Valós függvénygrafikonok torlódási pontjai a síkon

TDK dolgozat

Szerző: Maga Balázs

Témavezető: Buczolich Zoltán

ELTE-TTK Analízis Tanszék

2015

VALÓS FÜGGVÉNYGRAFIKONOK TORLÓDÁSI PONTJAI A SÍKON

MAGA BALÁZS

Tartalmi kivonat. Az elmúlt évtizedekben E. S. Thomas, S. J. Agronsky, J. G. Ceder, és T. L. Pearson a valós Baire-1 osztályú függvényeket grafikonjuk alapján karakterizálta. Ebben a dolgozatban ezen eredmények felhasználásával a következő problémával foglalkozunk: legyen T adott halmaz $[0,1] \times \mathbb{R}$-ben. Mikor létezik olyan $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvény, mely grafikonjának torlódási pontjai épp T-t adják ki? Megmutatjuk, hogy ha egy halmaz előáll egy függvény grafikonjának torlódási halmazaként, akkor létezik ilyen Baire-2 osztályú függvény is. Külön-külön karakterizáljuk a korlátos, illetve a nem korlátos Baire-2 osztályú függvényeknél fellépő T halmazokat. Ezt követően megvizsgáljuk az analóg kérdést Baire-1 osztályú függvények esetén is.

1. Bevezetés

Az utóbbi hatvan évben több olyan eredmény is született, ami bizonyos valós függvényosztályokat a hozzájuk tartozó függvények grafikonjainak leírásával karakterizált. A Baire-1 osztályú függvények esetében ezek közül E. S. Thomas 1967-es, valamint Agronsky, Ceder és Pearson 1998-as cikkét érdemes megemlíteni (lásd [1] és [2]): az előbbi a korlátos Baire-1 függvényekre fogalmazott meg egy ekvivalens definíciót, az utóbbiban ezt az eredményt általánosították a nem feltétlenül korlátos esetre. Ezen dolgozatban szintén egy olyan kérdéssel fogunk foglalkozni, amely Baire-1 és Baire-2 osztályú függvényeket a grafikonjuk egy bizonyos tulajdonsága alapján vizsgál. Nevezetesen arra leszünk kíváncsiak, hogy egy adott $T \subseteq [0,1] \times \mathbb{R}$ halmazhoz mikor létezik olyan megfelelő osztályú $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvény, amire az f grafikonjának torlódási pontjai épp a T-t adják ki.

Ezen kérdésekre fogunk az elkövetkezőkben választ adni, mégpedig mindkét szituációban két lépésben: a problémakör tárgyalását egyszerűsíti, ha előbb arra az esetre koncentrálunk, amikor f korlátosságát is kikötjük, s ezt követően térünk át az általános esetre.

2. Jelölések

A dolgozatban a következő jelöléseket fogjuk használni: az f valós függvény grafikonját a síkon G jelöli. Az f_0 függvényét analóg módon G_0. Az f valós függvényhez tartozó G grafikon torlódási pontjainak halmaza legyen L_f. Az $x = r$ egyenletű függőlegest v_r jelöli. Ha H síkbeli halmaz, r pedig valós szám, H-nak a v_r függőleges egyenessel való metszete $H(r)$. Amennyiben ennek eleme egy (r, y) pont, azt az egyszerűség kedvéért $y \in H(r)$-rel jelöljük. Az r pont ε sugarú nyílt környezete $B(r, \varepsilon)$. Ezalatt valamikor egy $\mathbb{R}$-beli pont egydimenziós környezetét, máskor egy $\mathbb{R}^2$-beli pont kétdimenziós környezetét értjük. Hogy konkrétan melyiket, azt az adott esetben mindig azzal tesszük világossá, hogy a középpont egy $\mathbb{R}$-beli pont vagy egy $\mathbb{R}^2$-beli pont. A $[0,1]$ intervallumot a továbbiakban I intervallumnak nevezzük. A H halmaz számosságára a $\#(H)$ jelölést alkalmazzuk az átláthatóság megkönnyítése érdekében. A H halmaz átmérője $\mathrm{diam}(H)$. Végül, ha

$A \subseteq I$, f értelmezve van az A-n és $a \in A$, akkor esetenként $(a, f(a))$-ra, mint A feletti grafikonpontra hivatkozunk.

3. Előzmények és előkészületek

A bevezetőben már említettük Thomas, illetve Agronsky, Ceder és Pearson eredményét. Az utóbbi az előbbi általánosítása. Ennek nagy hasznát fogjuk venni a levezetéseink folyamán, így mindenképp idekívánkozik ezen tétel kimondása. Ehhez először is szükségünk lesz egy definícióra.

Definíció 3.1. *Egy $S \subseteq I \times \mathbb{R}$ nyílt halmazt nyílt szalagnak nevezünk, amennyiben minden $r \in I$-re $S(r)$ nyílt intervallum.*

Ezen definíció segítségével adták meg [2, Theorem 2.2]-ben a Baire-1 osztályú függvények következő karakterizációját:

Állítás 3.1. *Egy $f : I \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor Baire-1 osztályú, ha létezik (S_n) nyílt szalagok végtelen sorozata, amire $\cap_{n=1}^{\infty} S_n = G$.*

A továbbiakban erre a tételre ACP-tétel néven fogunk hivatkozni. Mint azt látni fogjuk, ez a tétel egy rendkívül jól alkalmazható eszközt nyújt nekünk, amennyiben célunk bizonyos függvények Baire-1 tulajdonságának igazolása. Emellett fel fogunk használni alapvető klasszikus eredményeket Baire-1 osztályú függvényekkel kapcsolatban, melyek például [3]-ban említésre kerülnek. Ezentúl minden esetben alkalmazni fogjuk a következő úgynevezett torlódási lemmát, ami az eredeti problémánk egy variánsával foglalkozik:

Lemma 3.1. *Amennyiben $T \subseteq I \times \mathbb{R}$ zárt halmaz, akkor létezik olyan $A \subseteq I$ megszámlálható halmaz, amire létezik $f : A \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $L_f = T$.*

Bizonyítás. Bontsuk fel T-t a következőképp: legyen $T_i = (I \times [-i, i]) \cap T$ minden i természetes számra. Ekkor minden T_i kompakt, hiszen egy zárt és egy kompakt halmaz metszete. Vegyünk fel T_1 minden pontja körül egy 1 sugarú környezetet. Ekkor ezek közül kiválasztható T_1-nek egy véges nyílt fedése. Vegyünk fel az összes, ezen fedésbe beletartozó környezetben egy pontot úgy, hogy ezek x koordinátái mind különbözőek legyenek. Ez induktívan nyilván megtehető, mivel minden környezetben végtelen sok x koordináta közül választhatunk. Jelölje az ezen lépésben felvett síkbeli pontok halmazát H_1, a pontok x koordinátáinak halmazát pedig A_1.

Most hasonlóan vegyünk fel $\frac{1}{2}$ sugarú környezeteket T_2 minden pontja körül, válasszuk ki ezekből T_2 egy véges fedését, majd az így kiválasztott környezetekben vegyünk fel pontokat. Számossági okoskodás miatt ez ezúttal is megtehető úgy, hogy a korábban felvett pontok x koordinátáival se legyen összeesés. Itt az iméntivel analóg módon definiáljuk a H_2 és az A_2 halmazt. A továbbiakban ezt induktívan folytatjuk, az n. lépésben T_n-beli pontok körül $\frac{1}{n}$ sugarú környezeteket véve veszünk fel a korábbiaktól és egymástól is különböző x koordinátájú pontokat, és definiálunk egy véges H_n és A_n halmazt.

Legyen most $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, valamint $H = \cup_{n=1}^{\infty} H_n$. Ekkor ezek megszámlálható halmazok. Legyen f az a függvény, ami minden $x \in A$-hoz az x felett az iménti eljárás során felvett pont y koordinátáját rendeli. Ez a grafikonpont ekkor H-beli. Azt szeretnénk belátni, hogy erre az f-re fennáll, hogy $L_f = T$. Ezt két tartalmazás igazolásával tesszük meg.

