\mathcal{A})\beta(\mathcal{B}) \leq \gamma(\mathcal{A} \underline{\cup} \mathcal{B})\delta(\mathcal{A} \underline{\cap} \mathcal{B})$$

*teljesül bármely két $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq 2^S$ halmazrendszerre.*

8.2 KÖVETKEZMÉNY. *Legyen $L$ véges disztributív háló, és $\alpha, \beta, \gamma, \delta : L \to \mathbb{R}_+$ olyan függvények, melyekre*

$$\alpha(x)\beta(y) \leq \gamma(x \vee y)\delta(x \wedge y)$$

*teljesül bármely két $x, z \in L$ elemre. Ekkor*

$$\alpha(X)\beta(Y) \leq \gamma(X \underline{\vee} Y)\delta(X \underline{\wedge} Y)$$

*teljesül bármely két $X, Y \subseteq L$ halmazra.*

(Itt $X \vee Y = \{x \underline{\vee} y : x \in X, y \in Y\}$, és $\alpha(X) = \sum_{x \in X} \alpha(x)$ stb.)

8.3 KÖVETKEZMÉNY. *Legyen $L$ véges disztributív háló, és legyen $X, Y \subseteq L$. Ekkor*

$$|X| \cdot |Y| \leq |X \underline{\vee} Y| \cdot |X \underline{\wedge} Y|.$$

8.4 KÖVETKEZMÉNY. (MARICA–SCHÖNHEIM) *Legyen $S$ véges halmaz és $\mathcal{H} \subseteq 2^S$. Ekkor*

$$|\mathcal{H} \underline{\setminus} \mathcal{H}| \geq |\mathcal{H}|.$$

8.5 TÉTEL. (KLEITMAN) *Legyen $S$ véges halmaz és legyen $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq 2^S$. Ha $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ mindkettő leszálló vagy fölszálló, akkor*

$$|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| \geq 2^{-n} |\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}|,$$

*míg ha $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ egyike leszálló, másika fölszálló, akkor*

$$|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| \leq 2^{-n} |\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}|.$$

Ezt így is fogalmazhatjuk:

8.6 KÖVETKEZMÉNY. *Legyen $S$ véges halmaz, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq 2^S$, és legyen $X$az $S$ egy véletlen részhalmaza (egyenletesen választva az összes közül). Ha $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ mindkettő leszálló vagy fölszálló, akkor*

$$\mathsf{P}(X \in \mathcal{A}, X \in \mathcal{B}) \geq \mathsf{P}(X \in \mathcal{A}) \mathsf{P}(X \in \mathcal{B}),$$

*míg ha $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ egyike leszálló, másika fölszálló, akkor*

$$\mathsf{P}(X \in \mathcal{A}, X \in \mathcal{B}) \leq \mathsf{P}(X \in \mathcal{A}) \mathsf{P}(X \in \mathcal{B}).$$

## 8.2 Az FKG Egyenlőtlenség

8.7 TÉTEL. (FORTUIN–KASTELEYN–GINIBRE) *Legyen $L$ véges disztributív háló, és $\mu : L \to \mathbb{R}_+$ olyan függvény, melyre*

$$\mu(x)\mu(y) \leq \mu(x \vee y)\mu(x \wedge y)$$

*teljesül bármely két $x, z \in L$ elemre (logszubmoduláris függvény). Ekkor bármely két monoton növekvő $f, g : L \to \mathbb{R}_+$ függvényre*

$$\left( \sum_{x \in L} \mu(x) f(x) \right) \left( \sum_{x \in L} \mu(x) g(x) \right) \leq \left( \sum_{x \in L} \mu(x) f(x) g(x) \right) \left( \sum_{x \in L} \mu(x) \right).$$

Másszóval,

8.8 KÖVETKEZMÉNY. *Legyen $L$ véges disztributív háló, és $\mu : L \to \mathbb{R}_+$ olyan valószínűségeloszlás $L$-en, melyre*

$$\mu(x)\mu(y) \leq \mu(x \vee y)\mu(x \wedge y)$$

*teljesül bármely két $x, z \in L$ elemre. Legyen $X$ véletlen pont a $\mu$ eloszlásból. Ekkor bármely két monoton növekvő $f, g : L \to \mathbb{R}_+$ függvényre*

$$\mathsf{E}(f(X))\mathsf{E}(g(X)) \leq \mathsf{E}(f(x)g(x)).$$

8.9 Példa. Legyen $G$ egy $n \times n$-es négyzetrács. Töröljük el minden élét $1/2$ valószínűséggel, egymástól függetlenül. Legyen $A$ az az esemény, hogy a bal aló sarokból a jobb felső sarokba vezet út a maradék gráfban. Legyen $B$ ugyanez az esemény a másik két sarok között. Ekkor $A$ és $B$ positívan korreláltak az FKG egyenlőtlenség szerint: $\mathsf{P}(A \wedge B) \geq \mathsf{P}(a)\mathsf{P}(B)$.

### 8.3 *Parciális rendezések lineáris kiterjesztései

Legyen $(P, \leq)$ egy véges parciálisan rendezett halmaz, és legyen $\mathcal{L}$ a lineáris kiterjesztéseinek halmaza. $\mathcal{L}$ elemeit úgy is tekintjük, mint monoton bijektív $P \to \{1, \ldots, |P|\}$ leképezéseket. Legyen $\preceq$ egy véletlen lináris kiterjesztés.

8.10 Tétel. *Bármely három $a, b, c \in P$ elemre*

$$\mathsf{P}(a \preceq b, a \preceq c) \geq \mathsf{P}(a \preceq b)\mathsf{P}(a \preceq c).$$

## 9 Közelítő leszámlálás I: Elágazó leszámlálás

Legyen $F$ $k$ szintű gyökeres fa, melynek minden levele az alsó szinten van. Legyen $N$ levele. Meg akarjuk becsülni $N$-t úgy, hogy a fát véletlen módszerrel lokálisan vizsgáljuk.

