

Véletlen struktúrák és alkalmazásaik

Előadó: LOVÁSZ LÁSZLÓ

2010 tavasz

Az előadás leginkább Alon-Spencer [1] könyvét követi. Alább azok a témák vannak részletezve, ahol ettől eltérünk.

Tartalom

1 Bevezető példák	3
1.1 2-kromatikus hipergráfok	3
1.2 Ramsey számok	3
1.3 Turnament Hamilton útjainak száma	4
1.4 LYM egyenlőtlenség, Sperner tétele	4
1.5 Bollobás egyenlőtlenség	4
2 Várható érték	4
2.1 Alsó becslés a független pontok maximális számára	4
2.2 Gráfok keresztezési száma	5
2.3 Rövid kört nem tartalmazó nagy kromatikus számú gráf	6
3 Második momentum módszer	6
3.1 K_4 küszöbfüggvénye	6
3.2 Prímosztók száma	6
3.3 Teljes részgráf mérete véletlen gráfban	7
4 Martingálok	9
4.1 Megállási Tétel	9
4.2 Konvergencia Tétel	10
4.3 Azuma Egyenlőtlenség	10
4.3.1 Véletlen leképezés képhalmaza	10
4.3.2 Véletlen részgráf élszáma	11

4.3.3	Véletlen részgráf kromatikus száma	11
4.3.4	Véletlen gráf maximális teljes részgráfja	12
4.3.5	Véletlen gráf kromatikus száma	13
5	Lokális Lemma	14
5.1	Brooks tétel hipergráfra	14
5.2	k -val osztható hosszúságú irányított kör	15
5.3	Fedések felbontása	15
5.4	*Latin transzverzális	15
6	Vapnik-Cservonenkisz dimenzió	15
6.1	Lefogás és törtlefogás	15
6.2	Becslés a Vapnik-Cservonenkisz dimenzió alapján	16
6.3	ε -hálók és ε -minták	17
7	*Szitamódszerek	18
7.1	Bonferoni egyenlőtlenségek	18
7.2	Brunn szita	19
7.3	Selberg szita	19
8	Regularitási Lemma	22
9	*Korrelációs egyenlőtlenségek	23
9.1	A 4-Függvény Tétel	23
9.2	Az FKG Egyenlőtlenség	24
9.3	Parciális rendezések lineáris kiterjesztései	24
10	Közelítő leszámlálás és mintavétel	25
10.1	Színezések száma	25
10.1.1	Visszavezetés a mintavételre	25
10.1.2	Véletlen színezés Markov láncsal	25
10.1.3	Markov-láncok és bolyongás reguláris gráfokon	25
10.1.4	Sajátérték-hézag és keverés	26
10.1.5	Csatolás és keverés	27
10.1.6	Keverés a kockán	27
10.1.7	Csatolás a színezések gráfján	27
10.2	*További példák	29

10.2.1	Teljes párosítások száma	29
10.2.2	Lineáris kiterjesztések száma	29
10.3	*Konduktancia	29
10.4	*Véletlen teljes párosítás	30
10.5	*Megállási szabályok	31
11	*Elágazó leszámlálás	31
11.1	Bregman tétele	31
11.2	Közelítő leszámlálás és véletlen generálás ekvivalenciája	33
12	*Véletlen gráfok növekedése	33
12.1	Elágazó folyamatok	33
12.2	A legnagyobb komponens	33
13	*Statisztikus fizika	34
14	*Kvázivéletlen gráfok	34
15	*Derandomizálás	34
16	*Etc	34
16.1	Izoláló Lemma	34
16.2	Janson egyenlőtlenség	34
16.3	Talagrand egyenlőtlenség	34
16.4	Kim–Vu egyenlőtlenség	34
16.5	Rödl majszolás	34

1 Bevezető példák

1.1 2-kromatikus hipergráfok

1.1 TÉTEL (ERDŐS–HAJNAL) *Ha egy r -gráf élszáma $\leq 2^{r-1}$, akkor 2-színezhető.*

1.2 Ramsey számok

1.2 TÉTEL (ERDŐS, ERDŐS–SZEKERES)

$$2^{(k-1)/2} \leq R(k, k) \leq \binom{2k-2}{k-1}.$$

1.3 MEGJEGYZÉS Ezt a bizonyítást el lehet mondani úgy is, hogy csak a megfelelő tulajdonságú

gráfok számáról beszélünk, nem beszélve valószínűségekről. Azonban a valószínűségi szemlélet az, ami továbbvezet.

1.3 Turnament Hamilton útjainak száma

1.4 ÁLLÍTÁS (RÉDEI) Minden turnamentben van Hamilton út.

1.5 TÉTEL (SZELE) Van olyan n csúcsú turnament, melyben legalább $n!/2^{n-1}$ Hamilton-út van.

A megfordítást csak kimondjuk.

1.6 TÉTEL (ALON) Minden $c < 2$ -höz van olyan n_0 , hogy ha $n \geq n_0$, akkor minden n csúcsú turnamentben legfeljebb $n!/c^{n-1}$ Hamilton-út van.

1.4 LYM egyenlőtlenség, Sperner tétele

Sperner rendszerek hívjuk az olyan hipergráfot, melyben egyik él sem tartalmaz egy másikat.

1.7 TÉTEL Sperner rendszerre

$$\sum_{A \in \mathcal{H}} \frac{1}{\binom{n}{|A|}} \leq 1.$$

1.8 KÖVETKEZMÉNY (SPERNER TÉTELE) $|\mathcal{H}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

1.5 Bollobás egyenlőtlenség

1.9 TÉTEL Legyenek $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m$ véges halmazok, és tegyük föl, hogy minden i -re $A_i \cap B_i = \emptyset$, de ha $i \neq j$, akkor $A_i \cap B_j \neq \emptyset$. Ekkor

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{\binom{|A_i|+|B_i|}{|A_i|}} \leq 1.$$

1.10 KÖVETKEZMÉNY Ha $|A_i| = p$, $|B_i| = q$, akkor $m \leq \binom{p+q}{q}$.

2 Várható érték

2.1 Alsó becslés a független pontok maximális számára

2.1 ÁLLÍTÁS Legyen G egy n csúcsú, m élű gráf, és legyen $0 \leq p \leq 1$. Ekkor

$$\alpha(G) \geq pn - p^2m.$$

BIZONYÍTÁS. Válasszunk ki véletlenszerűen minden pontot p valószínűséggel, majd a kapott pontok által kifeszített minden élnek hagyjuk el valamelyik végpontját. \square

Ha $m \geq n/2$, akkor p legjobb választása $p = n/2m$, és így

$$\alpha(G) \geq \frac{n^2}{4m}.$$

Ennél Turán tételéből sokkal jobb becslés nyerhető:

$$\alpha(G) \geq \frac{n^2}{2m + n}.$$

Erre (és ezzel Turán tételére is) adunk egy véletlent használó bizonyítást. A következő erősebb egyenlőséget igazoljuk:

2.2 TÉTEL

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{d_v + 1}.$$

2.2 Gráfok keresztezési száma

Egy G gráf $\text{cr}(G)$ keresztezési száma az a minimális c , melyre G legfeljebb c kereszteződéssel lerajzolható a síkba.

2.3 LEMMA

$$\text{cr}(G) \geq m - 3n + 6.$$

2.4 TÉTEL (AJTAI, CHVÁTAL, NEWBORN, SZEMERÉDI; LEIGHTON) Ha $|V(G)| = n$ és $|E(G)| = m \geq 5n$, akkor

$$\text{cr}(G) \geq \frac{m^3}{100n^2}$$

BIZONYÍTÁS. Válasszunk ki minden pontot p valószínűséggel ($0 < p < 1$), így kapunk egy $G' = (V', E')$ feszített részgráfot. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|V'|) &= pn, \\ \mathbb{E}(|E'|) &= p^2m, \\ \mathbb{E}(\text{cr}(G')) &\leq p^4 \text{cr}(G). \end{aligned}$$

A 2.3 lemma szerint

$$\text{cr}(G') > |E'| - 3|V'|,$$

és várható értéket véve azt kapjuk, hogy

$$p^4 \text{cr}(G) > p^2m - 3pn, \quad \text{cr}(G) > \frac{m}{p^2} - 3\frac{n}{p^3}.$$

A jobboldal maximuma $p = 9n/(2m)$ értéknél van, ahol az adódik, hogy

$$\text{cr}(G) > \frac{4m^3}{243n^2}.$$

□

A fenti becslésnek sok alkalmazása van különböző geometriai kérdésekre. Például egyszerű bizonyítást ad arra, hogy n síkbeli pont között az 1 távolság csak $O(n^{4/3})$ -szor fordulhat elő.

2.3 Rövid kört nem tartalmazó nagy kromatikus számú gráf

2.5 TÉTEL (ERDŐS) Minden k, l -hez van olyan gráf, melynek kromatikus száma legalább k , és melyben minden kör hossza legalább l .

Legyen

$$p = \frac{(\log n)^3}{n}, \quad t = \frac{n}{\log n}, \quad l = \frac{\log n}{10 \log \log n}.$$

Ekkor $G(n, p)$ -ben nagy valószínűséggel nincs t elemű független, és a legfeljebb l hosszúságú körök várható száma kisebb, mint $n/4$. Így $n/2$ pontot elhagyva olyan gráfot kapunk, melynek kromatikus száma $> n/(2t)$, és minden körének hossza $> k$.

3 Második momentum módszer

Ha X nemnegatív, egészértékű valószínűségi változó, akkor a Markov egyenlőtlenség szerint

$$P(X > 0) \leq E(X). \quad (1)$$

Ha X nemnegatív valószínűségi változó, akkor a Csebisev Egyenlőtlenség szerint

$$P(X = 0) \leq \frac{\text{Var}(X)}{E(X)^2}. \quad (2)$$

3.1 K_4 küszöbfüggvénye

3.1 TÉTEL Legyen $p(n) \in [0, 1]$.

(a) Ha $p(n)n^{2/3} \rightarrow 0$, akkor 1-hez tartó valószínűséggel $G(n, p(n))$ -ben nincs teljes négyszög.

(b) Ha $p(n)n^{2/3} \rightarrow \infty$, akkor 1-hez tartó valószínűséggel $G(n, p(n))$ -ben van teljes négyszög.

3.2 Prímosztók száma

Legyen $\lambda(n)$ az n szám különböző prímosztóinak száma.