(1) $T \subseteq L_f$. Valóban, tekintsünk ugyanis tetszőleges T-beli P pontot. Ekkor megfelelő k-ra $P \in T_k$. Ekkor minden k-nál nagyobb n-re léteznek $x_n \in A_n$ eltérő pontok, amikre az $(x_n, f(x_n))$ pont P-től vett távolsága kisebb, mint $\frac{1}{n}$. Így létezik P-től különböző G-beli pontok sorozata, ami P-hez tart, azaz $T \subseteq L_f$. Ezzel az iránnyal tehát készen vagyunk.

(2) $L_f \subseteq T$. Vegyünk tetszőleges L_f-beli P pontot. Mivel ez G torlódási pontja, létezik G-beli pontok egy olyan (p_n) sorozata, ami P-hez konvergál, és minden elemét egyszer tartalmazza. Ekkor ha k adott, elég nagy n-re p_n egy olyan H_m-ből kerül ki, amire $m \geq k$. Ez azt jelenti, hogy a p_n pont $\frac{1}{k}$-nál közelebb esik egy T-beli ponthoz. Tehát a (p_n) sorozatot tetszőlegesen megközelíthetjük T-beli pontokkal, amiből következik, hogy (p_n) határértéke benne van a zárt T halmazban, azaz $P \in T$. Tehát $L_f \subseteq T$, így ezt a tartalmazást is igazoltuk.

Ezzel a lemma bizonyítását befejeztük.

□

Vegyük észre, hogy igazából többet bizonyítottunk, mint azt állítottuk: A és f nem pusztán azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy $L_f = T$, hanem azzal is, hogy csak véges sok olyan grafikonpont létezik, amelynek távolsága T-től nagyobb, mint egy adott $\varepsilon > 0$. A későbbiekben lesz olyan eset, amikor ezt az erősebb eredményt fogjuk felhasználni.

4. Baire-2 osztályú függvények

A korábban beharangozottakhoz hűen elsőként a korlátos esettel fogunk foglalkozni. Először néhány T-re vonatkozó szükséges feltételt fogalmazunk meg.

Nyilvánvaló, hogy amennyiben $L_f = T$ fennáll, T-nek kompakt halmaznak kell lennie: mint G torlódási pontjainak halmaza, zárt, s mivel f, s így G korlátos, T is az. Van továbbá egy másik könnyedén végiggondolható feltétel: $T(x)$ sosem üres, ha $x \in I$. Amint ugyanis (x_n) egy tetszőleges x-hez tartó sorozat ($x_n \neq x$), az $(x_n, f(x_n))$ pontokból álló $\mathbb{R}^2$-beli sorozat korlátos, s így van konvergens részsorozata. Ez viszont ekkor nyilván egy olyan ponthoz tart, melynek első koordinátája x, s így T zártsága miatt ez is T-beli. Tehát valóban, $T(x)$ sosem üres.

Vegyük észre, hogy ezen szükséges feltételek felírásánál még sehol nem használtuk ki, hogy f-nek Baire-2 osztályú függvénynek kell lennie. Ennek ellenére, mint azt látni fogjuk, ezen feltételek elégségesek, tehát ha egy halmaz előáll egy korlátos függvény grafikonjának torlódási halmazaként, akkor létezik hozzátorlódó korlátos Baire-2 osztályú függvény is. Azaz:

Tétel 4.1. *Egy $T \subseteq I \times \mathbb{R}$ halmazhoz pontosan akkor létezik $f : I \to \mathbb{R}$, Baire-2 osztályú, korlátos függvény, amire $L_f = T$, ha*

- *T kompakt,*
- *$T(x)$ sosem üres, amennyiben $x \in I$.*

Bizonyítás. Mielőtt hozzálátnánk a tényleges bizonyításhoz, egy rövid vázlatot adunk. Először felveszünk egy f_0 függvényt úgy, hogy minden $x \in I$-re $f_0(x) \in T(x)$. Ezt a lépést követően az ACP-tétel segítségével igazoljuk, hogy f_0 Baire-1 osztályú függvény. Végezetül a torlódási lemma alkalmazásával f_0-t egy megszámlálható A halmazon megváltoztatva egy Baire-2 osztályú f függvényt készítünk, amelyre $L_f = T$. (Az így kapott f függvény korlátossága T korlátossága miatt triviális.)

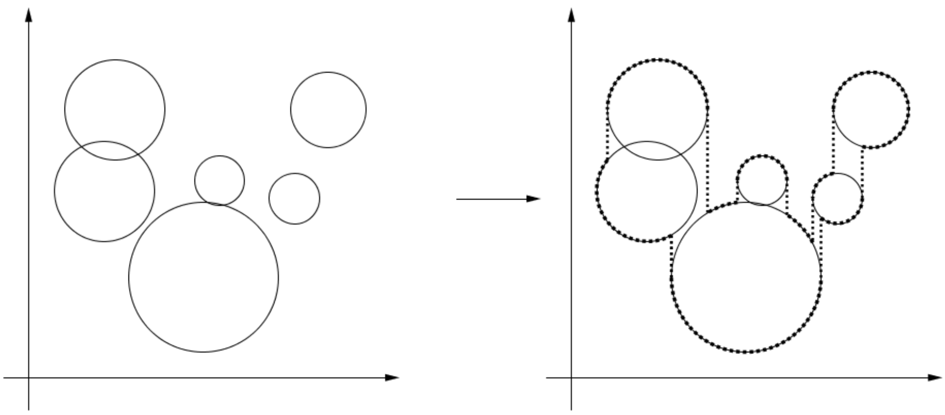
Definiáljuk f_0-t a következőképpen: minden $x \in I$ esetén legyen $f_0(x) = \max(T(x))$. Minthogy $T(x)$ sosem üres és T kompakt, ez a definíció kétségkívül értelmes. Állítjuk, hogy ez egy Baire-1 osztályú függvény. Ha egy kicsit átgondoljuk a dolgot, észrevehetjük, hogy ez egy jólismert tény, hiszen az így felírt függvény nyilván felülről félig folytonos, s így Baire-1 osztályú. Mitöbb, ez az állítás ekvivalens azzal, hogy a felülről félig folytonos függvények Baire-1 osztályúak. Ugyanakkor az ACP-tétel működésének jobb megértése érdekében célszerű végiggondolni, hogyan lehet bizonyítani ezt az állítást az ACP-tétellel.

Minden $n \in \mathbb{N}$-re meg fogunk adni egy S_n nyílt szalagot, mégpedig úgy, hogy e szalagok sorozata egymásba skatulyázott legyen. Ennek elvi többletjelentése nincs, de a leírás egyszerűségének szempontjából hasznát fogjuk venni. Először S_n egy S'_n részhalmazát definiáljuk, amely $(x, f_0(x))$ pontok környezeteinek uniójából áll. Legyen ezen környezet sugara adott $x \in I$ és n esetén $\varepsilon_{x,n}$, ahol $\varepsilon_{x,n}$ a következő három feltételnek tesz eleget: egyrészt lesz két egyszerű méretfeltételünk, $\varepsilon_{x,n} \leq \frac{1}{n}$ és $\varepsilon_{x,n} \leq \varepsilon_{x,n-1}$ minden $n \geq 2$-re. Ez nyilván lehetséges. Másrészt lesz egy kissé bonyolultabb úgynevezett "belelógási feltételünk", ami ezen környezet x tengelyre való vetületével kapcsolatos. Nevezetesen:

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in \mathbb{R}, r \in B(x, \varepsilon_{x,n})\text{-re } f_0(r) - f_0(x) < \frac{1}{n}$$

Szemléletesen ez azt jelenti, hogy az $(x, f_0(x))$ körüli környezet nem lóghat be olyan r fölé, ahol kellően nagyobb a függvényérték. Miért lehetséges ez? T zártsága miatt. Ha ugyanis nem létezik ilyen környezete x-nek, ahol ez fennáll, vehető egy x-hez konvergáló