9.1 Példa. Legyen $G$ olyan gráf, melyben minden pont foka legfeljebb $D$, és legyen $k > D$. Ekkor Brooks tétele szerint $G$ kiszínezhető $k$ szinnel, de hányféleképpen? Nzilvánvaló, hogy színezések száma $(k-D)^n$ és $k^n$ között van. Legyen $p(G, k)$ a $G$ gráf $k$ színnel való színezéseinek száma ($k \in \mathbb{Z}_+$). Ennek pontos kiszámítása NP-nehéz.

Ezt a problémát a következőképpen írhatjuk le fával. Sorbarendezzük a csúcsokat. Kiindulunk az üres szinezésből, ez a gyökér. Ezt $k$-féleképpen terjeszthetjük ki az első csúcsra, tehát $k$ felé ágazunk. Általában az $r$-edik szint csúcsai a fában az első $r$ csúcs összes legális szinezésének felelnek meg, egy csúcs utódai pedig a szinezés kiterjesztései. A levelek a $|V(G)|$-edik szinten vannak, és számuk a szinezések száma.

Minden $u$ levélhez legyen $P_u$ a gyökérből $u$-ba vezető út. Legyen $X$ olyan véletlen levél, melyet úgy kapunk, hogy a gyökérből kiindulva minden pontban a lefelé menő élekből egyet egyenletes eloszlás szerint választunk, és azon lépünk lefelé („naív véletlen pont”). Legyen $Y$ egyenletesen választott véletlen pont.

Minden gyökértől levélig vezető $P$ útra legyen $d(P)$ a le-fokok szorzata (a levelet kivéve). Ekkor

$$\mathsf{P}(X = u) = \frac{1}{d(P_u)}.$$

Innen következik, hogy

$$\sum_u \frac{1}{d(P_u)} = 1$$

és

$$\mathsf{E}(d(P_X)) = N.$$

A $d(P_X)$ valószínűségi változó szórása igen nagy lehet, ezért használhatóbbak az alábbi becslések:

9.2 Lemma.

$$\mathsf{E}(\log d(P_X)) \le \log N \le \mathsf{E}(\log d(P_Y)).$$

**Bizonyítás.** Mivel $\log x$ konkáv, a Jensen egyenlőtlenség szerint

$$\mathsf{E}(\log d(P_Y)) = -\frac{1}{N}\sum_u \log\frac{1}{d(P_u)} \ge -\frac{1}{N}\cdot N\cdot\log\frac{1}{N} = \log N.$$

Másrészt $x\log x$ konvex, így

$$\mathsf{E}(\log d(P_X)) = -\sum_u \frac{1}{d(P_u)}\log\frac{1}{d(P_u)} \le N\big(-\frac{1}{N}\log\frac{1}{N}\big) = \log N.$$

Megjegyzés: $\mathsf{E}(\log d(P_X))$ éppen az $X$ entrópiája. □

## 9.1 Brégman tétele

9.3 Tétel. (Brégman) *Legyenek $d_1,\dots,d_n$ egy egyszerű páros $G$ gráf „alsó” pontosztályának fokszámai. Ekkor $G$ teljes párosításainak száma legfeljebb*

$$(d_1!)^{1/d_1}\dots(d_n!)^{1/d_n}.$$

9.4 Megjegyzés. (a) Ha minden fok nagy, akkor ez jól közelíthető azzal, hogy $d_1\dots d_n/e^n$. Ha a gráf $d$-reguláris, akkor ez $(d/e)^n$.

(b) Ha a gráf nem egyszerű, akkor csak a triviális $d_1\dots d_n$ felső korlát mondható.

(c) V.ö. a Falikman–Jegoricsev tétellel: Ha egy gráf $d$-reguláris, akkor a teljes párosítások száma legalább $d^n n!/n^n \approx (d/e)^n$. Ennek Schrijver-tól származó élesítése: a teljes párosítások száma legalább

$$\left(\frac{(d-1)^{d-1}}{d^{d-2}}\right)^n.$$

**Bizonyítás.** A 9.2 Lemma alkalmazásához vesszük az „alsó” pontok egy véletlen $\pi = (v_1,\dots,v_n)$ permutációját, és megkonstruáljuk a következő $F_\pi$ fát: csúcsai azok a részleges párosítások, melyek kiterjeszthetők teljes párosítássá, és melyek $v_1,\dots v_k$-t párosítják valamely $k$-ra; a szülőt pedig az utolsó párosítás-él elhagyásával kapjuk.

Minden $M$ teljes párosítára, $W$ minden $\pi$ permutációjára, és minden $w\in W$ pontra jelölje $F(M,\pi,w)$ az $M$ azon éleinek halmazát, melyekre $w$-t megelőző pontból indulnak ki, és legyen

$a(M,\pi,w)$ a $w$ csúcs azon szomszédainak száma, melyek párja $w$-t nem előzi meg a permutációban.

Fontos észrevétel: az $F(M,\pi,w)$ részleges párosítás foka az $F_\pi$ fában legfeljebb $a(M,\pi,w)$. Ezért bármely $M$ teljes párosításra

$$\log d(P_M) = \sum_{w\in W} \log d_{F_\pi}(F(M,\pi,w) \le \sum_{w\in W} \log a(M,\pi,w).$$

Legyen $Y$ egy egyenletes eloszlás szerint választott teljes párosítás. Ekkor

$$\log N \le \mathsf{E}_Y(\log d(P_Y)) \le \sum_{w\in W} \mathsf{E}_Y(\log a(F(Y,\pi,w)).$$

Vegyük a várható értéket minden $\pi$ permutációra, akkor

$$\log N \le \sum_{w\in W} \mathsf{E}_Y \mathsf{E}_\pi(\log a(F(Y,\pi,w)).$$

De egy véletlen $\pi$ permutációban $w$ szomszédaival párosított pontok közül a $w$ egyforma valószínűséggel lesz első, második, ..., $d(w)$-edik, így

$$\mathsf{E}_\pi(\log a(F(Y,\pi,w)) = \frac{1}{d(w)} \sum_{j=1}^{d(w)} \log j = \frac{1}{d(w)} \log(d(w)!),$$