3.2 TÉTEL (TURÁN) Legyen $k \in [n]$ véletlen. Ekkor minden $t > 0$ számra és (t -től függően) elég nagy n -re

$$P(|\lambda(k) - \ln \ln k| > t\sqrt{\ln \ln k}) < \frac{20}{t^2}.$$

BIZONYÍTÁS. A legtöbb $k \in [n]$ számra $\ln \ln n \approx \ln \ln k$. Pontosabban, ha $\sqrt{n} \leq k \leq n$, akkor

$$\ln \ln n - \ln \ln k \leq \ln \ln n - \ln \ln \sqrt{n} < 1.$$

Ezért elegendő azt bizonyítani, hogy minden $s > 0$ -ra és (s -től függően) elég nagy n -re

$$P(|\lambda(k) - \ln \ln n| > s\sqrt{\ln \ln k}) < \frac{10}{s^2}.$$

Ehhez vegyük észre, hogy $\lambda(k)$ így írható:

$$\lambda(k) = \sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ prime}}} X_p,$$

ahol

$$X_p = \begin{cases} 1, & \text{ha } p \mid k, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Így

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\lambda(k)) &= \sum_p \mathbb{E}(X_p) = \frac{1}{n} \sum_p \lfloor \frac{n}{p} \rfloor = \frac{1}{n} \sum_{p \leq n} \left(\frac{n}{p} - \left\{ \frac{n}{p} \right\} \right) \\ &= \sum_{p \leq n} \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \sum_{p \leq n} \left\{ \frac{n}{p} \right\} = \ln \ln n + c_1, \end{aligned}$$

ahol $|c_1| \leq 1$. Továbbá,

$$\begin{aligned} \text{Var}(\lambda(k)) &= \sum_p \text{Var}(X_p) + \sum_{p \neq q} \text{Cov}(X_p, X_q) \leq \mathbb{E}(\lambda(k)) + \frac{1}{n} \sum_{p \neq q} \lfloor \frac{n}{pq} \rfloor - \frac{1}{n^2} \sum_{p \neq q} \lfloor \frac{n}{p} \rfloor \lfloor \frac{n}{q} \rfloor \\ &\leq \mathbb{E}(\lambda(k)) + \frac{1}{n} \sum_{p \neq q} \frac{n}{pq} - \frac{1}{n^2} \sum_{p \neq q} \left(\frac{n}{p} - 1 \right) \left(\frac{n}{q} - 1 \right) \\ &\leq \mathbb{E}(\lambda(k)) + \sum_{p \neq q} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \\ &\leq \mathbb{E}(\lambda(k)) + 2(1 + \ln \ln n) < 4 \ln \ln n. \end{aligned}$$

Így a Csebisev Egyenlőtlenség szerint

$$\mathbb{P}(|\lambda(k) - \ln \ln n| > s\sqrt{\ln \ln n}) \leq \mathbb{P}(|\lambda(k) - \mathbb{E}(\lambda(k))| > s\sqrt{\ln \ln n} - 3) \leq \frac{\text{Var}(\lambda(k))}{(s\sqrt{\ln \ln n} - 3)^2} < \frac{10}{s^2}.$$

ha n elég nagy. □

3.3 Teljes részgráf mérete véletlen gráfban

3.3 TÉTEL Legyen $k = k(n) \geq 1$ egész szám.

(a) Ha $\binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}} \rightarrow 0$, akkor

$$\mathbb{P}(\omega(G(n, 1/2)) \geq k) \rightarrow 0.$$

(b) Ha $\binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}} \rightarrow \infty$, akkor

$$\mathbb{P}(\omega(G(n, 1/2)) < k) \rightarrow 0.$$

BIZONYÍTÁS. Legyen $k_0 = k_0(n)$ az a legkisebb pozitív egész szám, melyre $\binom{n}{k_0} 2^{-\binom{k_0}{2}} < 1$. Könnyű látni, hogy

$$k_0 \sim 2 \log n,$$

és hogy ha $k \leq k_0 - 2$, akkor (b) feltétele áll fenn, míg ha $k \geq k_0 + 1$, akkor (a) feltétele. Ezért feltehetjük, hogy $k \sim 2 \log n$.

Minden k elemű S halmazra, legyen

$$X_S = \begin{cases} 1 & \text{ha } S \text{ teljes részgráf,} \\ & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ekkor $X = \sum_S x_S$ a teljes k -asok száma, és

$$\mathbb{E}(X) = \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}}. \quad (3)$$

Így

$$\mathbb{P}(\omega(G(n, 1/2)) \geq k) = \mathbb{P}(|X| \geq 1) \leq \mathbb{E}(X) = \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}}.$$

Ebből (a) adódik.

A másik oldali becsléshez kiszámítjuk a szórást.

$$\text{Var}(X) = \sum_S \text{Var}(X_S) + \sum_{S \neq T} \text{Cov}(X_S, X_T).$$

Az első szumma kisebb, mint $\mathbb{E}(X)$. A másodikban csak azok a tagok nem nullák, ahol S és T legalább két pontban metszik egymást. Ha $|S \cap T| = i$, akkor

$$\text{Cov}(X_S, X_T) = 2^{-2\binom{k}{2} + \binom{i}{2}} - 2^{-2\binom{k}{2}} < 2^{-2\binom{k}{2} + \binom{i}{2}},$$

és így, felhasználva, hogy az ilyen (S, T) párok száma $\binom{n}{k} \binom{k}{i} \binom{n-k}{k-i}$,

$$\text{Var}(X) \leq \mathbb{E}(X) + \sum_{i=2}^{k-1} \binom{n}{k} \binom{k}{i} \binom{n-k}{k-i} 2^{-2\binom{k}{2} + \binom{i}{2}}.$$

A (2) egyenlőtlenség szerint elég azt megmutatni, hogy $\text{Var}(X)/\mathbb{E}(X)^2 \rightarrow 0$. A fentiekből

$$\begin{aligned} \frac{\text{Var}(X)}{\mathbb{E}(X)^2} &\leq \frac{1}{\mathbb{E}(X)} + \sum_{i=2}^{k-1} \frac{\binom{n}{k} \binom{k}{i} \binom{n-k}{k-i} 2^{-2\binom{k}{2} + \binom{i}{2}}}{\binom{n}{k}^2 2^{-2\binom{k}{2}}} \\ &= \frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{i=2}^k \binom{k}{i} \binom{n-k}{k-i} 2^{\binom{i}{2}}. \end{aligned}$$

A szummában nézzük két egymásutáni tag hányadosát:

$$\frac{\binom{k}{i+1} \binom{n-k}{k-i-1} 2^{\binom{i+1}{2}}}{\binom{k}{i} \binom{n-k}{k-i} 2^{\binom{i}{2}}} = \frac{2^i (k-i)^2}{(i+1)(n-2k+i+1)}.$$

Kis számolgatással látható, hogy ez $i = 2$ esetén 1-nél jóval kisebb, sőt kisebb, mint $n^{-0.99}$ (ha n elég nagy). Majd i -vel monoton nő, valahol (nem fontos, hogy hol) túllépi az 1-et, $i = k - 3$ -nál a legnagyobb, de még $i = k - 2, k - 1$ esetén is nagyobb, mint $n^{0.99}$ (ha n elég nagy). Így a két szélső tag valamelyike a legnagyobb, és a többiek összege kisebb, mint ezek összegének kétszerese (megint, ha n elég nagy). De a két szélső tag kicsi:

$$\frac{\binom{k}{2} \binom{n-k}{k-2} 2^{\binom{2}{2}}}{\binom{n}{k}} = k^2 (k-1)^2 \frac{(n-k) \dots (n-2k+3)}{2n(n-1) \dots (n-k+1)} \leq \frac{k^2 (k-1)^2}{2n(n-1)} < \frac{k^4}{2n^2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

és

$$\frac{\binom{k}{k} \binom{n-k}{0}}{\binom{n}{k}} 2^{\binom{k}{2}} = \frac{2^{\binom{k}{2}}}{\binom{n}{k}} = \frac{1}{\mathbf{E}(X)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

□

4 Martingálok

Valószínűségi változóknak egy X_1, X_2, \dots sorozatát *martingálnak* nevezzük, ha minden $k \geq 0$ indexre

$$\mathbf{E}(X_{k+1} \mid X_1, \dots, X_k) = X_k.$$

Hozzávehetjük mindig az $X_0 = \mathbf{E}(X_1)$ értéket (ez tehát olyan valószínűségi változó, ami nem változik). Minden martingálra

$$X_0 = \mathbf{E}(X_1) = \mathbf{E}(X_2) = \dots$$

Valószínűségi változóknak egy X_1, X_2, \dots sorozatát *szupermartingálnak* nevezzük, ha minden $k \geq 0$ indexre

$$\mathbf{E}(X_{k+1} \mid X_1, \dots, X_k) \leq X_k.$$

Minden szupermartingálra

$$X_0 \geq \mathbf{E}(X_1) \geq \mathbf{E}(X_2) \geq \dots$$

A submartingálok hasonlóan definiálhatók.

Három tételt mondunk ki martingálokra, melyeknek kombinatorikai alkalmazásai vannak, de ezek közül a harmadikkal foglalkozunk részletesen.

4.1 Megállási Tétel

Legyen (X_0, X_1, \dots) valószínűségi változóknak egy sorozata (az értékük nem kell, hogy szám legyen). Egy T nemnegatív egész értékű valószínűségi változót *megállási időnek* nevezzük (az (X_0, X_1, \dots) sorozatra vonatkozóan), ha minden $k \geq 0$ -ra a $T = k$ esemény független az X_{k+1}, X_{k+2}, \dots változóktól. Számítógéptudományi alkalmazásokban szokás ezt *megállási szabálynak* is hívni: azt, hogy a sorozatot megállítjuk-e k lépés után, az addigi változó-értékek ismeretében döntjük el (esetleg randomizált algoritmussal), a későbbi változókat nem ismerve.

4.1 TÉTEL Legyen (X_1, X_2, \dots) olyan szubmartingál, melyre $|X_{m+1} - X_m|$ korlátos, és legyen T olyan megállási idő, melyre $\mathbf{E}(T)$ véges. Ekkor $\mathbf{E}(X_T) \leq X_0$. Ha (X_1, X_2, \dots) martingál, akkor egyenlőség áll.

4.2 KÖVETKEZMÉNY Indítsunk el 0-ból egy véletlen sétát az egyenes rácspontjain, és álljunk meg, ha vagy a -ba, vagy $-b$ -be jutunk ($a, b \in \mathbb{Z}_+$). Annak a valószínűsége, hogy a -ban állunk meg,

$$\frac{b}{a+b}.$$

4.2 Konvergencia Tétel

4.3 TÉTEL (DOOB) Ha X_1, X_2, \dots korlátos martingál, akkor 1 valószínűséggel $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ létezik.

4.3 Azuma Egyenlőtlenség

4.4 TÉTEL Legyen X_1, X_2, \dots olyan martingál, melyre $|X_{m+1} - X_m| \leq 1$ minden m -re. Ekkor

$$\mathbb{P}(X_m \geq X_0 + \lambda) < e^{-\lambda^2/(2m)}.$$

Ha $\lambda = \varepsilon m$, akkor azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(X_m - X_0 \geq \varepsilon m) < e^{-\varepsilon^2 m/2}.$$

Ugyanezt $(-X_m)$ -re is alkalmazva kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(|X_m - X_0| \geq \varepsilon m) < 2e^{-\varepsilon^2 m/2}.$$

Érdekes még a $\lambda = c\sqrt{m}$ választás:

$$\mathbb{P}(X_m - X_0 \geq c\sqrt{m}) < e^{-c^2/2}.$$

4.5 KÖVETKEZMÉNY (BERNSTEIN–CSERNOV–HOEFFDING) Legyenek X_1, X_2, \dots független azonos eloszlású valószínűségi változók, $|X_i| \leq 1$. Ekkor

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_m - \mathbb{E}(X_1)\right| > \varepsilon\right) < 2e^{-\varepsilon^2 m/2}.$$

4.6 KÖVETKEZMÉNY Legyenek $(\Omega, \mathcal{A}, \pi)$ egy valószínűségi mező, és legyen $f : \Omega^n \rightarrow \mathbb{R}$ olyan mérhető függvény, melyre

$$|f(x_1, \dots, x_n) - f(y_1, \dots, y_n)| \leq 1$$

ha (x_1, \dots, x_n) és (y_1, \dots, y_n) csak egy koordinátában különböznek. Ekkor

$$\mathbb{P}(f(x) - \mathbb{E}(f(x)) > \varepsilon n) < e^{-\varepsilon^2 n/2}.$$

és

$$\mathbb{P}(|f(x) - \mathbb{E}(f(x))| > \varepsilon n) < 2e^{-\varepsilon^2 n/2}.$$

4.3.1 Véletlen leképezés képhalmaza

4.7 TÉTEL Legyen $|S| = n$, és legyen $\phi : S \rightarrow S$ véletlen leképezés. Ekkor

$$\mathbb{P}\left(\left|\phi(S) - \left(1 - \frac{1}{e}\right)n\right| > \lambda\right) < 2e^{-\lambda^2/(2n)}.$$

4.3.2 Véletlen részgráf élszáma

4.8 TÉTEL Legyen G n csúcsú m élű gráf, jelölje $d = m/\binom{n}{2}$ az élsűrűségét, legyen $k \geq 1$, és legyen S a $V(G)$ egy véletlen k elemű részhalmaza. Ekkor

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{|E(G[S])|}{\binom{k}{2}} - d\right| > \varepsilon\right) \leq e^{-\varepsilon^2 k/8}.$$

Legyenek v_1 véletlen pont $V(G)$ -ben, v_2 véletlen pont $V(G) \setminus \{v_1\}$ -ben, stb. v_k véletlen pont $V(G) \setminus \{v_1, \dots, v_{k-1}\}$ -ben, és $S = \{v_1, \dots, v_k\}$. Legyen

$$X_m = \frac{1}{k-1} \mathbb{E}(|E(G[S])| \mid v_1, \dots, v_m).$$

Ekkor X_0, X_1, \dots, X_k martingál, és

$$|X_{m+1} - X_m| \leq 1.$$

Továbbá $X_0 = d \frac{k}{2}$. Így Azuma egyenlőtlensége szerint

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{|E(G[S])|}{\binom{k}{2}} - d\right| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(|X_k - X_0| > \varepsilon \frac{k}{2}\right) < \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 k}{8}\right).$$

4.9 MEGJEGYZÉS Választhatnánk a v_1, v_2, \dots, v_k csúcsokat egymástól függetlenül, és alkalmazhatnánk a 4.6 Következmenyt. Ekkor azonban egy maradéktagot kellene külön megbecsülnünk, amit abból kapunk, hogy két v_i egybeesik.