(x_k) sorozat, amire minden k esetén $f_0(x_k) \geq f_0(x) + \frac{1}{n}$. Ekkor $(f_0(x_k))$-nak, mint korlátos sorozatnak, van egy konvergens részsorozata. Ekkor viszont az $(x_k, f_0(x_k))$ pontoknak lesz egy torlódási pontja a síkon, melynek az első koordinátája x, a második pedig legalább $\frac{1}{n}$-nel nagyobb, mint $f_0(x) = \max(T(x))$. Viszont T zárt, így ez nyilvánvalóan ellentmondás, tehát valóban választhatóak az $\varepsilon_{x,n}$-ek úgy, hogy mindhárom feltételünknek eleget tegyünk. Ezen környezetek unióját véve tehát minden n-re adódik egy S'_n nyílt halmaz, ami tartalmazza f_0 grafikonját, s $S'_n \subseteq S'_{n-1}$ minden $n \geq 2$ esetén, hiszen S'_n azonos középpontú, kisebb sugarú környezetek uniójából áll. Nekünk ez a nyíltság azonban még nem elég: mi nyílt szalagokat szeretnénk legyártani. Van azonban egy egyszerű módja annak, hogy egy tetszőleges H' nyílt halmazt egy H nyílt szalaggá bővítsünk: legyen minden x-re $H(x) = (\inf(H'(x)), \sup(H'(x))$. Az ábra is egy ilyen bővítést mutat abban az esetben, ha H' például néhány nyílt körlapból áll: az ehhez rendelt H a szaggatott vonallal határolt nyílt halmaz. Könnyen látható, hogy az így kapott H valóban minden esetben egy H'-t tartalmazó nyílt szalag. Ezzel az eljárással készítjük hát el $S'_n(x)$-ből $S_n(x)$-et. Az $S_n \subseteq S_{n-1}$ feltétel ekkor nyilván öröklődik.



Ahhoz, hogy az ACP-tételt alkalmazhassuk, be kell látnunk, hogy $S = \cap_{n=1}^{\infty} S_n = G_0$. Az világos, hogy S tartalmazza G_0-t, hiszen S'_n minden n-re tartalmazta G_0 minden pontját, így ez S_n-re is igaz. Amit meg kell gondolnunk, hogy más pontja nincs S-nek.

Indirekt tegyük fel, hogy létezik olyan $x \in I$ és $y \neq f_0(x)$, amire $(x, y) \in S$. Két esetet különböztetünk meg.

(1) $y > f_0(x)$. Mivel $(x, y) \in S_n$ minden n esetén, minden n-re létezik S'_n-nek olyan (x, z_n) pontja, amire $z_n > y$. Ezen (z_n) sorozat nyilván korlátos, s így van egy $z \geq y$ torlódási pontja. Az S'_n azonban $G_0 \subseteq T$-beli pontok legfeljebb $\frac{1}{n}$ sugarú környezeteiből áll, így ebből következik, hogy $(x, z) \in T$, mivel T zárt. Tehát T-nek van olyan x feletti pontja, melynek második koordinátája nagyobb, mint $f_0(x) = \max(T(x))$. Ez ellentmondás, így ezzel az esettel készen vagyunk.

(2) $y < f_0(x)$. Hasonlóan okoskodva arra a megállapításra juthatunk, hogy minden n-re létezik S_n-nek olyan (x, z_n) pontja, amire $z_n < y$. Legyen $k \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $y < f_0(x) - \frac{1}{k}$. Ekkor ha $n \geq 2k$, az S'_n-t alkotó nyílt környezetek között van olyan, ami metszi v_x-et, s egy olyan $(x_n, f_0(x_n))$ pont körül lett felvéve, amire $f_0(x_n) < f_0(x) - \frac{1}{2k}$. Ez viszont definíció alapján nem lehetséges: az $(x_n, f_0(x_n))$ körüli környezet ugyanis a belelógási feltétel miatt úgy lett megválasztva, hogy ne lóghasson be x fölé, lévén ott több, mint $\frac{1}{2k}$-val nagyobb a függvényérték. Ezzel tehát ebben az esetben is ellentmondásra jutottunk. Így mindkét esetben készen vagyunk, igazoltuk, hogy f_0 Baire-1 osztályú függvény.

Ezzel viszont gyakorlatilag a tétel bizonyításával készen vagyunk: a torlódási lemma segítségével egy megszámlálható A halmazon változtassuk meg f_0-t úgy, hogy az A feletti grafikonpontok halmazának torlódási pontjai már épp kiadják T-t. Jelölje az így kapott függvényt f, ekkor ez korlátos és Baire-2 osztályú. Ugyanakkor most az egész függvényt tekintve $L_f = T$, hiszen minden $I \setminus A$ feletti pont T-beli, így egyéb torlódási pontok nem jelenhetnek meg. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

□

A következőkben áttérünk tetszőleges, azaz nem feltétlenül korlátos Baire-2 osztályú függvényekre. Mint látni fogjuk, ebben az esetben a feltételek is komplikáltabbak, és a bizonyítás is némileg nehézkesebb. Mindazonáltal hasonló általánosságú tételt fogunk megfogalmazni.

Ezúttal is a szükséges feltételek kigyűjtésével közelítjük meg a problémát, amihez most is kizárólag azt a tényt használjuk fel, hogy $f : I \to \mathbb{R}$ függvény. Az most is nyilvánvaló, hogy amennyiben $L_f = T$, akkor T zárt. Viszont az már korántsem igaz, hogy minden $x \in I$-re $T(x)$-nek nemüresnek kell lennie. Legyen például f az a függvény, ami 0-ban 0-t, minden egyéb x-ben pedig $\frac{1}{x}$-et vesz fel. Ekkor $L_f(0)$ üres. Ugyanakkor az is sejthető, hogy $L_f(x)$, s így $T(x)$ nem lehet akármilyen C halmazon üres. A következő lemmát fogalmazhatjuk meg:

Lemma 4.1. *Legyen $f : I \to \mathbb{R}$ függvény. Ekkor ha $C = \{x \in I : L_f(x) = \emptyset\}$, akkor C egy megszámlálható halmaz.*

Bizonyítás. Indirekten fogjuk bizonyítani az állítást, tegyük fel, hogy C nem megszámlálható. Legyen minden n természetes számra $C_n = \{x \in C : |f(x)| < n\}$. Ekkor $C = \cup_{n=1}^{\infty} C_n$, s így a számosságok egyenlősége miatt létezik n, amire C_n nem megszámlálható. Mivel azonban C_n nem megszámlálható, tartalmazza egy torlódási pontját, c-t. Így ehhez tarthatunk egy C_n-beli (c_i) sorozattal ($c_i \neq c$). Itt $(f(c_i))$ korlátos, azaz van konvergens részsorozata, s így $L_f(c)$ nem lehet üres. Ez ellentmondás, tehát C megszámlálható. □

Azt állítjuk, hogy mindezen szükséges feltételek már elégségesek is egyúttal, azaz:

Tétel 4.2. *Egy $T \subseteq I \times \mathbb{R}$ halmazhoz pontosan akkor létezik $f : I \to \mathbb{R}$, Baire-2 osztályú függvény, amire $L_f = T$, ha*

- *T zárt,*
- *$T(x)$ egy megszámlálható $C \subseteq I$ halmaz elemeitől eltekintve nemüres, amennyiben $x \in I$.*

Bizonyítás. A bizonyítás menete analóg lesz a korlátos esetével. Most is egy f_0 függvény definiálásával kezdünk, amiről be fogjuk látni, hogy Baire-1 osztályú.

Mindezt megelőzően a következő észrevételt tesszük: C egy G_δ halmaz. Legyen ugyanis $c \in C$ tetszőleges. Mivel T zárt, ennek minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik $B_{c,n}$ környezete, amire minden c-től eltérő $x \in B_{c,n}$ esetén $T(x)$ minden elemének abszolútértéke nagyobb, mint n. Csak így lehet ugyanis $T(c)$ üres. Ekkor adott n-re $B_n = \cup_{c\in C} B_{c,n}$ egy C-t tartalmazó nyílt halmaz. Másrészt $\cap_{n=1}^{\infty} B_n = C$, hiszen ebben a metszetben pontosan azon x-ek vannak, amelyekre $T(x)$ minden eleme legalább n abszolútértékű minden n esetén. Ez viszont épp $\{x \in I : T(x) = \emptyset\}$, azaz C. Tehát C valóban egy G_δ halmaz.