és így

$$\log N \le \sum_{w\in W} \mathsf{E}_Y\Big(\frac{1}{d(w)}\log(d(w)!)\Big) = \sum_{w\in W} \frac{1}{d(w)}\log(d(w)!).$$

Ezzel Brégman tételét bebizonyítottuk. □

# 10 Közelítő leszámlálás II: a Markov lánc módszer

## 10.1 Közelítő leszámlálás és mintavétel ekvivalenciája

10.1 Példa. (Szinezések száma) Tekintsük egy $G$ gráf $k$ színnel veló szinezéseinek $p(G,k)$ számát. Ha egy élt elhagyva a maradék gráfhoz tudunk egy véletlen $k$-színezést generálni (közelítőleg) egyenletes eloszlás szerint, akkor ebből meg tudjuk mondani, hogy a színezések hányad része színezi egyformán az elhagyott él végpontjait, vagyis, hogy az élt elhagyva milyen tényezővel nő a $k$-színezések száma. Így rekurzíve meg tudjuk becsülni a $k$-színezések számát.

10.2 Példa. (Teljes párosítások száma) Legyen $\Phi(G)$ a $G$ gráf teljes párosításainak száma. Ennek pontos kiszámítása NP-nehéz (sőt #P-teljes). Ha tudunk egy véletlen teljes párosítást generálni, (közelítőleg) egyenletes eloszlásból, akkor ebből meg tudjuk mondani, hogy a pársítások hányad része tartalmaz egy adott élt, vagyis, hogy az élt elhagyva, milyen tényezővel csökken a teljes párosítások száma. Igy rekurzíve meg tudjuk becsülni a teljes párosítások számát.

10.3 PÉLDA. (LINEÁRIS KITERJESZTÉSEK SZÁMA) Legyen $P = (V, \leq)$ egy parciálisan rendezett véges halmaz, és legyen $\eta(P)$ a $P$ parciális rendezés teljes rendeyéssé való kiterjesztéseinek száma. Ennek pontos kiszámítása megint csak NP-nehéz. Ha tudunk egy véletlen kiterjesztést generálni (közelítőleg) egyenletes eloszlás szerint, akkor ebből meg tudjuk mondani, hogy a kiterjesztések hányad része rendez egy eredetileg nem összehasonlítható $x, y \in V$ párt egyik vagy másik sorrendben, vagyis, hogy mondjuk az $x < y$ relációt (és ennek minden következményét) a rendezéshez hozzávéve, milyen tényezővel csökken a kiterjesztések száma. Igy rekurzíve meg tudjuk becsülni a kiterjesztések számát.

*Mintavétel probléma*: Adott egy $S$ halmaz, válasszuk ki egyenletes eloszlás szerint egy elemét. Általánosabban, lehet az egyenletes helyett más eloszlást tekinteni. Az érdekes esetekben az $S$ halmaz exponenciálisan nagy a leírásához szükséges adatok számához képest, és bonyolult szerkezetű (pl. lehet egy NP-beli feladat tanúinak halmaza).

## 10.2 Markov-láncok és bolyongás gráfokon

Olyan véges Markov láncot vizsgálunk egy $V$ alaphalmazon, mely irreducibilis, vagyis minden $\emptyset \neq S \subset V$ halmazból vezet ki lépés. irányítatlan gráfon való bolyongás esetén ez azt jelenti, hogy a gráf összefüggő.

Átmeneti mátrix: $M = (p_{ij})$. Irányítatlan gráfon való bolyongás esetén $p_{ij} = 1/d_i$. $D$-edfokú reguláris irányítatlan $H$ gráfon való bolyongás esetén $M_{ij} = a_{ij}/D$, ahol $A = (a_{ij}$ a $H$ gráf adjacencia mátrixa. Ha $(v^0, v^1, \dots)$ egy bolyongás, akkor

$$\mathsf{P}(v_{t+1} = j \mid v_t = i) = \mathsf{P}(v_{t+1} = j \mid v_t = i, v_{t-1}, \dots) = M_{ij}.$$

Nyilván $M\mathbf{1} = \mathbf{1}$, tehát $\mathbf{1}$ $M$-nek jobboldali sajátvektora, a hozzátartozó sajátérték 1. Az 1-hez tartozó másik sajátvektor a *stacionárius eloszlás*: $M^{\mathsf{T}}\pi = \pi$. A Peron-Frobenius tétel szerint $\pi > 0$. Bolyongás esetén $\pi_i = \frac{d_i}{2m}$. Legyen $\pi_0 = \min\{\pi_i : i \in V\}$.

Egy Markov lánc *reverzibilis*, ha $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$ minden $i, j$ csúcspárra. Irányítatlan gráfon való bolyongás reverzibilis. Reverzibilis Markov lánc esetén $M$ sajátértékei valósak: $1 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Szimmetrizált átmeneti mátrix: $N = D^{1/2} M D^{-1/2}$, ahol $D = \mathrm{diag}(\pi_i)$.

*Lusta bolyongás*: $p_{ii} \geq 1/2$.

10.4 ÁLLÍTÁS. *Ha $H$ páros gráf, akkor $\lambda_n = -1$. Ha $H$ nem páros gráf, akkor $\lambda_n > -1$.*

Jelölés: $\mu = \max(|\lambda_2|, |\lambda_n|)$.

Legyen $(v^0, v^1, \dots, v^t, \dots)$ egy bolyongás, és legyen $v^t$ eloszlása $\sigma^t$.

A bolyongással kapcsolatos sok kérdés közül csak a keveréssel (azaz a $\sigma^t \to \pi$ konvergenciasebességgel) foglalkozunk. Ennek becslésére több módszer is ismert.