4.3.3 Véletlen részgráf kromatikus száma

4.10 TÉTEL Minden G gráfhoz és $1 \leq k \leq |V(G)|$ egész számhoz van olyan $s = s(G, k)$ szám, hogy a $V(G)$ egy véletlen k elemű S részhalmazára

$$\mathbb{P}(|\chi(G[S]) - s| > \varepsilon k) \leq e^{-\varepsilon^2 k/2}.$$

Konkrétan $s = \mathbb{E}(\chi(G[S]))$, de erről nehéz a definíciónál többet mondani. Legyen v_1, v_2, \dots mint fentebb, és legyen

$$X_m = \mathbb{E}(\chi(G[S]) \mid v_1, \dots, v_m).$$

Ekkor X_0, X_1, \dots, X_k martingál, és

$$|X_{m+1} - X_m| \leq 1.$$

Így Azuma egyenlőtlensége szerint

$$\mathbb{P}(|X_k - X_0| > \varepsilon k) < e^{-\varepsilon^2 k/2}.$$

4.3.4 Véletlen gráf maximális teljes részgráfja

Legyen k_0 a legnagyobb olyan egész szám, melyre már várhatóan legalább egy teljes k_0 -ás van a $G(n, 1/2)$ véletlen gráfban, vagyis

$$\binom{n}{k_0} 2^{\binom{k_0}{2}} \geq 1.$$

Ekkor 1-gyel kisebb teljes részgráf már igen nagy valószínűséggel van:

4.11 TÉTEL Legyen $k = k_0 - 1$. Ekkor $G = G(n, 1/2)$ -re teljesül, hogy

$$P(\omega(G) < k) \leq \exp\left(\frac{-n^2}{16k^8}\right)$$

ha n elég nagy.

BIZONYÍTÁS. Tudjuk, hogy $k_0 \sim 2 \log n$. Továbbá könnyű ellenőrizni, hogy a teljes k -asok várható számára teljesül:

$$\nu = \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}} > \frac{n^3}{k^3} 2^{1-k}. \quad (4)$$

Legyen \mathcal{H} az a gráf, melynek csúcsai az $[n]$ halmaz k elemű részhalmazai, élei pedig az olyan (A, B) párokat kötik össze, melyekre $|A \cap B| \geq 2$. Legyen \mathcal{G} ennek az a (véletlen) részgráfja, melyet azok a csúcsok feszítenek, melyek G -ben teljes részgráfnak felelnek meg. Az Azuma egyenlőtlenség 4.6 következményét alkalmazzuk az

$$\alpha(\mathcal{G}) = \alpha(X_{12}, X_{13}, \dots, X_{n-1, n})$$

függvényre, ahol X_{ij} annak az indikátora, hogy i és j össze vannak-e kötve. Legyen $\eta = E(\alpha(\mathcal{G}))$. Nyilvánvaló, hogy egy élt megváltoztatva, $\alpha(\mathcal{G})$ legfeljebb 1-gyel változik. Ha nincs teljes k -as, akkor $\alpha(\mathcal{G}) = 0$, és így

$$P(\omega(G) < k) = P(\alpha(\mathcal{G}) = 0) = P(\alpha(\mathcal{G}) - E(\alpha(\mathcal{G})) \leq -\eta) \leq \exp\left(-\frac{\eta^2}{n(n-1)}\right).$$

Itt η -t alulról kell becsülnünk. Ehhez a $\nu = E(|V(\mathcal{G})|)$ $\mu = E(|E(\mathcal{G})|)$ mennyiségeket és a 2.1 Állítást használjuk: minden $0 \leq q \leq 1$ esetén

$$\alpha(\mathcal{G}) \geq q|V(\mathcal{G})| - q^2|E(\mathcal{G})|,$$

és várható értéket véve

$$\eta \geq q\nu - q^2\mu.$$

Így a $q = \frac{\nu}{2\mu}$ választással (amiről ellenőrizni kell, hogy legfeljebb 1), azt kapjuk, hogy

$$\eta \geq \frac{\nu^2}{4\mu},$$

és így

$$P(\omega(G) < k) \leq \exp\left(-\frac{\eta^2}{n(n-1)}\right) < \exp\left(-\frac{\nu^4}{16\mu^2 n^2}\right).$$

Itt a 3.3 tétel bizonyításában végzett számítások szerint, (4) felhasználásával

$$\frac{\mu}{\nu^2} = \frac{1}{2 \binom{n}{k}} \sum_{i=2}^{k-1} \binom{k}{i} \binom{n-k}{k-i} 2^{\binom{i}{2}} < \frac{k^4}{2n^2} + \frac{kn2^{-k}}{\nu} < \frac{k^4}{n^2}.$$

Innen a tétel következik. □

4.3.5 Véletlen gráf kromatikus száma

4.12 TÉTEL Legyen $n \geq 1$ és $G = G(n, 1/2)$. Ekkor a $c = E(\chi(G))$ számra

$$P(|\chi(G) - c| > \lambda \sqrt{n-1}) < 2e^{-\lambda^2/2}.$$

De mekkora ez a c érték?

4.13 TÉTEL Minden $\varepsilon > 0$ -ra

$$E(\chi(G(n, 1/2))) = (1 + o(1)) \frac{n}{2 \log n}.$$

BIZONYÍTÁS. Tudjuk, hogy nagy valószínűséggel $\alpha(G) < (2 + o(1)) \log n$, és ezért

$$\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)} > (1 - o(1)) \frac{n}{2 \log n}.$$

Az ellenkező irányú becsléshez a 4.11 tételt használjuk. Legyen $m = \lfloor n/(\log n)^2 \rfloor$. A G gráf minden m csúcsú feszített H részgráfja maga is véletlen gráf, így ha r jelöli azt a legnagyobb számot, melyre

$$\binom{m}{r+1} 2^{\binom{r+1}{2}} \geq 1,$$

akkor

$$P(\alpha(G) < r) \leq \exp\left(-\frac{m^2}{16r^8}\right).$$

Így annak a valószínűsége, hogy van olyan m csúcsú H feszített részgráf, melyre $\alpha(G) < r$, legfeljebb

$$\binom{n}{m} \exp\left(-\frac{m^2}{16r^8}\right) < \exp\left(m \ln n - \frac{m^2}{16r^8}\right) < \exp\left(\frac{n}{\log n} - \frac{n^2}{16(\log n)^{16}}\right) = o(1).$$

Tehát majdnem biztosan, minden m csúcsú feszített részgráfban van r csúcsú független részhalmaz.

Ezekután a színezést könnyű megkonstruálni: Kiveszünk egy r csúcsú független halmazt, és az 1-es színre színezzük. A maradékból kiveszünk egy r csúcsú független halmazt, és a 2-es színre színezzük, stb. Amikor már csak $l < m$ csúcs marad, azt tetszőlegesen színezzük. Így legfeljebb $\frac{n}{r} + m$ színt használunk. Mivel $r \sim 2 \log m \sim 2 \log n$, ebből a tétel következik. □

5 Lokális Lemma

5.1 TÉTEL Legyenek A_1, \dots, A_n események, és tegyük föl, hogy minden A_i -hez van $n - d - 1$ másik esemény úgy, hogy azoktól A_i teljesen független. Tegyük föl, hogy $P(A_i) \leq 1/(e(d+1))$ minden i -re. Ekkor $P(\bar{A}_1 \wedge \dots \wedge \bar{A}_n) > 0$.

Általánosabb alakja:

5.2 TÉTEL Legyenek A_1, \dots, A_n események, és tegyük föl, hogy vannak olyan $x_1, \dots, x_n \in (0, 1)$ valószínűségi számok, és minden i -hez van olyan $S_i \subseteq \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, hogy minden $S \subseteq S_i$ -re

$$P\left(A_i \mid \bigwedge_{j \in S} \bar{A}_j\right) \leq x_i \prod_{j \notin S_i} (1 - x_j).$$

Ekkor

$$P(\bar{A}_1 \wedge \dots \wedge \bar{A}_n) \geq \prod_{i=1}^n (1 - x_i) > 0.$$

A bevezető alakon kívül még két következményt érdemes megfogalmazni:

5.3 KÖVETKEZMÉNY Legyenek A_1, \dots, A_n események, és tegyük föl, hogy minden i -hez van olyan $S_i \subseteq \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, $|S_i| = n - d - 1$, hogy minden $S \subseteq S_i$ -re

$$P\left(A_i \mid \bigwedge_{j \in S} \bar{A}_j\right) \leq \frac{1}{e(d+1)}.$$

Ekkor

$$P(\bar{A}_1 \wedge \dots \wedge \bar{A}_n) > 0.$$

5.4 KÖVETKEZMÉNY Legyenek A_1, \dots, A_n események, és tegyük föl, hogy minden i -hez van olyan $S_i \subseteq \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, hogy A_i teljesen független az $\{A_j : j \in S_i\}$ eseményektől, továbbá

$$\sum_{j \notin S_i} P(A_j) \leq \frac{1}{4}.$$

Ekkor

$$P(\bar{A}_1 \wedge \dots \wedge \bar{A}_n) > 0.$$

5.5 MEGJEGYZÉS A függetlenségi feltételt gyakran úgy adjuk meg, hogy definiálunk a $V = \{1, \dots, n\}$ egy gráfot, melyre az áll, hogy minden i csúcsra az A_i esemény teljesen független az $(A_j : j \in V \setminus N(i) \setminus \{i\})$ eseményektől (figyelem: nem csak külön-külön mindegyiktől!).

5.1 Brooks tétel hipergráfra

5.6 TÉTEL Ha egy k -uniform hipergráfban minden él legfeljebb 2^{k-3} másik élt metsz, akkor a hipergráf 2 színnel színezhető.

5.7 KÖVETKEZMÉNY Ha egy k -uniform hipergráfban minden pont foka legfeljebb $2^{k-3}/k$, akkor a hipergráf 2 színnel színezhető.

5.8 KÖVETKEZMÉNY Ha egy k -uniform hipergráfban bármely két élnek legfeljebb egy közös pontja van, és éleinek száma legfeljebb $4^{k-4}/k^3$, akkor a hipergráf 2 színnel színezhető.

5.2 k -val osztható hosszúságú irányított kör

Könnyű bebizonyítani, hogy ha egy gráfban minden befok legalább δ , akkor van benne legalább $\delta + 1$ hosszúságú irányított kör. Mi mondható még a körök hosszáról?

5.9 TÉTEL Legyen G irányított gráf, legyen a maximális kifok Δ és a minimális befok δ . Ekkor minden $1 \leq k \leq \delta/(1 + \ln(1 + \delta\Delta))$ egész számra van G -ben olyan irányított kör, melynek hossza osztható k -val.