Most már hozzálátunk a függvénykonstrukciónkhoz. Először C-n definiáljuk f_0-t. Ehhez vegyük a megszámlálható C egy felsorolását: $C = \{c_1, c_2, ...\}$. Ezt követően legyen $f_0(c_n) = n$ minden egyes n esetén. Az $I \setminus C$-n való hozzárendelés ezúttal viszont nem történhet olyan kézenfekvő módon, mint a korlátos esetnél, minthogy egyáltalán nem biztos, hogy minden $T(x)$-nek van maximuma. Ezért óvatosabban kell eljárnunk.

Definiáljuk minden n természetes számra a következő halmazt:

$$U_n = \{x \in I : \exists r \in T(x), |r| \leq n\}. \tag{4.2}$$

Ekkor mivel T zárt, könnyen meggondolhatóan a U_n halmazok mindegyike is zárt. Fennáll továbbá, hogy $U_n \subseteq U_{n+1}$, valamint hogy $\cup_{n=1}^{\infty} U_n = I \setminus C$. Tehát minden $x \in I \setminus C$-re létezik egy legkisebb n_x, amire $x \in U_{n_x}$. Ezt felhasználva legyen $f_0(x)$ a $T(x)$ legnagyobb olyan eleme, aminek abszolút értéke legfeljebb n_x. Ez értelmes, mivel van ilyen elem és $T(x)$ zárt. Teljesül továbbá, hogy $n_x - 1 < |f_0(x)| \leq n_x$, hiszen egyébként x már valamely $m < n_x$-re U_m-beli lenne. (Illetve $n_x = 1$ esetén $0 = n_x - 1 \leq |f_0(x)| \leq n_x = 1$.)

Ezzel minden I-beli helyen definiáltuk az f_0-t, az ACP-tétel segítségével szeretnénk belátni, hogy ez egy Baire-1 osztályú függvény. Ehhez fogjuk megkonstruálni az S_n nyílt szalagokat, illetve ezt megelőzően a grafikonpontok $\varepsilon_{x,n}$ sugarú környezeteinek uniójából álló S'_n nyílt halmazokat. Az iméntihez hasonlóan most is minden esetben fel fogjuk tenni, hogy $\varepsilon_{x,n} \leq \frac{1}{n}$, s hogy $\varepsilon_{x,n} \leq \varepsilon_{x,n-1}$ minden $n \geq 2$-re. Ugyanakkor, minthogy az f_0-t ezúttal különbözően definiáltuk az egyes esetekben, a továbbiakban is esetspecifikus feltételeket fogunk megfogalmazni: külön-külön tekintjük át azon eseteket, amikor $x \in C$, s amikor $x \in I \setminus C$.

(1) $x \in C$. Ekkor $x = c_k$ valamely k természetes számra. A C feletti grafikonpontok körül definiált S'_n-be tartozó környezetek uniója legyen E_n, s az E_n vetülete az x tengelyre F_n. Válasszuk meg ezen környezeteket úgy, hogy $\cap_{n=1}^{\infty} F_n = C$. Ez lehetséges, mivel C egy G_δ halmaz. Ezentúl azt is feltesszük, hogy a $B(c_k, \varepsilon_{c_k,n})$ a $c_1, ..., c_n$ pontok közül csak a c_k-t tartalmazhatja. Ezt szintén megtehetjük, mivel ez egy véges halmaz. Megjegyezzük, hogy mindebből következik, hogy $\cap_{n=1}^{\infty} E_n$ éppen az $f_0|C$ grafikonja.

(2) $x \in I \setminus C$. Tegyünk először néhány észrevételt ezzel a komplementerhalmazzal kapcsolatban. Legyen $V_1 = U_1$, $n \geq 2$ esetén pedig $V_n = U_n \setminus U_{n-1}$. Itt a V_n halmazok mindegyike F_σ, mint zárt halmazok különbsége. Tehát minden n-re választhatók úgy $V_{n,i}$ zárt halmazok, ahol i a természetes számokon fut végig, hogy $V_n = \cup_{i=1}^{\infty} V_{n,i}$. Ekkor a $V_{n,i}$ halmazok megszámlálható sokan vannak, így vehető egy $W_1, W_2, ...$ felsorolásuk. Legyen most $x \in V_k$. Ekkor $\varepsilon_{x,n}$-nel kapcsolatban először is elvárjuk, hogy $B(x, \varepsilon_{x,n})$ ne tartalmazza a $c_1, c_2, ..., c_n$ pontokat. Ez még egy triviális feltétel. Ezentúl azt is kikötjük, hogy a $W_1, W_2, ..., W_n$ halmazok közül csak azokat metszhesse, amikben benne van x. Ez lehetséges, mivel ez véges sok zárt halmaz. Utolsó feltételünk egy speciális belelógási feltétel lesz, nevezetesen, hogy minden $r \in B(x, \varepsilon_{x,n}) \cap V_k$-ra $f_0(r) - f_0(x) < \frac{1}{n}$. Ennek a kielégíthetősége hasonlóan igazolható, mint a korlátos esetben. Arra érdemes kitérni, hogy amennyiben $f_0(x)$ negatív, akkor elképzelhető, hogy más $I \setminus C$ feletti grafikonbeli pontokkal $(x, -(k-1))$-hez tudunk tartani. Ez viszont lehetetlen: ekkor a zártság miatt $(x, -(k-1)) \in T$, azon belül $x \in U_{k-1}$, azaz $x \notin V_k$.

Ezzel megkonstruáltuk az S'_n nyílt halmazt. A korlátos esetben tett lépésünkkel analóg módon eljárva alkotjuk meg ebből az S_n nyílt szalagot, amelyre minden $x \in I$ esetén $S_n(x) = (\inf(S'_n(x)), \sup(S'_n(x)))$. Legyen $\cap_{n=1}^{\infty} S_n = S$, s hasonlóan $\cap_{n=1}^{\infty} S'_n = S'$. Ahhoz, hogy az ACP-tételt alkalmazhassuk, belátjuk, hogy $S = G_0$. Az egyik irányú tartalmazás nyilvánvaló, koncentráljunk hát arra, hogy $S \subseteq G_0$, azaz hogy S-nek nincs olyan pontja, amely nem G_0-beli. Ezt minden $x \in I$ esetén külön vizsgáljuk, azaz $S(x) \subseteq G_0(x)$-t fogjuk igazolni. A korábbi esetszétválasztást követjük:

(1) $x \in C$. Ekkor $x = c_k$ valamely k természetes számra. Tekintsük az $S'_n(x)$ halmazt. Amennyiben $n \geq k$, az S'_n-t kiadó nyílt környezetek közül definíció szerint mindössze 1 metszheti v_x-et: az $(x, f_0(x))$ körül felvett környezet. Így kellően nagy n-re $S'_n(x) = S_n(x)$, s ez az $S'_n(x)$ egyetlen nyílt intervallumból áll, melynek sugara legfeljebb $\frac{1}{n}$. Így n-nel végtelenbe tartva adódik, hogy $S(x)$ egyetlen eleme $f_0(x)$, azaz $S(x) \subseteq G_0(x)$. Ezzel az esettel készen vagyunk.