## 10.3 Sajátérték-hézag

10.5 LEMMA. *Bármely $i$ csúcsból indulva, bármely $S \subseteq V$ halmazra*

$$|\mathsf{P}(v^t \in S) - \pi(S)| \le \sqrt{\frac{\pi(S)}{\pi_i}}\mu^t.$$

10.6 KÖVETKEZMÉNY. *Ha egy gráf összefüggő és nem páros, akkor $\sigma^t \to \pi$.*

10.7 KÖVETKEZMÉNY. *Ha $G$ $n$ csúcsú, nem páros, összefüggő gráf, és $t \ge \ln n/((1-\mu)\varepsilon)$, akkor minden $S \subseteq V$ halmazra*

$$\left|\mathsf{P}(v^t \in S \mid v^0 = i) - \pi(S)\right| \le \varepsilon.$$

**Bizonyítás.** Legyen $\{v_1, \dots, v_p\}$ egy $M$ sajátvektoraiból álló ortonormált bázis, $Mv_i = \lambda_i$. Ekkor

$$M = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k v_k v_k^{\mathsf{T}},$$

és így

$$|\mathsf{P}(v^t = j \mid v^0 = i) = e_i^{\mathsf{T}} M^k e_j = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^t (v_k^{\mathsf{T}} e_i)(v_k^{\mathsf{T}} e_j).$$

Mivel $v_1 = (1/\sqrt{p})\mathbf{1}$, itt a $k = 1$-nek megfelelő tag

$$\lambda_1^t (v_1^{\mathsf{T}} e_i)(v_1^{\mathsf{T}} e_j) = \frac{1}{p}.$$

A többi tag így becsülhető:

$$\left|\sum_{k=2}^{p} \lambda_k^t v_k v_k^{\mathsf{T}}\right| \le \mu^t \sum_{k=2}^{p} |v_k^{\mathsf{T}} e_i| \cdot |v_k^{\mathsf{T}} e_j|.$$

A második tényező pedig a Cauchy–Schwarz egyenlőtlenség felhasználásával:

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{p} |v_k^{\mathsf{T}} e_i| \cdot |v_k^{\mathsf{T}} e_j| &\le \left(\sum_{k=2}^{p} (v_k^{\mathsf{T}} e_i)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=2}^{p} (v_k^{\mathsf{T}} e_j)^2\right)^{1/2} \\ &\le \left(\sum_{k=1}^{p} (v_k^{\mathsf{T}} e_i)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{p} (v_k^{\mathsf{T}} e_j)^2\right)^{1/2} = |e_i| \cdot |e_j| = 1.\end{aligned}$$

□

10.8 MEGJEGYZÉS. Bármely bolyongást csinálhatunk lustán: minden lépésben 1/2 valószínűséggel helyben maradunk. Lusta bolyongásra $M$ pozitív szemidefinit, tehát csak $\lambda_2$-t kell figyelembe venni.

Alkalmazás: Legyen $(v^0, v^1, \dots)$ lusta bolyongás a $d$-dimenziós $Q^d$ kocka élhálóján.

10.9 ÁLLÍTÁS. *A $Q^d$ kockán bolyongva $t = Cd^2$ lépés után bármely $S \subseteq V(Q^d)$ halmazra*

$$\left|\mathsf{P}(v^t \in S) - \frac{|S|}{2^d}\right| \le \frac{1}{C}.$$

## 10.4 Csatolás

Sajnos sok esetben a sajátértékeket nem tudjuk kiszámítani. Ezért más módszerrel becsüljük meg a keverési időt.

10.10 Lemma. *Legyen* $(v^0, v^1, \dots)$ *és* $(u^0, u^1, \dots)$ *két (nem független!) bolyongás ugyanazon a gráfon (Markov-láncon), ahol* $u_0$ *véletlen csúcs a stacionárius eloszlásból. Ekkor bármely* $S \subseteq V$ *halmazra*

$$|\sigma^t(S) - \pi(S)| \leq \mathsf{P}(v^t \neq u^t).$$

**Bizonyítás.** Ha $u^0$ egyenletes, akkor $u^t$ is egyenletes eloszlású minden $t$-re. Ezért

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(v^t \in S) - \pi(S) &= \mathsf{P}(v^t \in S) - \mathsf{P}(u^t \in S) \\
&= \mathsf{P}(v^t \in S \mid u^t = v^t)\mathsf{P}(u^t = v^t) + \mathsf{P}(v^t \in S \mid u^t \neq v^t)\mathsf{P}(u^t \neq v^t) \\
&\quad - \mathsf{P}(u^t \in S \mid u^t = v^t)\mathsf{P}(u^t = v^t) - \mathsf{P}(u^t \in S \mid u^t \neq v^t)\mathsf{P}(u^t \neq v^t) \\
&= (\mathsf{P}(v^t \in S \mid u^t \neq v^t) - \mathsf{P}(u^t \in S \mid u^t \neq v^t))\mathsf{P}(u^t \neq v^t).
\end{aligned}$$

Innen a lemma következik. □

### 10.4.1 Bolyongás a kockán és csatolás

A csatolási lemma első alkalmazásaként jobb becslést adunk a $Q^d$ kocka élhálóján való bolyongás keverési idejére.