5.3 Fedések felbontása

5.10 TÉTEL Legyen \mathcal{H} olyan hipergráf, melyben minden pont foka legalább k , és minden pontra a pontot tartalmazó élek uniója legfeljebb 2^{k-3} elemű. Ekkor \mathcal{H} felbontható két olyan hipergráf uniójára, melyek mindegyike minden csúcsot lefed.

5.11 KÖVETKEZMÉNY Ha \mathcal{F} nyílt egységkörök olyan halmaza, mely minden pontot legalább k -szor és legfeljebb $2^{k/2-6}$ -szorosan fednek le, akkor \mathcal{F} felbontható két olyan halmaz uniójára, melyek mindegyike minden pontot lefed.

5.4 *Latin transzverzális

5.12 TÉTEL (ERDŐS–SPENCER) Legyen A olyan $n \times n$ mátrix, melyben minden elem legfeljebb $(n-1)/(4e)$ -szer fordul elő. Ekkor van olyan π permutáció, hogy az $a_{i\pi(i)}$ elemek mind különbözőek.

6 Vapnik-Cservonenkisz dimenzió

6.1 Lefogás és törtlefogás

Legyen (V, \mathcal{H}) egy hipergráf, $n = |V|$, $m = |\mathcal{H}|$. A

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \sum_{i \in V} x_i \\ & \text{subject to} && x_i \geq 0 \quad (i \in V) \\ & && \sum_{i \in E} x_i \geq 1 \quad (E \in \mathcal{H}). \end{aligned} \tag{5}$$

lineáris program minden megoldását *tört-lefogó halmaznak*, a program optimális értékét a *törtlefogási számnak* nevezzük, és $\tau^* = \tau^*(\mathcal{H})$ -val jelöljük. Nyilvánvaló, hogy τ^* alsó korlátot ad a lefogó pontok minimális $\tau(\mathcal{H})$ számára. Kérdés, hogy mennyire éles ez a korlát, és egy

optimális törtlefogásból (ami polinomiális időben kiszámítható) megkonstruálható-e egy közelítő egész megoldás.

Tekintsük (5) egy optimális x megoldását, és legyen $p_i = x_i/\tau^*$. Ekkor $(p_i : i \in V)$ egy valószínűségeloszlás V -n, melyben minden $E \in \mathcal{H}$ él valószínűsége legalább $1/\tau^*$.

Két (nem lényegesen különböző) módon próbálhatunk meg ebből lefogó halmazt konstruálni:

(a) Generáljunk v_1, v_2, \dots csúcsokat a p eloszlásból, és álljunk meg, ha minden él le van fogva.

(b) Minden csúcsról egymástól függetlenül cp_i valószínűséggel eldöntjük, hogy ki akarjuk-e választani, és reménykedünk abban, hogy a kiválasztott pontok minden élt lefognak.

Az (a) változatban könnyen látható, hogy nagy valószínűséggel polinomiális számú lépés után megállunk. Legyen T_{rand} az így megkonstruált (véletlen) lefogó halmaz mérete.

Egy rögzített A élre, annak a valószínűsége, hogy az első t kiválasztott pont nem fogja le,

$$\left(1 - \frac{1}{\tau^*}\right)^t < e^{-t/\tau^*}.$$

Így

$$\mathbb{P}(T_{\text{rand}} > t) < me^{-t/\tau^*},$$

és ha $t > \tau^* \ln(2m)$, akkor nagyobb, mint $1/2$ annak a valószínűsége, hogy minden élt lefogtunk, vagyis $1/2$ -nél nagyobb valószínűséggel

$$T_{\text{rand}} \leq \tau^* \ln(2m) \leq \tau \ln(2m). \quad (6)$$

Jobb becslést kapunk, ha a Lokális Lemmát alkalmazzuk, 5.3 változatában. Tegyük fel, hogy \mathcal{H} minden éle legfeljebb D másik élt metsz. Legyen $S = \{v_1, \dots, v_t\}$, és legyenek a „rossz” események azok, hogy S nem fog le egy adott élt. Ha

$$De^{-t/\tau^*} < \frac{1}{4},$$

akkor a Lokális Lemma szerint pozitív valószínűséggel minden él le lesz fogva. Továbbá,

$$\mathbb{E}(|S|) \leq \tau^* \ln(4D) \leq \tau \ln(4D). \quad (7)$$

Algoritmikus szempontból ez a becslés sem igazán érdekes, mert a mohó algoritmus kicsit jobb korlátot ad, igen gyors algoritmussal együtt:

6.1 ÁLLÍTÁS *Ha egy H hipergráf maximális foka D , akkor a mohó algoritmus által adott T_{moho} lefogó halmazra*

$$|T_{\text{moho}}| \leq \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{D}\right) \tau^*(H).$$

6.2 Becslés a Vapnik-Cservonenkisz dimenzió alapján

Egy H hipergráf *Vapnik-Cservonenkisz dimenziója* az a legnagyobb k egész szám, melyre van olyan $S \subseteq V(H)$, $|S| = k$, hogy minden $X \subseteq S$ halmazhoz van olyan $A \in H$, melyre $X = S \cap A$.

6.2 LEMMA (SAUER–SHELAH) *Ha H Vapnik-Cservonenkisz dimenziója k , akkor $|H| \leq 1 + n + \dots + \binom{n}{k}$.*

6.3 TÉTEL *Ha egy H hipergráf Vapnik-Cservonenkisz dimenziója k , akkor*

$$T_{\text{rand}} \leq 8k\tau^*(H) \log(k\tau^*(H)).$$

Legyen $t = \lceil 8k\tau^*(H) \log(k\tau^*(H)) \rceil$ és $s = \lfloor 4k \log(k\tau^*(H)) \rfloor$. Legyen p annak a valószínűsége, hogy van olyan A él, melyet $\{v_1, \dots, v_t\}$ nem metsz. Annak a B eseménynek a valószínűségét fogjuk kétféleképpen megbecsülni, hogy van olyan A él, melyet $\{v_1, \dots, v_t\}$ nem metsz, de $\{v_{t+1}, \dots, v_{2t}\}$ legalább s pontban metsz.

Tegyük föl, hogy van olyan A él, melyet $\{v_1, \dots, v_t\}$ nem metsz. Csebisev Egyenlőtlensége szerint

$$\mathbb{P}\left(|E \cap \{v_{t+1}, \dots, v_{2t}\}| \leq s\right) < \frac{1}{2}.$$

Így

$$\mathbb{P}(B) > \frac{1}{2}p. \quad (8)$$

Másrészt, a B esemény valószínűsége nem változik, ha a $\{v_1, \dots, v_{2t}\}$ pontokat véletlenszerűen permutáljuk. Ha egy $A \in \mathcal{H}$ legalább s pontot tartalmaz $\{v_1, \dots, v_{2t}\}$ -ből, akkor annak a valószínűsége hogy a permutáció után ezek közül mind a második felében lesz

$$\frac{\binom{2t-s}{t}}{\binom{2t}{t}} \leq \left(1 - \frac{s}{2t}\right)^t < e^{-s/2}.$$

Ezt a korlátot nem kell minden $A \in \mathcal{H}$ élre összeadni, hanem csak olyanokra, melyeknek a $\{v_1, \dots, v_{2t}\}$ halmazzal különböző metszeteket adnak. Az ilyenek száma a 6.2 Lemma szerint legfeljebb

$$\binom{2t}{d} + \binom{2t}{d-1} + \dots + 1 < (2t)^d.$$

Így

$$\mathbb{P}(B) = (2N)^d e^{-s/2} < 1/4$$

(8)-gyel összevetve adódik, hogy $p \leq 1/2$.

Kicsit gondosabb számolás azt mutatja, hogy legalább $1/2$ valószínűséggel $T_{\text{rand}} = O(k\tau^* \log \tau^*)$.

6.3 ε -hálók és ε -minták

Legyen (V, \mathcal{H}) egy hipergráf és $\varepsilon > 0$. Egy $S \subseteq V$ halmaz ε -*háló*, ha bármely $A \in \mathcal{H}$, $|A| > \varepsilon|V|$ halmazt metsz. Egy $S \subseteq V$ halmaz ε -*minta*, ha bármely $A \in \mathcal{H}$ halmazra

$$\left| \frac{|A \cap S|}{|S|} - \frac{|A|}{|V|} \right| \leq \varepsilon.$$

6.4 KÖVETKEZMÉNY Legyen \mathcal{H} Vapnik-Cservonenkisz-dimenziója k , ekkor minden $\varepsilon > 0$ -ra van (V, \mathcal{H}) -ban olyan S ε -háló, melyre

$$|S| \leq 8 \frac{k}{\varepsilon} \ln \frac{k}{\varepsilon}.$$

A fenti bizonyítás módosításával belátható:

6.5 KÖVETKEZMÉNY Legyen \mathcal{H} Vapnik-Cservonenkisz-dimenziója k , ekkor minden $\varepsilon > 0$ -ra van (V, \mathcal{H}) -ban olyan S ε -minta, hogy

$$|S| \leq \text{const} \frac{k}{\varepsilon^2} \ln \frac{k}{\varepsilon}.$$

6.6 KÖVETKEZMÉNY Legyen V egy n elemű ponthalmaz a síkban. Ekkor van olyan $S \subseteq V$ halmaz, hogy minden T háromszögre

$$\left| \frac{|T \cap S|}{|S|} - \frac{|T \cap V|}{|V|} \right| \leq \varepsilon,$$

és

$$|S| \leq \text{const} \frac{1}{\varepsilon^2} \ln \frac{1}{\varepsilon}.$$

6.7 KÖVETKEZMÉNY Legyen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ olyan integrálható függvény, melyre $\int f = 1$. Ekkor van olyan $S \subseteq \mathbb{R}^2$ véges halmaz, melyre minden T háromszögre

$$\left| \int_T f - \frac{|T \cap S|}{|S|} \right| \leq \varepsilon,$$

és

$$|S| \leq \text{const} \frac{1}{\varepsilon^2} \ln \frac{1}{\varepsilon}.$$

7 *Szitamódszerek

Legyenek A_1, \dots, A_n tetszőleges események. Minden $I \subseteq [n] = \{1, \dots, n\}$ halmazra legyen $A_I = \bigwedge_{i \in I} A_i$. A szitaformula szerint

$$\mathbb{P}(\bar{A}_1 \wedge \dots \wedge \bar{A}_n) = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \mathbb{P}(A_I).$$

7.1 Bonferoni egyenlőtlenségek

Legyen $k \geq 0$ egész. Ha k páros, akkor

$$\mathbb{P}(\bar{A}_1 \wedge \dots \wedge \bar{A}_n) \leq \sum_{|I| \leq k} (-1)^{|I|} \mathbb{P}(A_I), \quad (9)$$

míg ha k páratlan, akkor

$$\mathbb{P}(\bar{A}_1 \wedge \dots \wedge \bar{A}_n) \geq \sum_{|I| \leq k} (-1)^{|I|} \mathbb{P}(A_I). \quad (10)$$

7.2 Brunn szita

Legyen $f(k) \geq 0$ tetszőleges egészértékű függvény az $\{1, \dots, n\}$ halmazon, és legyen

$$\mathcal{I} = \{I \subseteq \{1, \dots, n\} : |I \cap \{1, \dots, k\}| \leq 2f(k), k = 1, \dots, n\}.$$

Ekkor

$$\mathbb{P}(\bar{A}_1 \wedge \dots \wedge \bar{A}_n) \leq \sum_{I \in \mathcal{I}} (-1)^{|I|} \mathbb{P}(A_I).$$

7.3 Selberg szita

7.1 LEMMA Minden $I \subseteq [n]$ részhalmazhoz legyen λ_I egy valós szám, továbbá $\lambda_\emptyset = 1$. Ekkor

$$\mathbb{P}(\bar{A}_1 \wedge \dots \wedge \bar{A}_n) \leq \sum_{I, J \subseteq \{1, \dots, n\}} \lambda_I \lambda_J \mathbb{P}(A_{I \cup J}). \quad (11)$$

Megjegyezzük, hogy $\lambda_I = (-1)^{|I|}$ választással az egyenlőség teljesül.