(2) $x \in I \setminus C$. Ekkor $x \in V_k$ és $x \in W_m$ valamely k és m természetes számokra. Tekintsük $S'_n(x)$-t. A kérdés az, mely grafikonpontok körüli $B((r, f_0(r)), \varepsilon_{r,n})$ környezetek metszhetik v_x-et. Az világos, hogy kellően nagy n esetén a $(c_i, f_0(c_i))$ körüli környezet nem metszheti, hiszen az ilyen nyílt környezetek metszete pontosan az $f_0|C$ grafikonjából áll. Teljesül továbbá az is, hogy amennyiben $n \geq m$, v_x-et kizárólag olyan r-re metszheti az $(r, f_0(r))$ körül felvett környezet, amelyre $r \in W_m$. Ezt ugyanis kikötöttük az ilyen környezetek választásánál, hogy $B(r, \varepsilon_{r,n})$ a $W_1, W_2, ..., W_n$ halmazok közül csak az r-et tartalmazóakat metszhesse. Tehát összegezve, amennyiben n elég nagy, v_x-et kizárólag olyan r-re metszheti az $(r, f_0(r))$ körüli környezet, amelyre $r \in W_m$. Csak ezek a helyek relevánsak $S(x)$ szempontjából. De mi is ez a W_m? A V_k egy részhalmaza. Így az itteni függvényértékre is $k - 1 < |f_0(r)| \leq k$, illetve $k = 1$ esetén $k - 1 \leq |f_0(r)| \leq k$. Számunkra azonban csak az a fontos, hogy ekkor itt az f_0 függvény korlátos, és minden W_m-beli elemben $f_0(x) = \max(T_k(x))$, ahol $T_k = (I \times [-k, k]) \cap T$, mint a torlódási lemmánál. Tehát az $S(x)$ szempontjából releváns helyeken pontosan úgy definiáltuk f_0-t és az S'_n-t alkotó környezeteinket, mint az előző tételben tettük volna, ha T helyett T_k-t tekintjük. Következésképp ebben az esetben is pontosan úgy fejezhető be $S(x) \subseteq G_0(x)$ bizonyítása, mint akkor. Így ezzel az esettel is készen vagyunk.

Innen pedig a befejezés a korábban látottak alapján triviális. Egyszerűen most is a torlódási lemma segítségével megváltoztatjuk a függvényt egy megszámlálható A halmazon, úgy, hogy az eredményül kapott f függvényre $L_f = T$. Ez ekkor nyilván egy Baire-2 osztályú függvény. Ezzel a tételt bizonyítottuk.

□

Ezzel a Baire-2 osztályú függvények ilyetén karakterizációját befejeztük. Másrészt a levezetések arra is rávilágítottak, hogy 2-nél nagyobb α rendszám esetén a Baire-α osztályú függvények ezzel a kérdéssel kapcsolatban nem tartogatnak újdonságokat. Másképp fogalmazva, egy Baire-α osztályú függvény grafikonjának torlódási halmaza már egy Baire-2 osztályú függvény torlódási halmazaként előáll. Ez a magyarázata annak, hogy ebben a dolgozatban miért csak a Baire-1 és a Baire-2 osztállyal foglalkozunk.

5. Baire-1 osztályú függvények

Elsőként ezúttal is a korlátos esetre koncentrálunk. Annak érdekében, hogy jobban átlássuk a szituációt, először most is meggondoljuk, milyen szükséges feltételek fogalmazhatók meg T-re vonatkozólag. Mint látni fogjuk, a korábbiakat követően ez nem jelent nagy nehézséget.

Tekintettel arra, hogy a Baire-1 osztályú függvények egyszersmind Baire-2 osztályúak is, az ott látott feltételek erre az esetre is átöröklődnek: T kompakt és a $T(x)$ sosem üres, amennyiben $x \in I$. Ugyanakkor világos, hogy ez nem elég. Nevezetesen ha $L_f = T$, s egy adott x-re a $T(x)$ többelemű, ott f-nek szakadási helye van. Viszont egy Baire-1 osztályú függvény nem szakadhat akárhol: szakadási helyeinek halmaza egy első kategóriájú F_σ halmaz. Tehát ha $D = \{x : \#(T(x)) > 1\}$, akkor D első kategóriájú F_σ halmaz. Mint azt látni fogjuk, ennél több ezúttal sem kell. Mielőtt azonban a tételünket kimondanánk, vegyük észre, hogy ha már egyszer kikötjük, hogy T zárt, akkor tautologikus lenne kikötnünk, hogy F_σ halmaz a D. Legyen ugyanis minden n természetes számra $D_n = \{x : \mathrm{diam}(T(x)) \geq \frac{1}{n}\}$. Ekkor könnyű látni, hogy ezen D_n halmazok mindegyike zárt, és uniójuk épp a D. (Ebből az is következik, hogy tetszőleges n-re D_n sehol sem sűrű, hiszen egyébként tartalmazna intervallumot, márpedig D első kategóriájú). Így T zártságából valóban következik, hogy a D halmaz F_σ. Tehát a következő tétel fogalmazható meg:

Tétel 5.1. *Egy $T \subseteq I \times \mathbb{R}$ halmazhoz pontosan akkor létezik $f : I \to \mathbb{R}$, Baire-1 osztályú, korlátos függvény, amire $L_f = T$, ha*

- *T kompakt,*
- *minden $x \in I$-re $T(x)$ nemüres,*
- *ha $D = \{x : \#(T(x)) > 1\}$, akkor D első kategóriájú halmaz.*

Bizonyítás. Kezdjük a bizonyítást f konstrukciójával: először a torlódási lemma segítségével definiáljuk f-et úgy egy megszámlálható A halmazon, hogy már $f|A$ grafikonjának torlódási pontjai kiadják a T-t. Könnyedén meggondolható, hogy ez megtehető úgy, hogy az A halmaz diszjunkt legyen D-től. Ehhez annyi szükséges ugyanis, hogy minden $x \in I$ tetszőleges környezetében legyen végtelen sok pont, ami $I \setminus D$-be esik, márpedig ez nyilván teljesül, mivel D első kategóriájú. Másrészt $I \setminus A$-n definiáljuk f-et úgy, mint a korlátos Baire-2 esetben tettük: legyen $f(x) = \max(T(x))$. Ekkor $L_f = T$ legalábbis fennáll, s nyilván az is, hogy f korlátos.

Az így definiált f-re szeretnénk alkalmazni az ACP-tételt. A már megszokott módon most is előbb a grafikonpontok $\varepsilon_{x,n}$ nyílt környezeteinek uniójából álló S'_n nyílt halmazokat adjuk meg, majd ezt egészítjük ki nyílt szalagokká. S'_n definíciója a szokásos méretfeltételektől eltekintve ezúttal is esetspecifikus lesz.

(1) $x \in A$. Mivel A megszámlálható, így vehető egy $\{a_1, a_2, ...\}$ felsorolása. Ekkor $x = a_k$ valamely k természetes számra. Ekkor $\varepsilon_{x,n}$-nel kapcsolatban először is kikötjük, hogy $B(x, \varepsilon_{x,n})$ az $a_1, a_2, ..., a_n$ pontok közül kizárólag az a_k-t tartalmazhatja. A másik kikötésünk a D-be való belelógással lesz kapcsolatos. Mivel D első kategóriájú F_σ halmaz, léteznek $D_1, D_2, ...$ sehol sem sűrű zárt halmazok, amelyekre $D = \cup_{n=1}^{\infty} D_n$. Ezek közül ráadásul egyik sem tartalmazza x-et, mivel

$x \in A$ és az A halmaz diszjunkt a D-től. Így kielégíthető a "$B(x, \varepsilon_{x,n})$ nem metszi $\cup_{i=1}^{n} D_i$-t" feltétel.

(2) $x \in I \setminus A$. Először is az A halmaz elkerülése végett $B(x, \varepsilon_{x,n})$ az $a_1, a_2, ..., a_n$ pontok egyikét se tartalmazhatja. Másrészt felidézzük a korlátos Baire-2 eset belelógási feltételét: ha $r \in B(x, \varepsilon_{x,n}) \setminus A$, akkor $f(r) - f(x) < \frac{1}{n}$.

Ezzel az S'_n halmazt definiáltuk. Ezt a szokott módon - minden v_x mentén az infimumot és szuprémumot véve - egészítjük ki az S_n nyílt szalaggá. Célunk igazolni, hogy ezen S_n-ek S metszete éppen a G. A kihívást természetesen az jelenti, hogy S-nek minden pontja G-beli. Ehhez tekintsük $S(x)$-et minden x esetén. Három esetet különböztetünk meg x jellegéből fakadóan:

(1) $x \in A$, azaz $x = a_k$. Ekkor ha $n \geq k$, akkor az S'_n-t kiadó környezetek közül kizárólag az $(x, f(x))$ körüli metszi v_x-et. Ennélfogva $S_n(x) = S'_n(x)$, és

$$S_n(x) = (f(x) - \varepsilon_{x,n}, f(x) + \varepsilon_{x,n}) \subseteq \left(f(x) - \frac{1}{n}, f(x) + \frac{1}{n}\right)$$

Ebből azonnal adódik, hogy $S(x)$ kizárólag $f(x)$-et tartalmazhatja, tehát ezzel az esettel készen vagyunk.