10.11 Állítás. *A* $Q^d$ *kockán bolyongva* $t = Cd^2$ *lépés után bármely* $S \subseteq V(Q^d)$ *halmazra*

$$\left|\mathsf{P}(v^t \in S) - \frac{|S|}{2^d}\right| \leq \frac{1}{C}.$$

10.12 Lemma. (Kupongyűjtés) *Legyen* $S$ $n$ *elemű halmaz, és legyenek* $X_1, X_2, \dots \in S$ *véletlenszerűen, függetlenül választott elemek egyenletes eloszlás szerint. Legyen* $T = \min\{t : \{X_1, \dots, X_t\} = S\}$*. Ekkor*

$$\mathsf{E}(T) = n\Big(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\Big) \approx n \ln n.$$

### 10.4.2 Szinezések és csatolás

Egy $n$ csúcsú $G$ gráf $k$-színezései közül akarunk egyet véletlenszerűen kiválasztani. Legyen a gráf maximális fokszáma $D$. Adott $\alpha$ színezéshez generálunk véletlenszerűen egy $\alpha'$ színezést a következőképpen. Egyenletes eloszlás szerint kiválasztunk egy $v$ csúcsot és egy $i$ színt; ezt az $(v, i)$ párt a lépés *magjának* nevezzük. Definiáljunk egy új szinezést:

$$\alpha_0(u) = \begin{cases} i & \text{ha } u = v, \\ \alpha(u) & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ha ez legális színezés, akkor legyen $\alpha' = \alpha_0$; ellenkező esetben legyen $\alpha' = \alpha$. Így egy reverzibilis Markov láncot (irányítatlan gráfon való bolyongást) kapunk. Vegyük észre, hogy a gráf $D = kn$ fokú reguláris.

Ezt a Markov láncot "hőfürdő-láncnak" vagy "Glauber dinamikának" nevezik, fizikai alkalmazásaira visszevezethetően.

A lánc keverési sebességét csatolás segítségével elemezzük. Két adott $\alpha^0$ és $\beta^0$ színezésből kiindulva, konstruáljuk meg az $\alpha^0, \alpha^1, \dots$ és $\beta^0, \beta^1, \dots$ bolyongásokat úgy, hogy minden lépésben ugyanazt a véletlen magot használjuk. Ezt a csatolást *egyszerű csatolásnak* nevezzük.

10.13 Tétel. (Jerrum) *Ha $k > 3D$, akkor két egyszerűen csatolt $\alpha^0, \alpha^1, \dots$ és $\beta^0, \beta^1, \dots$ színezés-sorozatra*

$$\mathsf{P}(\alpha^t \neq \beta^t) \leq ne^{-t/(kn)}.$$

**Bizonyítás.** Legyen $U^t = \{v \in V : \alpha^t(v) \neq \beta^t(v)\}$, $W^t = V \setminus U^t$ és $X^t = |U^t|$. Minden $v \in V$-re jelölje $a_v$ a $v$-ből az $\{U^t, W^t\}$ partíció másik oldalára menő élek számát. Azt állítjuk, hogy

$$\mathsf{E}(X^{t+1} \mid X^t) \leq \Big(1 - \frac{1}{kn}\Big) X^t. \tag{20}$$

Valóban, legyen $(v, i)$ a $t$-edik lépés magja, és rögzítsük $v$-t. Ha $v \in U^t$, akkor $X^t - 1 \leq X^{t+1} \leq X^t$, és nyerünk, ha $i$ olyan szín, mely nem fordul elő $v$ szomszédai között sem az $\alpha^t$, sem a $\beta^t$ szinezésben. Mivel legalább $a_v$ szín közös, ennek valószínűsége

$$\mathsf{P}(X^{t+1} = X^t - 1 \mid v) \geq \frac{k - 2d_v + a_v}{k}. \tag{21}$$

Ha $i \in W^t$, akkor $X^t \leq X^{t+1} \leq X^t + 1$, és csak akkor vesztünk, ha $i$ a $v$ szomszédságában az egyik szinezésben előfordul, a másikban nem. Ilyen szín legfeljebb $2a_v$ lehet, ezért

$$\mathsf{P}(X^{t+1} = X^t + 1 \mid v) \leq \frac{2a_v}{k}. \tag{22}$$

Így

$$\mathsf{E}(X^{t+1} \mid X^t) \leq X^t - \sum_{i \in U^t} \frac{k - 2d_i + a_i}{kn} + \sum_{i \in W^t} \frac{2a_i}{kn}.$$

Felhasználva, hogy

$$\sum_{i \in U^t} a_i = \sum_{i \in W^t} a_i,$$

azt kapjuk, hogy

$$\mathsf{E}(X^{t+1} \mid X^t) \leq X^t - \sum_{i \in U^t} \frac{k - 2d_i - a_i}{kn} \leq X^t - \sum_{i \in U^t} \frac{k - 3d_i}{kn}.$$

Ha $U^t$ nem üres, akkor a kivont összeg legalább $X^t/(kn)$, és igy (20) következik.

A (20) egyenletből

$$\mathsf{E}(X^t) \le \Big(1 - \frac{1}{kn}\Big)^t n,$$

és innen a Markov egyenlőtlenség szerint

$$\mathsf{P}(\alpha^s \ne \beta^s) = \mathsf{P}(X^t \ge 1) \le \Big(1 - \frac{1}{kn}\Big)^t n < e^{-t/(kn)} n.$$

□

A Csatolási Lemma szerint ebből következik, hogy

$$d_{\mathrm{var}}(\alpha^t, \pi) < e^{-t/(kn)} n,$$

ahol $\pi$ az egyenletes eloszlás a $G$ gráf jó szinzésein. Ha $t = Ckn \log n$, akkor $d_{\mathrm{var}}(\alpha^t, \pi) < 1/C$.

*Ferde csatolásnak* nevezzük a következőt. Az $\alpha^t$ és $\beta^t$ színezésekhez generálunk egy véletlen $(v, i)$ magot, ezt használjuk az $\alpha^{t+1}$ előállítására, A $\beta^{t+1}$ szinezés előállítására azonban egy módosított $(v, j)$ magot használunk. Látjuk, hogy a $v$ csúcs közös a két magban, tekintsük ezt már meghatározottnak. Ha $\alpha^t(v) \ne \beta^t(v)$, akkor $j = i$. Ha $\alpha^t(v) = \beta^t(v)$, akkor legyen $S = \alpha^t(N(v)) \setminus \beta^t(N(v))$ és $R = \beta^t(N(v)) \setminus \alpha^t(N(v))$. Legyen $S' \subseteq S$ és $R' \subseteq R$ két olyan halmaz, $|S'| = |R'| = \min\{|S|, |T|\}$. Legyen $\phi :\ S' \to R'$ tetszőleges bijekció. Ha $i \in S'$, akkor legyen $j = \phi(i)$; ha $i \in R'$, akkor legyen $j = \phi^{-1}(i)$; minden egyéb esetben legyen $j = i$.