Legyen $0 < a_i < 1$, $b_i = 1 - a_i$, $a_I = \prod_{i \in I} a_i$ és $b_I = \prod_{i \in I} b_i$. Minden $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszerre és $J \subseteq [n]$ halmazra legyen

$$\mathcal{A}/J = \{I \subseteq [n] \setminus J : I \cup J \in \mathcal{A}\}, \quad Q_{\mathcal{A}} = \sum_{I \in \mathcal{A}} \frac{a_I}{b_I}, \quad Q_J = Q_{\mathcal{A}/J} = \sum_{\substack{I \subseteq [n] \setminus J \\ I \cup J \in \mathcal{A}}} \frac{a_I}{b_I}.$$

Megjegyezzük, hogy $\mathcal{A}/J \subseteq \mathcal{A}$, így $Q_{\mathcal{A}/J} \leq Q_{\mathcal{A}}$.

7.2 LEMMA Legyen $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$ egy leszálló halmazrendszer. Ekkor

$$\sum_{I, J \in \mathcal{A}} \lambda_I \lambda_J a_{I \cup J} \quad (12)$$

minimuma a $\lambda_\emptyset = 1$ feltétel mellett $1/Q_{\mathcal{A}}$, amit a

$$\lambda_I = (-1)^{|I|} \frac{Q_{\mathcal{A}/I}}{b_I Q_{\mathcal{A}}} \quad (13)$$

választás ad.

BIZONYÍTÁS. Alakítsuk át (12)-et:

$$\begin{aligned} \sum_{I, J} \lambda_I \lambda_J a_{I \cup J} &= \sum_{I, J} \lambda_I \lambda_J \frac{a_I a_J}{a_{I \cap J}} = \sum_{I, J} \lambda_I \lambda_J a_I a_J \sum_{K \subseteq I \cap J} \frac{b_K}{a_K} \\ &= \sum_K \frac{b_K}{a_K} \sum_{K \subseteq I} \sum_{J \supseteq K} \lambda_I \lambda_J a_I a_J = \sum_K \frac{b_K}{a_K} \left(\sum_{I \supseteq K} a_I \lambda_I \right)^2 = \sum_K \frac{b_K}{a_K} \mu_K^2, \end{aligned}$$

ahol

$$\mu_K = \sum_{I \supseteq K} a_I \lambda_I. \quad (14)$$

Itt λ_I -t kifejezhetjük a μ_K -kkal:

$$\lambda_I = \frac{1}{a_I} \sum_{K \supseteq I} (-1)^{|K-I|} \mu_K, \quad (15)$$

mert a μ_K -k nyilvánvalóan meghatározzák a λ_I -ket és a (15) által definiált λ_I -k kielégítik (14)-et. A (14) és (15) egyenletekből következik, hogy $\lambda_I = 0$ minden $I \notin \mathcal{A}$ -ra akkor és csak akkor, ha $\mu_I = 0$ minden $I \notin \mathcal{A}$ -ra. Így (12) minimuma a $\lambda_0 = 1$ feltétel mellett ugyanaz, mint

$$\sum_{K \in \mathcal{A}} \frac{b_K}{a_K} \mu_K^2 \quad (16)$$

minimuma a

$$\sum_{K \in \mathcal{A}} (-1)^{|K|} \mu_K = 1 \quad (17)$$

feltétel mellett. Tovább alakítva

$$\sum_{K \in \mathcal{A}} \frac{b_K}{a_K} \mu_K^2 = \sum_{K \in \mathcal{A}} \frac{a_K}{b_K} \left(\frac{b_K}{a_K} \mu_K - \frac{(-1)^{|K|}}{Q_{\mathcal{A}}} \right)^2 + \frac{1}{Q_{\mathcal{A}}}. \quad (18)$$

Mivel

$$\mu_K = \frac{(-1)^{|K|}}{Q_{\mathcal{A}}} \cdot \frac{a_K}{b_K} \quad (19)$$

a változóknak egy olyan választása, mely minimalizálja (18) jobboldalát, és ugyanakkor kielégíti a (17) feltételt, azt kapjuk, hogy a (16) minimuma $1/Q_{\mathcal{A}}$ és (19) adja a μ -k optimális választását. Ebből (15) alapján λ_I értéke is könnyen adódik. \square

7.3 KÖVETKEZMÉNY Legyen $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$ egy leszálló halmazrendszer és $\varepsilon > 0$. Tegyük fel, hogy minden $K \in \mathcal{A}$ halmazra $|\mathbb{P}(A_K) - a_K| < \varepsilon$. Ekkor

$$\mathbb{P}(\bar{A}_1 \dots \bar{A}_n) \leq \frac{1}{Q_{\mathcal{A}}} + \varepsilon \left(\sum_{I \in \mathcal{A}} \frac{Q_I}{Q_{\mathcal{A}I}} \right)^2.$$

BIZONYÍTÁS. Legyen $\mathbb{P}(A_K) = a_K + r_K$, ahol $|r_K| \leq \varepsilon$, és legyen λ a (13) szerint választva. Ekkor a 7.1 Lemma szerint

$$\mathbb{P}(\bar{A}_1 \dots \bar{A}_n) \leq \sum_{I, J \subseteq \{1, \dots, n\}} \lambda_I \lambda_J \mathbb{P}(A_{I \cup J}) = \sum_{I, J \subseteq \{1, \dots, n\}} \lambda_I \lambda_J a_{I \cup J} + \sum_{I, J \subseteq \{1, \dots, n\}} \lambda_I \lambda_J r_{I \cup J}.$$

Itt a 7.2 Lemma szerint az első tag $\frac{1}{Q_{\mathcal{A}}}$, a második pedig így becsülhető:

$$\left| \sum_{I, J \subseteq \{1, \dots, n\}} \lambda_I \lambda_J r_{I \cup J} \right| \leq \varepsilon \sum_{I, J \subseteq \{1, \dots, n\}} |\lambda_I| \cdot |\lambda_J| = \varepsilon \left(\sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} |\lambda_I| \right)^2.$$

Innen (13) alapján következik a Lemma. \square

Megjegyezzük, hogy a maradéktag így alakítható át:

$$\sum_{I \in \mathcal{A}} \frac{Q_I}{Q_{\mathcal{A}I}} = \frac{1}{Q_{\mathcal{A}}} \sum_{I \in \mathcal{A}} \sum_{\substack{K \supseteq I \\ K \in \mathcal{A}}} \frac{a_{K \setminus I}}{b_K} = \frac{1}{Q_{\mathcal{A}}} \sum_{K \in \mathcal{A}} \frac{1}{b_K} \sum_{I \subseteq K} a_{K \setminus I} = \frac{1}{Q_{\mathcal{A}}} \sum_{K \in \mathcal{A}} \prod_{i \in K} \frac{1 + a_i}{1 - a_i}.$$

7.4 KÖVETKEZMÉNY Legyen $\varepsilon, \delta > 0$, és tegyük fel, hogy az előző következmény feltételei mellett

$$\prod_{i \in K} \left(1 + \frac{1}{a_i}\right) \leq C$$

minden $I \in \mathcal{A}$ halmazra. Ekkor

$$\mathbb{P}(\bar{A}_1 \dots \bar{A}_n) \leq \frac{1}{Q_{\mathcal{A}}} + \varepsilon C^2.$$

BIZONYÍTÁS. A 7.3 Következménybeli maradéktagot kell becsülnünk:

$$\sum_{K \in \mathcal{A}} \prod_{i \in K} \frac{1 + a_i}{1 - a_i} = \sum_{K \in \mathcal{A}} \prod_{i \in K} \left(1 + \frac{1}{a_i}\right) \frac{a_i}{1 - a_i} \leq a \sum_{K \in \mathcal{A}} \prod_{i \in K} \frac{a_i}{1 - a_i} = C Q_{\mathcal{A}},$$

és így a maradéktag legfeljebb εC^2 . □

Alkalmazásként bebizonyítjuk a következő számelméleti tételt:

7.5 KÖVETKEZMÉNY Minden elég nagy x számra

$$\pi(x) \leq 4 \frac{x}{\ln x}.$$

BIZONYÍTÁS. Legyenek p_1, \dots, p_n a \sqrt{x} -nél nem nagyobb prímszámok, és a korábbiakhoz hasonlóan legyen $p_K = \prod_{i \in K} p_i$. Legyen $a_i = 1/p_i$. Legyen $M = \lfloor x^{2/5} \rfloor$, és legyen $\mathcal{A} = \{K \subseteq [n] : p_K \leq M\}$. Legyen z az $[x]$ halmazból egyenletes eloszlás szerint választott véletlen szám, és jelölje A_i azt az eseményt, hogy $p_i \mid z$. Ekkor

$$\mathbb{P}(\bar{A}_1 \dots \bar{A}_n) = \mathbb{P}(z \text{ prím}, z > \sqrt{x}) = \frac{\pi(x) - \pi(\sqrt{x})}{x},$$

és így

$$\pi(x) = \mathbb{P}(\bar{A}_1 \dots \bar{A}_n)x + O(\sqrt{x}). \tag{20}$$

A 7.4 Következményt alkalmazzuk. Minden $K \subseteq [n]$ halmazra

$$\mathbb{P}(A_K) = \mathbb{P}(p_K \mid z) = \frac{1}{x} \left\lfloor \frac{x}{p_K} \right\rfloor,$$

és így

$$|\mathbb{P}(A_K) - a_K| < \frac{1}{x}$$

minden $K \subseteq [n]$ halmazra. Továbbá ha $K \in \mathcal{A}$, akkor

$$\prod_{i \in K} \left(1 + \frac{1}{a_i}\right) = \prod_{i \in K} (1 + p_i) \leq M \prod_{i \in K} \left(1 + \frac{1}{p_i}\right) < M \exp\left(\sum_{i \in K} \frac{1}{p_i}\right).$$

Itt

$$\sum_{i \in K} \frac{1}{p_i} \leq \sum_{p < M} \frac{1}{p} < \ln \ln x,$$

és így

$$\prod_{i \in K} \left(1 + \frac{1}{a_i}\right) < M \exp(\ln \ln x) \leq x^{1/3} \ln x.$$

Tehát a 7.4 Következmény feltételei teljesülnek $\varepsilon = 1/x$ és $C = x^{1/3} \ln x$ választással, és ezért

$$P(\bar{A}_1 \dots \bar{A}_n) \leq \frac{1}{Q_{\mathcal{A}}} + \frac{1}{x} x^{2/3} (\ln x)^2 = \frac{1}{Q_{\mathcal{A}}} + x^{-1/3} (\ln x)^2.$$

Az első tag becsléséhez

$$Q = \sum_{K \in \mathcal{A}} \frac{a_K}{b_K} = \sum_{K \in \mathcal{A}} \prod_{i \in K} \frac{a_i}{1 - a_i} = \sum_{K \in \mathcal{A}} \prod_{i \in K} (a_i + a_i^2 + \dots) = \sum_{K \in \mathcal{A}} \prod_{i \in K} \left(\frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \dots\right).$$

Az utóbbi szorzatot kifejtve, $\frac{1}{k}$ alakú tagokat kapunk, és biztosan megkapunk minden olyan tagot, melyben $k \leq M$. Így

$$Q_{\mathcal{A}} \geq \sum_{k=1}^M \frac{1}{k} > \frac{1}{3} \ln x.$$

Így

$$\frac{1}{Q_{\mathcal{A}}} + x^{-1/3} (\ln x)^2 \leq \frac{3}{\ln x} + x^{-1/3} (\ln x)^2 \leq \frac{3 + o(1)}{\ln x}.$$

Ebből (20) alapján

$$\pi(x) \leq \frac{(3 + o(1))x}{\ln x} + O(\sqrt{x}) = \frac{3 + o(1)x}{\ln x}.$$

□

7.6 MEGJEGYZÉS 1. Gondosabb számolással a 4-es konstans $2 + o(1)$ -re csökkenthető. A Selberg-szítást használva a pontos $1 + o(1)$ is bizonyítható, de az sokkal bonyolultabban.