(2) $x \in D$. Ekkor valamely k természetes számra $x \in D_k$. Ebben az esetben ha $n \geq k$, akkor A feletti grafikonpontok körül felvett környezetek nem metszhetik v_x-et. Tehát kellően nagy n esetén kizárólag az $I \setminus A$ pontjaival kell foglalkoznunk, ha $S_n(x)$-re vagyunk kíváncsiak. Így $S(x)$ vizsgálatában is, amennyiben $x \in D$, csak ezen helyek lesznek relevánsak. Ezeken a helyeken viszont pontosan úgy definiáltuk f-et és és az S'_n-t alkotó környezeteinket, mint a korlátos Baire-2 esetben tekintett f_0-t és S'_n-t. Ebből adódóan az ott adott bizonyításunk arra, hogy egy tetszőleges $x \in I$-re $S(x) = G_0(x)$, helytáll itt is, amennyiben célunk $S(x) = G(x)$ bizonyítása. Így ezt az esetet is tisztáztuk.

(3) $x \in I \setminus (A \cup D)$. Indirekt tegyük fel, hogy $S(x)$ tartalmaz $f(x)$-től eltérő y pontot. Ekkor $S'_n(x)$-nek minden n esetén van olyan z_n pontja, amelyikre $|f(x) - z_n| \geq |f(x) - y|$, azaz z_n legalább olyan távol esik $f(x)$-től, mint y. Definíció alapján

G korlátos, így nyilván létezik olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy bármelyik n és x esetén az $S'_n(x)$-nek nincs K-nál nagyobb eleme. Ebből azonnal adódik, hogy a (z_n) sorozat korlátos. Így van egy konvergens részsorozata, melynek határértéke $z \in \mathbb{R}$. Ekkor nyilván erre a z-re $|f(x) - z| \geq |f(x) - y|$, tehát $f(x) \neq z$. Ugyanakkor mivel (x, z_n)-től legfeljebb $\frac{1}{n}$ távolságra esik egy a G-beli pontok közül, ezért (x, z) a G-nek is egy torlódási pontja, azaz $(x, z) \in L_f$. Ez viszont ellentmondás. Az f-re ugyanis $L_f = T$, márpedig ebben az esetben $T(x)$ kizárólag $f(x)$-et tartalmazza, $L_f(x)$ pedig a most látottak alapján z-t is. Tehát végső soron ezzel az esettel is készen vagyunk.

Tehát $S = G$, az ACP-tétel ennélfogva alkalmazható. Azaz f olyan korlátos Baire-1 osztályú függvény, amelyre $L_f = T$.

$\square$

Minthogy a korlátos esetet tisztáztuk, a továbbiakban rátérhetünk az ezen dolgozatban tekintett problémák közül a legnehezebben kezelhetőre: a nem feltétlenül korlátos Baire-1 osztályú függvények torlódási halmazainak karakterizálására. Ugyanakkor, mint látni fogjuk, rendre a korábbi ötletek fognak visszaköszönni a bizonyítás során. Az eddigiekben megszokott sémát követve ezúttal is először azon töprengünk el, milyen szükséges feltételek adhatóak meg T-vel kapcsolatban.

Az általános Baire-2 osztályú függvénygrafikonok torlódási halmazával kapcsolatos feltételeink nyilván itt is megjelennek: T zárt halmaz, amelyre teljesül, hogy $T(x) = \emptyset$ kizárólag I egy megszámlálható C részhalmazán. Mivel T zárt, ez a részhalmaz ekkor is G_δ. Mindennél természetesen a korlátos Baire-1 eset mintájára több is szükséges. Ezúttal is figyelembe kell vennünk, hogy egy Baire-1 osztályú f függvény egy első kategóriájú F_σ halmaztól eltekintve mindenütt folytonos, s ezeken a folytonossági helyeken $\#(L_f(x)) = 1$, s így $\#(T(x)) = 1$. Óvatosnak kell azonban lennünk. A korlátos esetben ugyanis $\#(L_f(x)) = 1$ már garantálta, hogy a függvényünk x-ben vagy folytonos, vagy megszüntethető szakadása van. Itt azonban ez már korántsem igaz: példának okáért ha $f(x) = \frac{1}{2x-1}$, amennyiben $x > \frac{1}{2}$, és $f(x) = 0$, ha $x \leq \frac{1}{2}$, akkor habár $L_f\left(\frac{1}{2}\right) = \{0\}$, hibás az a következtetés, hogy $\frac{1}{2}$-ben f folytonos vagy megszüntethetően szakad. Általánosabban fogalmazva ügyelnünk kell a végtelenbeli határértékekre. Tehát ha T-t beágyazzuk $[0,1]\times\overline{\mathbb{R}}$-be, és ebben lezárjuk, így képezvén $\overline{T}$-t, akkor erre is teljesülnie kell, hogy a kiterjesztett függőlegesekkel vett metszetei, amit most $\overline{T}(x)$-szel jelölünk, csak egy első kategóriájú F_σ halmaz felett lehetnek többeleműek. Természetesen az F_σ tulajdonság külön kikötése itt is felesleges: ha most minden n természetes számra $D_n = \{x : \operatorname{diam}(\overline{T}(x)) \geq \frac{1}{n}\}$, akkor ezen halmazokra teljesül, hogy zártak, sehol sem sűrűek, s uniójuk D. Tehát most is elég D-ről kikötni, hogy első kategóriájú.

Ha mindezen észrevételeinket kikötjük, a korábban megszokottnál bonyolultabb feltételrendszerhez jutunk. Állítjuk, hogy ez már elégséges. A tétel precízen kimondva a következő:

Tétel 5.2. *Egy $T \subseteq I \times \mathbb{R}$ halmazhoz pontosan akkor létezik $f : I \to \mathbb{R}$, Baire-1 osztályú függvény, amire $L_f = T$, ha*

- *T zárt,*
- *$T(x)$ egy megszámlálható C halmaztól eltekintve nemüres,*
- *ha $D = \{x : \#(\overline{T}(x)) > 1\}$, akkor D első kategóriájú halmaz.*

Bizonyítás. Definiálni fogjuk egy megszámlálható A halmazon f-et úgy, hogy már $f|A$ grafikonjának torlódási pontjai kiadják a T-t. Ezt a torlódási lemmában előírt módon tesszük, hogy használhassuk majd az azáltal adott erősebb eredményt. Ez kétségkívül lehetséges. Sőt, ez a lépés most is megtehető úgy, hogy A diszjunkt legyen mind C-től, mind D-től. Ezzel egy A halmazon definiáltuk f-et. Térjünk most át $I \setminus A$-ra. Itt azt az eljárást fogjuk követni, amit az általános Baire-2 osztályú függvényekre vonatkozó tételben adott konstrukciónál. Egyrészt ha $C = \{c_1, c_2, ...\}$, akkor $f(c_n) = n$ minden n természetes számra. Másrészt definiáljuk most is az U_n halmazokat, pontosan úgy, mint (4.2)-ben. Ezek ekkor is zárt halmazok, persze lehetséges, hogy metszik A-t. Mindenesetre az A-ba nem beleeső helyeken f-et adjuk meg úgy, mint abban az esetben: ha $x \in U_n \setminus A$, legyen $f_0(x)$ a $T(x)$ legnagyobb olyan eleme, aminek abszolút értéke legfeljebb n. Ezzel

f-et definiáltuk I-n, s nyilván teljesül, hogy $L_f = T$: A-n ugyanis éppen így definiáltuk, továbbá a végtelen sok C feletti grafikonpontot tartalmazó sorozatok nem konvergálnak, az $I \setminus (A \cup C)$ feletti grafikonpontok pedig T-beliek. Tehát G minden torlódási pontja egyszersmind A feletti grafikonpontoknak is torlódási pontja, s azok épp T-t adják ki. (Megjegyezzük, hogy C metszheti D-t, erre egy helyütt ügyelnünk is kell majd.)