10.14 Tétel. (Jerrum) *Ha $D > 2k$, akkor két ferdén csatolt $\alpha^0, \alpha^1, \ldots$ és $\beta^0, \beta^1, \ldots$ színezés-sorozatra*

$$\mathsf{P}(\alpha^s \ne \beta^s) \le n e^{-s/(kn)}.$$

A bizonyítás lényege, hogy (21) továbbra is igaz, míg (22) helyett az élesebb

$$\mathsf{P}(X^{t+1} = X^t + 1 \mid v) \le \frac{a_v}{k}$$

egyenlőtlenség áll. Ebből következik, hogy (20) most is igaz, és a bizonyítás ugyanúgy fejezhető be.

## 10.5 Konduktancia

Egy $\emptyset \subset S \subset V$ halmaz *konduktanciája*

$$\Phi(S) = \frac{\sum_{i \in S, j \notin S} \pi_i p_{ij}}{\pi(S)\pi(V \setminus S)}.$$

A Markov-lánc konduktanciája $\Phi = \min_{\emptyset \subset S \subset V} \Phi(S)$.

10.15 Tétel. (Jerrum–Sinclair)

$$\frac{\Phi^2}{16} \le 1 - \lambda_2 \le \Phi.$$

10.16 Következmény. *Lusta bolyongásra*

$$|\mathsf{P}(v^t \in S) - \pi(S)| \le \frac{1}{\sqrt{\pi_0}} e^{-t\Phi^2/8}.$$

A tétel bizonyításához két lemmára lesz szükségünk.

10.17 Lemma. *Bármely reverzibilis Markov-láncra*

$$1 - \lambda_2 = \min\Big\{\frac{1}{2}\sum_{i,j} \pi_i p_{ij}(x_i - x_j)^2 : \ x \in \mathbb{R}^V, \ \sum_i \pi_i x_i = 0, \ \sum_i \pi_i x_i^2 = 1\Big\}.$$

Az 1/2-et a jobb oldalon az magyarázza, hogy minden tag kétszer szerepel, hiszen $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$.

**Bizonyítás.** A szimmetrizált $N = D^{1/2} M D^{-1/2}$ mátrix sajátértékei megegyeznek $M$ sajátértékeivel. Simmetrikus mátrix esetén, a második legnagyobb sajátérték kifejezhető, mint

$$\lambda_2 = \max y^{\mathsf{T}} N y,$$

ahol $y$ az összes olyan egységvektorn fut végig, amely merőleges a legnagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektorra. Ez az utóbbi sajátvektort a $v_i = \sqrt{\pi_i}$ formula adja meg, vagyis $y$-ra annak kell fennállni, hogy

$$\sum_{i \in V} \sqrt{\pi_i} y_i = 0, \qquad \sum_{i \in V} y_i^2 = 1.$$

Legyen $x_i = y_i / \sqrt{\pi_i}$, akkor $x$-re éppen a lemma feltételei fognak fennállni, és

$$\begin{aligned} 1 - y^{\mathsf{T}} N y &= \sum_i \pi_i x_i^2 - \sum_{i,j} (\sqrt{\pi_i} x_i)\Big(\frac{\sqrt{\pi_i} p_{ij}}{\sqrt{\pi_j}}\Big)(\sqrt{\pi_j} x_j) \\ &= \sum_{i,j} \pi_i p_{ij} x_i^2 - \sum_{i,j} \pi_i p_{ij} x_i x_j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \pi_i p_{ij} (x_i - x_j)^2. \end{aligned}$$

□

10.18 Lemma. *Legyen $y \in \mathbb{R}^V$ olyan vektor, melyre $\pi\{i : \ y_i < 0\} < 1/2$ és $\pi\{i : \ y_i > 0\} \le 1/2$. Ekkor*

$$\sum_{i,j} \pi_i p_{ij} |y_i - y_j| \ge \Phi \sum_i \pi_i |y_i|.$$

**Bizonyítás.** Címkézzük a csúcsokat úgy, hogy $y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_n$ teljesüljön. Legyen $m$ a legnagyobb olyan index, hogy $\pi(< m) < 1/2$. Ekkor $\pi(\ge m) > 1/2$ és $\pi(\le m) \ge 1/2$. A feltevésből következik, hogy nem lehet minden $y_i$, $i \le m$ negatív, és nem lehet minden $y_i$, $i \ge m$ pozitív. Ezért $y_m = 0$.

Felírhatjuk, hogy

$$y_j - y_i = (y_j - y_{j-1}) + \cdots + (y_{i+1} - y_i),$$

és így

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j} \pi_i p_{ij}|y_i - y_j| = \sum_{i<j} \pi_i p_{ij}(y_j - y_i) = \sum_{k=1}^{n-1}(y_{k+1} - y_k) \sum_{i\le k, j>k} \pi_i p_{ij}.$$

A konduktancia definíciója szerint ebből következik, hogy

$$\sum_{i<j} \pi_i p_{ij}|y_i - y_j| \ge \Phi \sum_{k=1}^{n-1} \pi(\le k)\pi(> k)(y_{k+1} - y_k).$$

Bontsuk fel az összeget:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} \pi(\le k)\pi(> k)(y_{k+1} - y_k) &\ge \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1} \pi(\le k)(y_{k+1} - y_k) + \frac{1}{2}\sum_{k=m}^{n-1} \pi(> k)(y_{k+1} - y_k) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\big(\pi(\le k-1) - \pi(\le k)\big)y_k + \frac{1}{2}\sum_{k=m+1}^{n}\big(\pi(> k-1) - \pi(> k)\big)y_k \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{l}(-\pi_k)y_k + \frac{1}{2}\sum_{k=l+1}^{n}\pi_k y_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\pi_k|y_k|
\end{aligned}$$