2. A $\pi(x) = O(x/\ln x)$ becslés a fenténél egyszerűbb elemi eszközökkel is bizonyítható (lásd pl. Erdős-Surányi [2]). A Selberg-szita azonban más irányú általánosításokhoz is használható, például a fenti bizonyításhoz hasonlóan levezethető a következő tétel.

7.7 KÖVETKEZMÉNY Legyen $0 < l < k$, és legyen x a k -hoz képest elég nagy szám. Ekkor az $l, k + l, \dots, k(x - 1) + l$ számtani sorozatban előforduló prímek száma nem nagyobb, mint

$$3 \cdot \frac{k}{\varphi(k)} \cdot \frac{x}{\log x}.$$

8 Regularitási Lemma

Szemerédi Regularitási Lemmája azt mondja ki, hogy minden nagy, sűrű gráf (azaz az élek száma n^2 -tel arányos) felbontható olyan részekre, melyek többségükben véletlenszerűek.

Legyen $G = (V, E)$ egyszerű páros gráf, és $V = A \cup B$ a két-színezése. Akkor mondjuk, hogy G ε -véletlenszerű, ha bármely két $X \subseteq A$ és $Y \subseteq B$ halmazra

$$\left| e_G(X, Y) - \frac{eG(A, B)}{|A| \cdot |B|} |X| \cdot |Y| \right| \leq \varepsilon |A| \cdot |B|.$$

8.1 LEMMA (REGULARITÁSI LEMMA) Minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $K(\varepsilon)$ pozitív egész szám, hogy minden egyszerű $G = (V, E)$ gráfnak van olyan $V = V_1 \cup \dots \cup V_k$ partíciója, hogy $1/\varepsilon \leq k \leq K(\varepsilon)$, minden i -re $\lfloor |V|/k \rfloor \leq |V_i| \leq \lceil |V|/k \rceil$, és legfeljebb εk^2 (i, j) számpár kivételével a V_i és V_j közötti élek által alkotott páros gráf ε -véletlenszerű.

9 *Korrelációs egyenlőtlenségek

9.1 A 4-Függvény Tétel

Bármely S halmaz és $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq 2^S$ esetén legyen $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{A \cup B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{A \cap B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ és $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \{A \setminus B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$. Bármely $\alpha : 2^S \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvényre legyen $\alpha(\mathcal{A}) = \sum_{A \in \mathcal{A}} \alpha(A)$.

9.1 TÉTEL (AHLWEDE-DAYKIN 4-FÜGGVÉNY-TÉTELE) Legyen S véges halmaz és $\alpha, \beta, \gamma, \delta : 2^S \rightarrow \mathbb{R}_+$ olyan halmazfüggvények, melyekre

$$\alpha(A)\beta(B) \leq \gamma(A \cup B)\delta(A \cap B)$$

teljesül bármely két $A, B \subseteq S$ halmazra. Ekkor

$$\alpha(\mathcal{A})\beta(\mathcal{B}) \leq \gamma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})\delta(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$$

teljesül bármely két $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq 2^S$ halmazrendszerre.

9.2 KÖVETKEZMÉNY Legyen L véges disztributív háló, és $\alpha, \beta, \gamma, \delta : L \rightarrow \mathbb{R}_+$ olyan függvények, melyekre

$$\alpha(x)\beta(y) \leq \gamma(x \vee y)\delta(x \wedge y)$$

teljesül bármely két $x, z \in L$ elemre. Ekkor

$$\alpha(X)\beta(Y) \leq \gamma(X \vee Y)\delta(X \wedge Y)$$

teljesül bármely két $X, Y \subseteq L$ halmazra.

(Itt $X \vee Y = \{x \vee y : x \in X, y \in Y\}$, és $\alpha(X) = \sum_{x \in X} \alpha(x)$ stb.)

9.3 KÖVETKEZMÉNY Legyen L véges disztributív háló, és legyen $X, Y \subseteq L$. Ekkor

$$|X| \cdot |Y| \leq |X \vee Y| \cdot |X \wedge Y|.$$

9.4 KÖVETKEZMÉNY (MARICA-SCHÖNHEIM) Legyen S véges halmaz és $\mathcal{H} \subseteq 2^S$. Ekkor

$$|\mathcal{H} \setminus \mathcal{H}| \geq |\mathcal{H}|.$$

9.5 TÉTEL (KLEITMAN) Legyen S véges halmaz és legyen $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq 2^S$. Ha \mathcal{A}, \mathcal{B} mindkettő leszálló vagy fölszálló, akkor

$$|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| \geq 2^{-n} |\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}|,$$

míg ha \mathcal{A}, \mathcal{B} egyike leszálló, másika fölszálló, akkor

$$|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| \leq 2^{-n} |\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}|.$$

Ezt így is fogalmazhatjuk:

9.6 KÖVETKEZMÉNY Legyen S véges halmaz, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq 2^S$, és legyen X az S egy véletlen részhalmaza (egyenletesen választva az összes közül). Ha \mathcal{A}, \mathcal{B} mindkettő leszálló vagy fölszálló, akkor

$$P(X \in \mathcal{A}, X \in \mathcal{B}) \geq P(X \in \mathcal{A})P(X \in \mathcal{B}),$$

míg ha \mathcal{A}, \mathcal{B} egyike leszálló, másika fölszálló, akkor

$$P(X \in \mathcal{A}, X \in \mathcal{B}) \leq P(X \in \mathcal{A})P(X \in \mathcal{B}).$$

9.2 Az FKG Egyenlőtlenség

9.7 TÉTEL (FORTUIN–KASTELEYN–GINIBRE) Legyen L véges disztributív háló, és $\mu : L \rightarrow \mathbb{R}_+$ olyan függvény, melyre

$$\mu(x)\mu(y) \leq \mu(x \vee y)\mu(x \wedge y)$$

teljesül bármely két $x, z \in L$ elemre (logszubmoduláris függvény). Ekkor bármely két monoton növekvő $f, g : L \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvényre

$$\left(\sum_{x \in L} \mu(x)f(x) \right) \left(\sum_{x \in L} \mu(x)g(x) \right) \leq \left(\sum_{x \in L} \mu(x)f(x)g(x) \right) \left(\sum_{x \in L} \mu(x) \right).$$

Másszóval,

9.8 KÖVETKEZMÉNY Legyen L véges disztributív háló, és $\mu : L \rightarrow \mathbb{R}_+$ olyan valószínűségeloszlás L -en, melyre

$$\mu(x)\mu(y) \leq \mu(x \vee y)\mu(x \wedge y)$$

teljesül bármely két $x, z \in L$ elemre. Legyen X véletlen pont a μ eloszlásból. Ekkor bármely két monoton növekvő $f, g : L \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvényre

$$E(f(X))E(g(X)) \leq E(f(x)g(x)).$$

9.3 Parciális rendezések lineáris kiterjesztései

Legyen (P, \leq) egy véges parciálisan rendezett halmaz, és legyen \mathcal{L} a lineáris kiterjesztéseinek halmaza. \mathcal{L} elemeit úgy is tekintjük, mint monoton bijektív $P \rightarrow \{1, \dots, |P|\}$ leképezéseket. Legyen \preceq egy véletlen lineáris kiterjesztés.

9.9 TÉTEL Bármely három $a, b, c \in P$ elemre

$$P(a \preceq b, a \preceq c) \geq P(a \preceq b)P(a \preceq c).$$

10 Közelítő leszámolás és mintavétel

10.1 Színezések száma

Legyen $p(G, k)$ a G gráf k színnel való színezéseinek száma ($k \in \mathbb{Z}_+$). Ennek pontos kiszámítása NP-nehéz.

10.1.1 Visszavezetés a mintavételre

Ha egy élt elhagyva a maradék gráfhoz tudunk egy véletlen k -színezést generálni (közelítőleg) egyenletes eloszlás szerint, akkor ebből meg tudjuk mondani, hogy a színezések hányad része színezi egyformán az elhagyott él végpontjait, vagyis, hogy az élt elhagyva milyen tényezővel nő a k -színezések száma. Így rekurzíve meg tudjuk becsülni a k -színezések számát.

Itt fel fogjuk tenni, hogy $k > 2D$, ahol D a maximális fok. Így a színezések száma $(k/2)^n$ és k^n között van.

10.1.2 Véletlen színezés Markov láncsal

Egy n csúcsú G gráf k -színezései közül akarunk egyet véletlenszerűen kiválasztani. Legyen a gráf maximális fokszáma D . Adott α színezéshez generálunk véletlenszerűen egy α' színezést a következőképpen. Egyenletes eloszlás szerint kiválasztunk egy i csúcst és egy a színt; ezt az (i, a) párt a lépés *magjának* nevezzük. Ha

$$\alpha'(j) = \begin{cases} a & \text{ha } i = j, \\ \alpha(j) & \text{egyébként.} \end{cases}$$

legális színezés, akkor legyen ez az új színezés; ellenkező esetben legyen $\alpha' = \alpha$. Így egy reverzibilis Markov láncot (irányítatlan gráfon való bolyongást) kapunk. Vegyük észre, hogy a gráf $D = kn$ fokú reguláris.

10.1.3 Markov-láncok és bolyongás reguláris gráfokon

Most csak reguláris, összefüggő, irányítatlan H gráfon való bolyongásokat vizsgálunk. Legyen $p = |V(H)|$.

Átmeneti mátrix: $M = (M_{ij})$, ahol D -edfokú reguláris irányítatlan H gráfon való bolyongás esetén $M_{ij} = a_{ij}/D$, ahol $A = (a_{ij})$ a H gráf adjacencia mátrixa. Ha (v^0, v^1, \dots) egy bolyongás, akkor

$$P(v_{t+1} = j \mid v_t = i) = P(v_{t+1} = j \mid v_t = i, v_{t-1}, \dots) = M_{ij}.$$

Nyilván M szimmetrikus és $M\mathbb{1} = \mathbb{1}$, tehát $\mathbb{1}$ M -nek sajátvektora, a hozzátartozó sajátérték 1. M szimmetrikus, és ezért a sajátértékei valósak: $1 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$.

10.1 ÁLLÍTÁS Ha H páros gráf, akkor $\lambda_n = -1$. Ha H nem páros gráf, akkor $\lambda_n > -1$.

Legyen $\mu = \max(|\lambda_2|, |\lambda_n|)$ és $\delta = 1 - \mu$.