Az így definiált f-re szeretnénk alkalmazni az ACP-tételt a grafikonpontok $\varepsilon_{x,n}$ nyílt környezeteinek uniójából álló S'_n nyílt halmazokat megadva, majd ezeket nyílt szalagokká kiegészítve. S'_n definíciója a szokásos méretfeltételektől eltekintve ezúttal is esetspecifikus lesz, ugyanakkor több ízben a korábbi feltételek analogonjai fognak megjelenni, ezért nem fogunk mindent ismét kirészletezni. Átvesszük továbbá a korábbi jelöléseinket: $A = \{a_1, a_2, ...\}$, $C = \{c_1, c_2, ...\}$, valamint $D = \cup_{n=1}^{\infty} D_n$, ahol a D_n sehol sem sűrű zárt halmaz minden n esetén.

(1) $x \in C$, $x = c_k$. Itt rendkívül kényelmesen definiálhatjuk a $\varepsilon_{x,n}$ sugarú környezeteket, jelesül egy az egyben átvehetők az általános Baire-2-es eset kikötései. Tehát ha E_n a C feletti grafikonpontok körül definiált S'_n-be tartozó környezetek uniója, s az E_n vetülete az x tengelyre F_n, akkor válasszuk meg ezen környezeteket úgy, hogy $\cap_{n=1}^{\infty} F_n = C$. Tegyük fel továbbá, hogy $B(c_k, \varepsilon_{c_k,n})$ a $c_1, ..., c_n$ pontok közül csak a c_k-t tartalmazhatja. Az egyszerűség kedvéért végül kössük ki, hogy c_k-nak ez a nyílt környezete $a_1, ..., a_n$-t se tartalmazza. Itt is megjegyezzük, hogy ekkor $\cap_{n=1}^{\infty} E_n$ éppen az $f_0|C$ grafikonja.

(2) $x \in A$. Itt először is a korlátos Baire-1 eset idevágó feltételét érdemes felidézni. Tehát a $B(x, \varepsilon_{x,n})$ nem metszi a $D_1, D_2, ..., D_n$ zárt halmazokat, valamint az $a_1, a_2, ..., a_n$ pontok közül csak az x-et tartalmazhatja. Ezt a feltételt még kiegészítjük azzal, hogy ezek a környezetek a C-t is kerüljék el, azaz ez a környezet a $c_1, c_2, ..., c_n$ pontokat sem tartalmazza.

(3) $x \in I \setminus (A \cup C)$. Az általános Baire-2 eset idevágó feltételrendszerét fogjuk szinte egy az egyben átültetni ide. Ehhez definiáljuk a V_n és W_n halmazokat úgy, mint ott: $V_1 = U_1$, $n \geq 2$ esetén pedig $V_n = U_n \setminus U_{n-1}$. Ekkor a V_n halmazok F_σ

halmazok. Az őket kiadó zárt halmazok egy felsorolása legyen $W_1, W_2, \ldots$. Most ha $x \in V_k$, a $B(x, \varepsilon_{x,n})$ környezettől azt követeljük meg, hogy ne tartalmazza a $c_1, c_2, \ldots, c_n$ pontokat, a $W_1, W_2, \ldots, W_n$ halmazok közül pedig csak azokat metszhesse, amikben x benne van. Ezentúl természetesen kikötünk még egy belelógási feltételt: minden $r \in B(x, \varepsilon_{x,n}) \cap V_k$-ra $f_0(r) - f_0(x) < \frac{1}{n}$. Ezek eddig a Baire-2 esetben megfogalmazott feltételek, ezt egészítjük ki még azzal, hogy ez a $B(x, \varepsilon_{x,n})$ környezet az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pontokat sem tartalmazza.

Ezzel az S'_n halmazt definiáltuk. Ezt a szokott módon egészítjük ki az S_n nyílt szalaggá. Célunk igazolni, hogy ezen S_n-ek S metszete éppen a G. A kihívást ismét az jelenti, hogy S-nek nincs G-n kívül eső pontja. Ehhez tekintsük $S(x)$-et, illetve $S'(x)$-et minden x esetén. Több esetet különböztetünk meg x jellegéből fakadóan, ezek konkrét kezelése is jórészt már korábban látott gondolatokon alapul.

(1) $x \in C$, $x = c_k$. Ez az eset triviális: k-nál nem kisebb n-re $S'_n(x)$ kizárólag az $(x, f(x))$ körüli környezet v_x-szel vett metszetéből áll, így $S_n(x)$ is. Ennélfogva $S_n(x)$ egy legfeljebb $\frac{2}{n}$ átmérőjű intervallum, amely tartalmazza $f(x)$-et. Így $S(x)$ egyetlen eleme $f(x)$, s épp ezt akartuk megmutatni.

(2) $x \in A$, $x = a_k$. Tekintettel arra, hogy A is egy megszámlálható halmaz, és az S'_n-t adó nyílt környezetek feltételrendszere ugyanúgy viszonyult az A-hoz, mint a C-hez, az imént látott gondolatmenet itt is működik. Így ekkor $S(x)$ most is kizárólag $f(x)$-ből áll.

(3) $x \in D \setminus C$. Ekkor valamely k természetes számra $x \in D_k$. Ebben az esetben ha $n \geq k$, akkor az A feletti grafikonpontok körül felvett $B((x, f(x)), \varepsilon_{x,n})$ környezetek nem metszhetik v_x-et. Fennáll továbbá, hogy kellően nagy n-re C feletti grafikonpontok körül felvett környezetek se metszhetik v_x-et, hiszen az ilyen környezetek egymásba skatulyázottak és metszetük kizárólag $f|C$ grafikonjából áll. Tehát ha $S_n(x)$-re vagyunk kíváncsiak, kellően nagy n esetén pusztán az $I \setminus (A \cup C)$ pontjaival kell foglalkoznunk. Így $S(x)$ vizsgálatában is, amennyiben $x \in D \setminus C$, csak

ezen helyek lesznek relevánsak. Ezeken a helyeken viszont pontosan úgy definiáltuk az f-et és az S'_n-t alkotó környezeteinket, mint a nem korlátos Baire-2 esetben tekintett f_0-t és az S'_n-t alkotó környezeteket. Ebből adódóan az ott adott bizonyításunk arra, hogy egy tetszőleges $x \in I$-re $S(x) = G_0(x)$, helytáll itt is, amennyiben célunk $S(x) = G(x)$ bizonyítása. Így ezt az esetet is tisztáztuk.

(4) $x \in I \setminus (A \cup C \cup D)$. Indirekt tegyük most fel, hogy $S(x)$ tartalmaz $f(x)$-től eltérő y pontot. Ekkor $S'_n(x)$-nek minden n esetén választható egy olyan z_n pontja, amelyre $|f(x) - z_n| \geq |f(x) - y|$, azaz z_n legalább olyan távol esik $f(x)$-től, mint y. Ha n kellően nagy, akkor ez az (x, z_n) pont egy olyan grafikonpont körüli környezetből kerül ki, ami $I \setminus C$ felett van. Ugyanis elég nagy n-re a C feletti grafikonpontok körül felvett környezetek nem metszhetik v_x-et a feltételeink alapján.

Ekkor a (z_n) sorozatnak $\overline{\mathbb{R}}$-ben van egy z torlódási pontja. Ekkor nyilván erre a z-re is $|f(x) - z| \geq |f(x) - y|$, tehát $f(x) \neq z$. Ugyanakkor kellően nagy n-re (x, z_n)-től legfeljebb $\frac{1}{n}$ távolságra esik egy nem C feletti G-beli pont. Következésképp (x, z)-hez tudunk konvergálni olyan (p_n) grafikonpontokkal, amelyek $I \setminus C$ felett vannak. Feltehető, hogy ezen grafikonpontok mind eltérőek. Ekkor ezek vagy T-beliek, vagy A felettiek. Ugyanakkor adott $\varepsilon > 0$-ra kellően nagy n esetén egy A-beli p_n grafikonpont is legfeljebb ε távolságra esik egy T-beli ponttól, mint arra a torlódási lemma bizonyítását követően felhívtuk a figyelmet. Ebből azonnal látszik, hogy $\overline{T}$-nek is pontja (x, z). Ez viszont ellentmondás. Ugyanis $\overline{T}(x)$ az esetfeltételből adódóan kizárólag $f(x)$-et tartalmazza. Tehát végső soron ezzel az esettel is készen vagyunk.