(kihasználtuk, hogy $y_m = 0$, és azt is, hogy $y_k \le 0$ ha $k \le m$ és $y_k \ge 0$ ha $k \ge m$). Így

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j} \pi_i p_{ij}|y_i - y_j| \ge \frac{\Phi}{2}\sum_{k=1}^{n}\pi_k|y_k|,$$

proving the lemma. □

**A 10.15 Tétel bizonyítása.** A felső korlát egyszerű. Legyen $\emptyset \ne S \subset V$ olyan halmaz, mely $\Phi(S) = \Phi$. Legyen $x$ a csúcsokkal indexelt vektor, melyre

$$x_i = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi(V\setminus S)}{\pi(S)}} & \text{ha } i \in S, \\ -\sqrt{\frac{\pi(S)}{\pi(V\setminus S)}} & \text{ha } i \in V \setminus S. \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy

$$\sum_{i\in V} \pi_i x_i = 0, \qquad \sum_{i\in V} \pi_i x_i^2 = 1.$$

Így a 10.17 Lemma szerint

$$\begin{aligned}
1 - \lambda_2 &\ge \frac{1}{2}\sum_{i,j} \pi_i p_{ij}(x_i - x_j)^2 = \sum_{i\in S, j\in V\setminus S} \pi_i p_{ij}\left(\sqrt{\frac{\pi(V\setminus S)}{\pi(S)}} + \sqrt{\frac{\pi(S)}{\pi(V\setminus S)}}\right)^2 \\
&= \sum_{i\in S, j\in V\setminus S} \pi_i p_{ij}\frac{1}{\pi(S)\pi(V\setminus S)} = \Phi.
\end{aligned}$$

Az alsó korlát bizonyításához legyen $x \in \mathbb{R}^V$ olyan vektor, melyre $\sum_i \pi_i x_i = 0$, $\sum_i \pi_i x_i^2 = 1$, és

$$1 - \lambda_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \pi_i p_{ij} (x_i - x_j)^2.$$

Legyen $m$ olyan index, melyre $\pi\{i : \ x_i < x_m\} \leq 1/2$ és $\pi\{i : \ x_i > x_m\} \geq 1/2$. Legyen $z_i = \big(\max\{0, x_i - x_m\}\big)$. Feltehetjük, hogy

$$\sum_i \pi_i z_i^2 \geq \frac{1}{2} \sum_i \pi_i (x_i - x_m)^2$$

(ellenkező esetben $x$-et $-x$-szel helyettesítjük), és így

$$\sum_i \pi_i z_i^2 \geq \frac{1}{2} \sum_i \pi_i (x_i - x_m)^2 = \frac{1}{2} \sum_i \pi_i x_i^2 - x_m \sum_i \pi_i x_i + \frac{1}{2} x_m^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} x_m^2 \geq \frac{1}{2}.$$

A 10.18 Lemma szerint

$$\sum_{i,j} \pi_i p_{ij} |z_i^2 - z_j^2| \geq \Phi \sum_i \pi_i z_i^2.$$

Másrészt a Cauchy-Schwartz egyenlőtlenséget használva,

$$\sum_{i,j} \pi_i p_{ij} |z_i^2 - z_j^2| \leq \left( \sum_{i,j} \pi_i p_{ij} (z_i - z_j)^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i,j} \pi_i p_{ij} (z_i + z_j)^2 \right)^{1/2}.$$

Itt a második tényező így becsülhető:

$$\sum_{i,j} \pi_i p_{ij} (z_i + z_j)^2 \leq 2 \sum_{i,j} \pi_i p_{ij} (z_i^2 + z_j^2) = 4 \sum_i \pi_i z_i^2.$$

Ezeket kombinálva, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} \pi_i p_{ij} (z_i - z_j)^2 &\geq \left( \sum_{i,j} \pi_i p_{ij} |z_i^2 - z_j^2| \right)^2 \Big/ \sum_{i,j} \pi_i p_{ij} (z_i + z_j)^2 \\
&\geq \Phi^2 \left( \sum_i \pi_i z_i^2 \right)^2 \Big/ 4 \sum_i \pi_i z_i^2 = \frac{\Phi^2}{4} \sum_i \pi_i z_i^2 \geq \frac{\Phi^2}{8}.
\end{aligned}$$

Így

$$1 - \lambda_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \pi_i p_{ij} (x_i - x_j)^2 \geq \frac{1}{2} \sum_{i,j} \pi_i p_{ij} (z_i - z_j)^2 \geq \frac{\Phi^2}{16}.$$

Ezzel a 10.15 Tételt bebizonyítottuk.

### 10.5.1 *Konduktancia és folyamok

A konduktancia becslése leggyakrabban egy többtermékes folyam konstruálásával történik. Legyen $G = (V, E)$ egy irányítatlan gráf, és $i, j \in V$. Legyen $\overrightarrow{E}$ a lehetséges irányított élek halmaza (tehát minden $e \in E$ él két elemnek felel meg $\overrightarrow{E}$-ban). *i-j-folyamnak* nevezünk egy olyan $f : \overrightarrow{E} \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre $f(uv) = -f(vu)$ és minden $u \in V \setminus \{i, j\}$ csúcsra $\sum_{v:\, uv \in \overrightarrow{E}} f(uv) = 0$. Az $f$ folyam *értéke*

$$\mathrm{val}(f) = \Big| \sum_{v:\, iv \in \overrightarrow{E}} f(iv) \Big|.$$

*Többtermékes folyamnak* nevezzük folyamok egy $F = (f_{ij} : i, j \in V)$ rendszerét, ahol $f_{ij}$ egy $i$-$j$-folyam. Az $F$ többtermékes folyam *terhelése* az $uv$ élen

$$F(uv) = \sum_{i,j} |f_{ij}(uv)|.$$

Többtermékes folyamok segítségével alsó becslést adhatunk egy gráf konduktanciájára:

10.19 Lemma. *Jelölje $K$ azt a legkisebb nemnegatív számot, melyre létezik olyan $F = (f_{ij})$ többtermékes folyam, hogy minden $i, j$ párra*

$$\mathrm{val}(f_{ij}) = \pi_i \pi_j,$$

*és minden $uv$ élre*

$$F(uv) \le K \pi_i p_{ij}.$$

*Ekkor*

$$\Phi \ge \frac{1}{K}.$$

10.20 Megjegyzés. Leighton és Rao egy nevezetes tétele szerint az ellenkező irányban fennáll:

$$\Phi \le \mathrm{const} \frac{\ln n}{K}.$$

#### 10.5.2 *Teljes párosítások száma

Véletlen teljes párosítás generálására, legalábbis olyan gráfokban, melyek elég sűrüek (minden pont foka legalább $c|V(H)|$ valamilyen fix $c > 0$-ra), Jerrum és Sinclair adtak módszert.

### 10.6 *Megállási szabályok

# 11 *Véletlen gráfok növekedése

## 11.1 Elágazó folyamatok

Legyen $(p_0, p_1, \dots)$ valószínűségeloszlás a természetes számokon. Ez definiál egy véletlen gyökeres fát a következőképpen. A fának vannak élő és holt csúcsai. Induláskor egyetlen élő csúcsa van. Minden lépésben egy (mondjuk véletlenszerűen választott) élő csúcsa $Z$ (élő) utódot hoz létre és meghal, ahol $Z$ a $(p_0, p_1, \dots)$ eloszlásból választott szám. A folyamat megáll, ha nincs élő csúcs. Jelölje $T$ a megállás idejét. Ha a folyamat nem áll meg, akkor $T = \infty$.

Legyen $q_j = \mathsf{P}(T = j)$ és $q(z) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j z^j$. Legyen $p(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i$. Legyen $c = \mathsf{E}(Z) = p'(1)$.

11.1 LEMMA. (a) *Minden* $|z| \le 1$ *esetén* $q(z) = zp(q(z))$.

(d) *Ha* $p(z)$ *konvergenciasugara nagyobb, kint* 1, *akkor* $q(z)$*-é is, és ezért van olyan* $\delta > 0$, *hogy* $q_j < e^{-\delta j}$.

11.2 TÉTEL. (a) *Ha* $c < 1$, *akkor* 1 *valószínűséggel a folyamat véges sok lépés után megáll, és* $\mathsf{E}(T)$ *véges.*

(b) *Ha* $c = 1$, *akkor* 1 *valószínűséggel a folyamat véges sok lépés után megáll, de* $\mathsf{E}(T)$ *végtelen.*

(c) *Ha* $c > 1$, *akkor pozitív valószínűséggel a folyamat végtelen sok lépésen át tart.*

## 11.2 A legnagyobb komponens

11.3 TÉTEL. *A* $G(n, c/n)$ *gráf legnagyobb komponensének pontszáma* 1*-hez tartó valószínűséggel*

$$\begin{cases} O(\ln n), & \text{ha } c < 1, \\ \Theta(n), & \text{ha } c > 1. \end{cases}$$

**Bizonyítás.** Legyen először $c < 1$. Rögzítsük egyelőre $G$-nek $V$ csúcshalmazát; az éleket majd később fogjuk generálni. Vegyünk hozzá $V$-hez további $u_1, u_2, \ldots$ csúcsokat. Legyen $v$ tetszőleges csúcs. Indítsunk el $v$-től egy elágazó folyamatot a következőképpen. Ha már felépítettünk egy $k$ csúcsú $T$ fát, akkor tekintsük ennek egy élő csúcsát, és az ebből a $(V(G) \cup \{u_1, \ldots, u_k\}) \setminus V(T)$ menő éleket. Minden ilyen élt $p/n$ valószínűséggel tegyünk bele a fába.

Mivel egy csúcs utódainak várható száma $n(c/n) < 1$, a fa 1 valószínűséggel kihal, és várható mérete egy csak $c$-től függő $K$ konstans. Továbbá a 11.2(d) tétel szerint van olyan $\delta > 0$, hogy

$$\mathsf{P}(|V(T)| > j) < e^{-\delta j}.$$

Most generáljuk a $G(n, c/n)$ gráf egy példányát a következőképpen. Elhagyjuk $T$-ből az $u_1, u_2, \ldots$ csúcsokat, és mindazon pontpárokat, melyekről még nem döntöttünk a $T$ konstrukciója során, $c/n$ valószínűséggel összekötjük. Nem nehéz meggondolni, hogy ennek a gráfnak az eloszlása tényleg $G(n, c/n)$, a $V(T) \setminus \{u_1, u_2, \ldots\}$ halmazból nem lép ki él. Jelölje $C_v$ a véletlen gráf $v$-t tartalmazó komponensét, akkor tehát $V(C_v) \subseteq V(T)$. (Azt sem nehéz látni, hogy majdnem mindíg egyenlőség áll.) Tehát

$$\mathsf{P}(|V(C_v)| > j) < e^{-\delta j}.$$

Legyen $k = (2 \ln n)/\delta$, akkor

$$\mathsf{P}(|V(C_v)| > k) < \frac{1}{n^2},$$

és így annak a valószínűsége, hogy van olyan $v$ csúcs, melyre $|V(C_v)| > k$, kisebb, mint $1/n$.

A $c > 1$ eset a 11.2(c) tétel alkalmazásával hasonlóan bizonyitható, de a részletek bonyolultabbak. $\square$

# References


[1] N. Alon, J. Spencer: *The Probabilistic Method*, Wiley–Interscience, 2000.

[2] Erdős Pál, Surányi János: *Válogatott fejezetek a számelméletből*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1960; Polygon, Szeged, 1996.