10.1.4 Sajátérték-hézag és keverés

10.2 LEMMA *Bármely két i, j csúcsra*

$$|\mathbb{P}(v^t = j \mid v^0 = i) - \frac{1}{p}| \leq \mu^t.$$

10.3 KÖVETKEZMÉNY *Ha G nem páros összefüggő gráf, akkor*

$$\mathbb{P}(v^t = j \mid v^0 = i) \longrightarrow \frac{1}{p} \quad (t \rightarrow \infty).$$

10.4 KÖVETKEZMÉNY *Ha G nem páros összefüggő gráf, és $t \geq (1/\delta) \ln(p/\varepsilon)$, akkor minden $S \subseteq V$ halmazra*

$$\left| \mathbb{P}(v^t \in S \mid v^0 = i) - \frac{|S|}{p} \right| \leq \varepsilon.$$

Valóban,

$$\left| \mathbb{P}(v^t \in S \mid v^0 = i) - \frac{|S|}{p} \right| \leq p\mu^t = p(1 - \delta)^t \leq e^{\ln p - \delta t} \leq \varepsilon.$$

BIZONYÍTÁS (10.2 LEMMA). Legyen $\{v_1, \dots, v_p\}$ egy M sajátvektoraiból álló ortonormált bázis, $Mv_i = \lambda_i v_i$. Ekkor

$$M = \sum_{k=1}^p \lambda_k v_k v_k^\top,$$

és így

$$\mathbb{P}(v^t = j \mid v^0 = i) = e_i^\top M^t e_j = \sum_{k=1}^p \lambda_k^t (v_k^\top e_i)(v_k^\top e_j).$$

Mivel $v_1 = (1/\sqrt{p}) \mathbb{1}$, itt a $k = 1$ -nek megfelelő tag

$$\lambda_1^t (v_1^\top e_i)(v_1^\top e_j) = \frac{1}{p}.$$

A többi tag így becsülhető:

$$\left| \sum_{k=2}^p \lambda_k^t v_k v_k^\top \right| \leq \mu^t \sum_{k=2}^p |v_k^\top e_i| \cdot |v_k^\top e_j|.$$

A második tényező pedig a Cauchy–Schwarz egyenlőtlenség felhasználásával:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^p |v_k^\top e_i| \cdot |v_k^\top e_j| &\leq \left(\sum_{k=2}^p (v_k^\top e_i)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=2}^p (v_k^\top e_j)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^p (v_k^\top e_i)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^p (v_k^\top e_j)^2 \right)^{1/2} = |e_i| \cdot |e_j| = 1. \end{aligned}$$

□

10.5 MEGJEGYZÉS *Lusta bolyongás: $M_{ii} \geq 1/2$. Bármely bolyongást csinálhatjuk lustán, hogy minden lépésben $1/2$ valószínűséggel helyben maradunk. Lusta bolyongásra M pozitív szemidefinit, tehát csak λ_2 -t kell figyelembe venni.*

10.1.5 Csatolás és keverés

Sajnos esetünkben (színezések) a sajátértékeket nem tudjuk kiszámítani. Ezért más módszerrel becsüljük meg a keverési időt.

10.6 LEMMA Legyen (v^0, v^1, \dots) és (u^0, u^1, \dots) két (nem független!) bolyongás ugyanazon a gráfon, ahol u_0 véletlen csúcs az egyenletes eloszlásból. Ekkor bármely $S \subseteq V$ halmazra

$$\left| \mathbb{P}(v^t \in S) - \frac{|S|}{p} \right| \leq \mathbb{P}(v^t \neq u^t).$$

BIZONYÍTÁS. Ha u^0 egyenletes, akkor u^t is egyenletes eloszlású minden t -re. Ezért

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(v^t \in S) - \frac{|S|}{p} &= \mathbb{P}(v^t \in S) - \mathbb{P}(u^t \in S) \\ &= \mathbb{P}(v^t \in S \mid u^t = v^t)\mathbb{P}(u^t = v^t) + \mathbb{P}(v^t \in S \mid u^t \neq v^t)\mathbb{P}(u^t \neq v^t) \\ &\quad - \mathbb{P}(u^t \in S \mid u^t = v^t)\mathbb{P}(u^t = v^t) - \mathbb{P}(u^t \in S \mid u^t \neq v^t)\mathbb{P}(u^t \neq v^t) \\ &= (\mathbb{P}(v^t \in S \mid u^t \neq v^t) - \mathbb{P}(u^t \in S \mid u^t \neq v^t))\mathbb{P}(u^t \neq v^t). \end{aligned}$$

Innen a lemma következik. □

10.1.6 Keverés a kockán

Legyen (v^0, v^1, \dots) lusta bolyongás a d -dimenziós Q^d kocka élhálóján. Megbecsülhetjük a keverési időt sajátértékekkel vagy csatolással.

10.7 ÁLLÍTÁS A Q^d kockán $t = cn \ln n$ lépés után bármely $S \subseteq V(Q^d)$ halmazra

$$\left| \mathbb{P}(v^t \in S) - \frac{|S|}{2^d} \right| \leq \frac{1}{c}.$$

10.1.7 Csatolás a színezések gráfján

Két adott α^0 és β^0 színezésből kiindulva, konstruáljuk meg az $\alpha^0, \alpha^1, \dots$ és β^0, β^1, \dots bolyongásokat úgy, hogy minden lépésben ugyanazt a véletlen magot használjuk. Ezt a csatolást egyszerű csatolásnak nevezzük.

10.8 TÉTEL (JERRUM) Ha $D > 3k$, akkor két egyszerűen csatolt $\alpha^0, \alpha^1, \dots$ és β^0, β^1, \dots színezés-sorozatra

$$\mathbb{P}(\alpha^s \neq \beta^s) \leq \frac{kn^2}{s}.$$

BIZONYÍTÁS. Legyen $U^t = \{i \in V : \alpha^t(i) \neq \beta^t(i)\}$, $W^t = V \setminus U^t$ és $X^t = |U^t|$. Minden $i \in V$ -re jelölje a_i az i -ből az $\{U^t, W^t\}$ partíció másik oldalára menő élek számát. Azt állítjuk, hogy

$$\mathbb{E}(X^{t+1} \mid X^t > 0) \leq X^t - \frac{1}{kn}. \quad (21)$$

Valóban, legyen (i, a) a t -edik lépés magja. Ha $i \in U^t$, akkor $X^t - 1 \leq X^{t+1} \leq X^t$, és

$$\mathbb{P}(X^{t+1} = X^t - 1 \mid i) \geq \frac{k - 2d_i + a_i}{k}. \quad (22)$$

Ha $i \in W^t$, akkor $X^t \leq X^{t+1} \leq X^t + 1$, és

$$\mathbb{P}(X^{t+1} = X^t + 1 \mid i) \leq \frac{2a_i}{k}. \quad (23)$$

Így

$$\mathbb{E}(X^{t+1}) \leq X^t - \sum_{i \in U^t} \frac{k - 2d_i + a_i}{kn} + \sum_{i \in W^t} \frac{2a_i}{kn}.$$

Felhasználva, hogy

$$\sum_{i \in U^t} a_i = \sum_{i \in W^t} a_i,$$

azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(X^{t+1}) \leq X^t - \sum_{i \in U^t} \frac{k - 2d_i - a_i}{kn} \leq X^t - \sum_{i \in U^t} \frac{k - 3d_i}{kn}.$$

Ha U^t nem üres, akkor a kivont összeg legalább $1/(kn)$, és így (21) következik.

A (21) egyenletet így is írhatjuk:

$$\mathbb{E}\left(X^{t+1} + \frac{t+1}{kn} \mid X^t > 0\right) \leq X^t + \frac{t}{kn}, \quad (24)$$

vagyis $X^t + \frac{t}{kn}$ szupermartingál, legalábbis amíg $X^t > 0$. Legyen $T_0 = \min\{t : X^t = 0\}$, és $T = \min\{s, T_0\}$. Ekkor a szupermartingálokra vonatkozó megállási tétel (4.1 Tétel) szerint

$$\mathbb{E}\left(X^T + \frac{T}{kn}\right) \leq X^0 \leq n.$$

Másrészt

$$\mathbb{E}\left(X^T + \frac{T}{kn}\right) \geq \frac{1}{kn} \mathbb{E}(T) \geq \frac{1}{kn} \mathbb{P}(X^T > 0)s = \frac{1}{kn} \mathbb{P}(\alpha^s \neq \beta^s)s.$$

Ezt a két becslést összevetve, a tétel adódik. \square

Ferde csatolásnak nevezzük a következőt. Az α^t és β^t színezésekhez generálunk egy véletlen (i, a) magot, ezt használjuk az α^{t+1} előállítására. Ha $\alpha^t(i) \neq \beta^t(i)$, akkor az (i, a) magot használjuk β^{t+1} előállítására is. Ha $\alpha^t(i) = \beta^t(i)$, akkor legyen $S = \alpha^t(N(i)) \setminus \beta^t(N(i))$ és $T = \beta^t(N(i)) \setminus \alpha^t(N(i))$. Legyen S' és T' két olyan halmaz, melyre $S' \subseteq S$, $T' \subseteq T$, és $|S'| = |T'| = \min\{|S|, |T|\}$. Legyen $\phi : S' \rightarrow T'$ tetszőleges bijekció. Ha $a \in S'$, legyen $b = \phi(a)$; ha $a \in T'$, legyen $b = \phi^{-1}(a)$; minden egyéb esetben legyen $b = a$. A β^{t+1} előállítására használjuk az (i, b) magot.

10.9 TÉTEL (JERRUM) *Ha $D > 2k$, akkor két ferdén csatolt $\alpha^0, \alpha^1, \dots$ és β^0, β^1, \dots színezéssorozatra*

$$\mathbb{P}(\alpha^s \neq \beta^s) \leq \frac{kn^2}{s}.$$

A bizonyítás lényege, hogy (22) továbbra is igaz, míg (23) helyett az élesebb

$$P(X^{t+1} = X^t + 1 \mid i) \leq \frac{a_i}{k}$$

egyenlőtlenség áll (csak kicsit nehezebb belátni). Ebből következik, hogy (21) most is igaz, és a bizonyítás ugyanúgy fejezhető be.

10.2 *További példák

10.2.1 Teljes párosítások száma

Legyen $\Phi(G)$ a G gráf teljes párosításainak száma. Ennek pontos kiszámítása NP-nehéz (sőt #P-teljes). Ha tudunk egy véletlen teljes párosítást generálni, (közelítőleg) egyenletes eloszlásból, akkor ebből meg tudjuk mondani, hogy a párosítások hányad része tartalmaz egy adott élt, vagyis, hogy az élt elhagyva, milyen tényezővel csökken a teljes párosítások száma. Így rekurzíve meg tudjuk becsülni a teljes párosítások számát.

10.2.2 Lineáris kiterjesztések száma

Legyen $P = (V, \leq)$ egy parciálisan rendezett véges halmaz, és legyen $\eta(P)$ a P parciális rendezés teljes rendezéssé való kiterjesztéseinek száma. Ennek pontos kiszámítása megint csak NP-nehéz. Ha tudunk egy véletlen kiterjesztést generálni (közelítőleg) egyenletes eloszlás szerint, akkor ebből meg tudjuk mondani, hogy a kiterjesztések hányad része rendez egy eredetileg nem összehasonlítható $x, y \in V$ párt egyik vagy másik sorrendben, vagyis, hogy mondjuk az $x < y$ relációt (és ennek minden következményét) a rendezéshez hozzávéve, milyen tényezővel csökken a kiterjesztések száma. Így rekurzíve meg tudjuk becsülni a kiterjesztések számát.