Tehát $S = G$, így az ACP-tétel alkalmazható. Azaz f olyan Baire-1 osztályú függvény, amelyre $L_f = T$. Mi épp egy ilyen függvény létezését óhajtottuk igazolni, ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

$\square$

6. Egy kis kitérő

Ezen tételeket követően idekívánkozik egy megjegyzés. Nevezetesen az utolsó tétel feltételei között szerepelt egy kikötés $\overline{T}$-re vonatkozólag. Ugyanakkor az általunk adott konstrukcióra az nem feltétlenül áll fenn, hogy $\overline{T} = \overline{L_f}$.

Legyen például T a következő zárt halmaz: legyen $C = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, $c_1 = 0$, valamint $n \geq 2$ esetén $c_n = \frac{1}{n-1}$. Legyen minden C-n kívül eső x pontra $T(x) = \{-\frac{1}{d(x,C)}\}$, ahol $d(x,C)$ az x pont C-től való távolsága. Ekkor erre a T-re könnyen átláthatóan teljesülnek a tétel feltételei. Az is igaz, hogy $\overline{T}(0) = \{-\infty\}$. Tekintsük most f-et, konkrétan $\overline{L_f}(0)$-t. Emlékeztetünk, hogy a konstrukciónkban $f(c_n) = n$. Nem nehéz meggondolni, hogy ekkor $\overline{L_f}(0) = \{-\infty, +\infty\}$. Tehát habár $L_f(0) = T(0) = \emptyset$, azaz az eddig vizsgált halmazaink egyeznek, de $\overline{T}(0) \neq \overline{L_f}(0)$.

Ez tehát felvet két újabb kérdést: igaz-e az általános, azaz nem feltétlenül korlátos Baire-1 és Baire-2 osztályú függvényekre vonatkozó tételeink egy olyan erősebb változata, miszerint olyan f is létezik ugyanazon feltételek mellett, ami egyidejűleg kielégíti az $L_f = T$ és az $\overline{L_f} = \overline{T}$ feltételeket. Ezen kérdések azonban egyszerűen megválaszolhatóak. Az világos, hogy a megadott konstukciókban $\overline{T} \subseteq \overline{L_f}$. Valóban, T minden pontjához van tetszőlegesen közel G-beli pont, így ha tekintjük $\overline{T}$ egy (x, ∞) alakú pontját, akkor ehhez is tarthatunk G-beli pontokkal. Tehát ha $\overline{L_f} \neq \overline{T}$, az azt jelenti, hogy $\overline{T}$ valódi részhalmaza $\overline{L_f}$-nek.

A bizonyításokból jól látszik, hogy csak C feletti grafikonpontokkal tarthatunk egy olyan $\overline{L_f}$-beli ponthoz, ami nem $\overline{T}$-beli. Nevezetesen ha tekintjük grafikonpontok olyan $I\times\overline{\mathbb{R}}$-ben konvergens (p_n) sorozatát, ami csak véges sok C feletti grafikonpontot tartalmaz, akkor ennek egy idő után már csak A feletti vagy T-beli elemei vannak. Viszont az A feletti p_n-ek is elég nagy n esetén már tetszőlegesen közel vannak egy T-beli ponthoz (feltéve a torlódási lemma erősebb változatát), így $\overline{L_f}$ olyan pontjai, amikhez ilyen grafikonbeli sorozat konvergál, egyszersmind $\overline{T}$-beliek is. Tehát ha van $\overline{L_f}$-nek olyan P pontja, ami nem $\overline{T}$-beli, akkor ehhez létezik kizárólag C feletti grafikonpontokból álló sorozat, ami P-hez konvergál.

Ez viszont könnyedén orvosolható: ha $C = \{c_1, c_2, ...\}$, akkor legyen $|f(c_n)| = n$ minden n természetes számra. A konkrét előjel attól függ, hogy $\overline{T}$-nek a $(c_n, +\infty)$ vagy $(c_n, -\infty)$ jelenik meg a végtelenbeli pontjai között. Ha mindkettő előfordul, akkor mondjuk legyen $f(c_n) = n$. Ha így adunk értéket a C-beli pontokban, az az L_f-et nyilván nem változtatja meg, s így továbbra is $L_f = T$. Valóban, hiszen ha C feletti grafikonpontok egy sorozata konvergál egy $[0,1] \times \overline{\mathbb{R}}$-beli ponthoz, akkor az vagy $(x, +\infty)$, vagy $(x, -\infty)$ alakú. Tegyük fel, hogy az előbbi áll fenn, a két eset lényegében szimmetrikus. Tehát egy (c_{n_k}) sorozatra $(c_{n_k}, f(c_{n_k}))$ tart $(x, +\infty)$-hez, azaz (c_{n_k}) tart x-hez, $(f(c_{n_k}))$ tart $+\infty$-hez. Ekkor feltehető, hogy minden $f(c_{n_k})$ pozitív: a negatív tagokat kidobhatjuk, hiszen csak véges sokan lehetnek. Ekkor definíció alapján c_{n_k}-nak az $\frac{1}{n_k}$ sugarú környezetében választható olyan a_k, amire $T(a_k)$-nak van az n_k-nál nagyobb eleme. Legyen ez a T-beli pont t_k. Ekkor minden k-ra ezt a t_k-t kiválasztva nyilván egy olyan T-beli elemekből álló sorozatot kapunk, ami szintén $(x, +\infty)$-hez tart. Tehát minden $\overline{L_f}$-beli elem egyszersmind $\overline{T}$-ben is benne van. Ezzel ezt a kérdést is tisztáztuk.

Hivatkozások

[1] E. S. Thomas, *Some characterizations of functions of Baire class 1*, Proc. Amer. Math. Soc., **17** (1966), 456-461.

[2] S. J. Agronsky, J. G. Ceder, T. L. Pearson, *Some characterizations of Darboux Baire 1 Functions*, Real Analysis Exchange Vol. **23**(2), 1997-1998, pp. 421-430.

[3] A. M. Bruckner, J. B. Bruckner, B. S. Thomson *Real Analysis: Second Edition*, ClassicalRealAnalysis.com (2008)

1. Függelék

A témavezetőmhöz én fordultam azzal a kérdéssel, hogy a dolgozatban áttekintett torlódási halmazok karakterizálva vannak-e már. Miután rávilágított arra, hogy ez a kérdés tetszőleges függvény megengedése mellett igen egyszerű, azt javasolta, koncentráljak inkább speciális függvényosztályokra. Így döntottem a Baire-1 és Baire-2 osztályú függvények vizsgálata mellett.

A bizonyítások két részre tagolódnak: egy függvénykonstrukcióra, illetve a megfelelően megkonstruált függvény Baire-osztályának vizsgálatára. Ezek két tétel alkalmazásán alapulnak: ezek az Agronsky, Ceder és Pearson által adott Baire-1 függvényekre vonatkozó karakterizáció, illetve egy, a témában bevezető kérdést lekezelő úgynevezett torlódási lemma, melyet az itt való alkalmazásra én dolgoztam ki. (Bár nincs kétségem azzal kapcsolatban, hogy ez már korábban is létező eredmény volt valamilyen formában.) Ezen tételek szerepe a kutatásban elvitathatatlan: a torlódási lemma a konstrukciók kulcslépése, az Agronsky-Ceder-Pearson-féle karakterizáció pedig rendkívül hasznos, ha egy alapvetően grafikonjával definiált függvényről akarjuk igazolni, hogy Baire-1 osztályú. Minthogy ezen eszközök mindegyike elemi, az ezeken túlmutató gondolatmenetek is jórészt egyszerű ötleteket alkalmazó, igaz, olykor hosszadalmas és több lépésből álló manipulációk.