10.3 *Konduktancia

Egy $\emptyset \subset S \subset V$ halmaz *konduktanciája*

$$\Phi(S) = \frac{\sum_{i \in S, j \notin S} \pi_i p_{ij}}{\pi(S)\pi(V \setminus S)}.$$

A Markov-lánc *konduktanciája*

$$\Phi = \min_{\emptyset \subset S \subset V} \Phi(S).$$

10.10 TÉTEL (JERRUM–SINCLAIR)

$$\frac{\Phi^2}{8} \leq 1 - \lambda_2 \leq \Phi.$$

10.11 KÖVETKEZMÉNY *Lusta bolyongásra*

$$|P(v^t \in S) - \pi(S)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi_0}} e^{-t\Phi^2/8}.$$

A 10.10 tételben az alsó korlát egyszerű. A felső korlátot az alábbi alakban bizonyítjuk. Legyen $x \in \mathbb{R}^V$ olyan vektor, melyre $\sum_i \pi_i x_i = 0$. Ekkor

$$\sum_{i,j} \pi_i p_{ij} (y_i - y_j)^2 \geq \frac{\Phi^2}{8} \sum_i \pi_i y_i^2.$$

10.12 LEMMA Legyen $y \in \mathbb{R}^V$ olyan vektor, melyre $\pi\{i : y_i < 0\} \leq 1/2$ és $\pi\{i : y_i > 0\} \leq 1/2$. Ekkor

$$\sum_{i,j} \pi_i p_{ij} |y_i - y_j| \geq \frac{\Phi}{2} \sum_i \pi_i |y_i|.$$

A konduktancia becslése leggyakrabban egy többtermékes folyam konstruálásával történik. Legyen $G = (V, E)$ egy irányítatlan gráf, és $i, j \in V$. Legyen \vec{E} a lehetséges irányított élek halmaza (tehát minden $e \in E$ él két elemnek felel meg \vec{E} -ban). i - j -folyamnak nevezünk egy olyan $f : \vec{E} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, melyre $f(uv) = -f(vu)$ és minden $u \in V \setminus \{i, j\}$ csúcsra $\sum_{v: uv \in \vec{E}} f(uv) = 0$. Az f folyam értéke

$$\text{val}(f) = \left| \sum_{v: iv \in \vec{E}} f(iv) \right|.$$

Többtermékes folyamnak nevezünk folyamok egy $F = (f_{ij} : i, j \in V)$ rendszerét, ahol f_{ij} egy i - j -folyam. Az F többtermékes folyam terhelése az uv élen

$$F(uv) = \sum_{i,j} |f_{ij}(uv)|.$$

Többtermékes folyamok segítségével alsó becslést adhatunk egy gráf konduktanciájára:

10.13 LEMMA Jelölje K azt a legkisebb nemnegatív számot, melyre létezik olyan $F = (f_{ij})$ többtermékes folyam, hogy minden i, j párra

$$\text{val}(f_{ij}) = \pi_i \pi_j,$$

és minden uv éltre

$$F(uv) \leq K \pi_i p_{ij}.$$

Ekkor

$$\Phi \geq \frac{1}{K}.$$

10.14 MEGJEGYZÉS Leighton és Rao egy nevezetes tétele szerint az ellenkező irányban fennáll:

$$\Phi \leq \text{const} \frac{\ln n}{K}.$$

10.4 *Véletlen teljes párosítás

(Jerrum-Sinclair).

10.5 *Megállási szabályok

11 *Elágazó leszámlálás

Legyen F k szintű gyökeres fa, melynek minden levele az alsó szinten van. Legyen N levele. Minden u levélhez legyen P_u a gyökérből u -ba vezető út. Legyen X olyan véletlen levél, melyet úgy kapunk, hogy a gyökérből kiindulva minden pontban a lefelé menő élekből egyet egyenletes eloszlás szerint választunk, és azon lépünk lefelé („naív véletlen pont”). Legyen Y egyenletesen választott véletlen pont.

Minden gyökértől levélig vezető P útra legyen $d(P)$ a le-fokok szorzata (a levelet kivéve). Ekkor

$$P(X = u) = \frac{1}{d(P_u)}.$$

Innen következik, hogy

$$\sum_u \frac{1}{d(P_u)} = 1$$

és

$$E(d(P_X)) = N.$$

A $d(P_X)$ valószínűségi változó szórása igen nagy lehet, ezért használhatóbbak az alábbi becslések:

11.1 LEMMA

$$E(\log d(P_X)) \leq \log N \leq E(\log d(P_Y)).$$

BIZONYÍTÁS. Mivel $\log x$ konkáv, a Jensen egyenlőtlenség szerint

$$E(\log d(P_Y)) = -\frac{1}{N} \sum_u \log \frac{1}{d(P_u)} \geq -\frac{1}{N} \cdot N \cdot \log \frac{1}{N} = \log N.$$

Másrészt $x \log x$ konvex, így

$$E(\log d(P_X)) = -\sum_u \frac{1}{d(P_u)} \log \frac{1}{d(P_u)} \leq N \left(-\frac{1}{N} \log \frac{1}{N} \right) = \log N.$$

Megjegyzés: $E(\log d(P_X))$ éppen az X entrópiája. □

11.1 Brégman tétele

11.2 TÉTEL (BRÉGMAN) Legyenek d_1, \dots, d_n egy egyszerű páros G gráf „alsó” pontosztályának fokszámai. Ekkor G teljes párosításainak száma legfeljebb

$$(d_1!)^{1/d_1} \dots (d_n!)^{1/d_n}.$$

11.3 MEGJEGYZÉS (a) Ha minden fok nagy, akkor ez jól közelíthető azzal, hogy $d_1 \dots d_n / e^n$. Ha a gráf d -reguláris, akkor ez $(d/e)^n$.

(b) Ha a gráf nem egyszerű, akkor csak a triviális $d_1 \dots d_n$ felső korlát mondható.

(c) V.ö. a Falikman–Jegoricsev tétellel: Ha egy gráf d -reguláris, akkor a teljes párosítások száma legalább $d^n n! / n^n \approx (d/e)^n$. Ennek Schrijver-től származó élesítése: a teljes párosítások száma legalább

$$\left(\frac{(d-1)^{d-1}}{d^{d-2}} \right)^n.$$

BIZONYÍTÁS. A 11.1 Lemma alkalmazásához vesszük az „alsó” pontok egy véletlen $\pi = (v_1, \dots, v_n)$ permutációját, és megkonstruáljuk a következő F_π fát: csúcsai azok a részleges párosítások, melyek kiterjeszthetők teljes párosítássá, és melyek v_1, \dots, v_k -t párosítják valamely k -ra; a szülőt pedig az utolsó párosítás-él elhagyásával kapjuk.

Minden M teljes párosításra, W minden π permutációjára, és minden $w \in W$ pontra jelölje $F(M, \pi, w)$ az M azon éleinek halmazát, melyekre w -t megelőző pontból indulnak ki, és legyen $a(M, \pi, w)$ a w csúcs azon szomszédainak száma, melyek párja w -t nem előzi meg a permutációban.

Fontos észrevétel: az $F(M, \pi, w)$ részleges párosítás foka az F_π fában legfeljebb $a(M, \pi, w)$. Ezért bármely M teljes párosításra

$$\log d(P_M) = \sum_{w \in W} \log d_{F_\pi}(F(M, \pi, w)) \leq \sum_{w \in W} \log a(M, \pi, w).$$

Legyen Y egy egyenletes eloszlás szerint választott teljes párosítás. Ekkor

$$\log N \leq \mathbf{E}_Y(\log d(P_Y)) \leq \sum_{w \in W} \mathbf{E}_Y(\log a(F(Y, \pi, w))).$$

Vegyük a várható értéket minden π permutációra, akkor

$$\log N \leq \sum_{w \in W} \mathbf{E}_Y \mathbf{E}_\pi(\log a(F(Y, \pi, w))).$$

De egy véletlen π permutációban w szomszédjaival párosított pontok közül a w egyforma valószínűséggel lesz első, második, \dots , $d(w)$ -edik, így

$$\mathbf{E}_\pi(\log a(F(Y, \pi, w))) = \frac{1}{d(w)} \sum_{j=1}^{d(w)} \log j = \frac{1}{d(w)} \log(d(w)!),$$

és így

$$\log N \leq \sum_{w \in W} \mathbf{E}_Y \left(\frac{1}{d(w)} \log(d(w)!) \right) = \sum_{w \in W} \frac{1}{d(w)} \log(d(w)!).$$

Ezzel Brégman tételét bebizonyítottuk. □

11.2 Közelítő leszámlálás és véletlen generálás ekvivalenciája

12 *Véletlen gráfok növekedése

12.1 Elágazó folyamatok

Legyen (p_0, p_1, \dots) valószínűségeloszlás a természetes számokon. Ez definiál egy véletlen gyökeres fát a következőképpen. A fának vannak élő és holt csúcsai. Induláskor egyetlen élő csúcsa van. Minden lépésben egy (mondjuk véletlenszerűen választott) élő csúcsa Z (élő) utódot hoz létre és meghal, ahol Z a (p_0, p_1, \dots) eloszlásból választott szám. A folyamat megáll, ha nincs élő csúcs. Jelölje T a megállás idejét. Ha a folyamat nem áll meg, akkor $T = \infty$.

Legyen $q_j = P(T = j)$ és $q(z) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j z^j$. Legyen $p(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i$. Legyen $c = E(Z) = p'(1)$.

12.1 LEMMA (a) Minden $|z| \leq 1$ esetén $q(z) = zp(q(z))$.

(d) Ha $p(z)$ konvergenciasugara nagyobb, mint 1, akkor $q(z)$ -é is, és ezért van olyan $\delta > 0$, hogy $q_j < e^{-\delta j}$.

12.2 TÉTEL (a) Ha $c < 1$, akkor 1 valószínűséggel a folyamat véges sok lépés után megáll, és $E(T)$ véges.

(b) Ha $c = 1$, akkor 1 valószínűséggel a folyamat véges sok lépés után megáll, de $E(T)$ végtelen.

(c) Ha $c > 1$, akkor pozitív valószínűséggel a folyamat végtelen sok lépésen át tart.

12.2 A legnagyobb komponens

12.3 TÉTEL A $G(n, c/n)$ gráf legnagyobb komponensének pontszáma 1-hez tartó valószínűséggel

$$\begin{cases} O(\ln n), & \text{ha } c < 1, \\ \Theta(n), & \text{ha } c > 1. \end{cases}$$

BIZONYÍTÁS. Legyen először $c < 1$. Rögzítsük egyelőre G -nek V csúcshalmazát; az éleket majd később fogjuk generálni. Vegyünk hozzá V -hez további u_1, u_2, \dots csúcsokat. Legyen v tetszőleges csúcs. Indítsunk el v -ből egy elágazó folyamatot a következőképpen. Ha már felépítettünk egy k csúcsú T fát, akkor tekintsük ennek egy élő csúcsát, és az ebből a $(V(G) \cup \{u_1, \dots, u_k\}) \setminus V(T)$ menő éleket. Minden ilyen élt p/n valószínűséggel tegyünk bele a fába.

Mivel egy csúcs utódainak várható száma $n(c/n) < 1$, a fa 1 valószínűséggel kihal, és várható mérete egy csak c -től függő K konstans. Továbbá a 12.2(d) tétel szerint van olyan $\delta > 0$, hogy

$$P(|V(T)| > j) < e^{-\delta j}.$$

Most generáljuk a $G(n, c/n)$ gráf egy példányát a következőképpen. Elhagyjuk T -ből az u_1, u_2, \dots csúcsokat, és mindazon pontpárokat, melyekről még nem döntöttünk a T konstrukciója

során, c/n valószínűséggel összekötjük. Nem nehéz meggondolni, hogy ennek a gráfnak az eloszlása tényleg $G(n, c/n)$, a $V(T) \setminus \{u_1, u_2, \dots\}$ halmazból nem lép ki él. Jelölje C_v a véletlen gráf v -t tartalmazó komponensét, akkor tehát $V(C_v) \subseteq V(T)$. (Azt sem nehéz látni, hogy majdnem mindig egyenlőség áll.) Tehát

$$P(|V(C_v)| > j) < e^{-\delta j}.$$

Legyen $k = (2 \ln n)/\delta$, akkor

$$P(|V(C_v)| > k) < \frac{1}{n^2},$$

és így annak a valószínűsége, hogy van olyan v csúcs, melyre $|V(C_v)| > k$, kisebb, mint $1/n$.

A $c > 1$ eset a 12.2(c) tétel alkalmazásával hasonlóan bizonyítható, de a részletek bonyolultabbak. \square

13 *Statisztikus fizika

14 *Kvázivéletlen gráfok

15 *Derandomizálás

16 *Etc

16.1 Izoláló Lemma

16.1 LEMMA (MULMULEY, VAZIRANI, VAZIRANI) *Súlyozzuk egy n csúcsú hipergráf csúcsait az $\{1, \dots, N\}$ halmazból vett véletlen súlyokkal. Ekkor annak a valószínűsége, hogy a maximális élsúlyt két él is eléri, legfeljebb n/N .*

16.2 Janson egyenlőtlenség

16.3 Talagrand egyenlőtlenség

16.4 Kim–Vu egyenlőtlenség

16.5 Rödl majszolás

References

- [1] N. Alon, J. Spencer: *The Probabilistic Method*, Wiley–Interscience, 2000.
- [2] Erdős Pál, Surányi János: *Válogatott fejezetek a számelméletből*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1960; Polygon, Szeged, 1996.