

AZ AFFIN GEOMETRIA ELEMEI I.

Moussong Gábor, 2009

Az affin geometria lényegében a vektorterek geometriája. Azt vizsgálja, milyen geometriai fogalmak értelmezhetők és milyen geometriai összefüggések tárhatók fel kizárólag a vektortér-tulajdonságok felhasználásával. Tehát például mértékviszonyokról (távolságról, szögről, térfogatról) nincsen szó az affin geometriában. Vannak viszont olyan geometriai fogalmak, mint például a párhuzamosság vagy az osztóviszony, amelyek származtathatók pusztán a tér lineáris struktúrájából, ezért ezek az affin geometriához tartoznak. Ilyen fogalmakról lesz szó az alábbiakban. Tételeink egy jó részénél nincs is szükség bizonyításra, mert csupán átfogalmazásai vagy közvetlen következményei a lineáris algebrából ismert összefüggéseknek. Fogalmainkat tetszőleges test feletti, tetszőleges dimenziójú vektorterek felhasználásával vezetjük be. Ehhez motiváció gyanánt persze a valós, legfeljebb 3-dimenziós eset, azaz a klasszikus geometria eszközei szolgálnak.

1. Affin terek és affin leképezések

1.1. Definíció (Affin tér). Legyen \mathbf{F} (kommutatív) test, V vektortér \mathbf{F} fölött, és X egy tetszőleges halmaz. Affin struktúrának (pontosabban, \mathbf{F} fölötti affin struktúrának) nevezzük a $\Phi : X \times X \rightarrow V$ leképezést, és (\mathbf{F} fölötti) affin térnek az (X, V, Φ) hármast, ha teljesül:

- (1) minden $A \in X$ -re a $\Phi_A : X \rightarrow V$, $\Phi_A(B) = \Phi(A, B)$ leképezés bijektív, és
- (2) minden $A, B, C \in X$ -re $\Phi(A, B) + \Phi(B, C) = \Phi(A, C)$.

Gyakran magát X -et nevezzük affin térnek, ha egyértelmű, hogy mely affin struktúrával van ellátva. X elemeit pontoknak nevezzük. A leggyakrabban $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ vagy \mathbf{C} , ilyenkor valós, illetve komplex affin térről beszélünk. A véges testek fölötti affin terek érdekes kombinatorikai struktúrákhoz vezetnek. A továbbiakban, hacsak másként nem hangsúlyozzuk, minden vektortér és affin tér ugyanazon \mathbf{F} test fölött értendő.

Jelölések, megállapodások:

- $A, B \in X$ esetén a $\Phi(A, B) \in V$ vektorra inkább az \overrightarrow{AB} jelölést használjuk. Ezzel (2) az $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ alakban írható. Rögtön adódik $\overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$ és $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ minden $A, B \in X$ -re.
- $A \in X$ -re X_A jelöli azt a vektorteret, amelynek az alaphalmaza X , és amelyre $\Phi_A : X_A \rightarrow V$ izomorfizmus. Azt mondjuk, hogy az X_A vektorteret az X affin tér „vektORIZÁLÁSÁVAL” nyerjük az A pontban.
- X dimenziójának definíció szerint V dimenzióját tekintjük (és $\dim X$ -szel jelöljük). Affin egyenesnek mondjuk az egydimenziós affin tereket, affin síknak a kétdimenziósakat.

1.2. Példák

- Ha X a(z axiomatikusan értelmezett) klasszikus euklideszi tér, V az X -beli szabad vektorok alkotta vektortér \mathbf{R} fölött, Φ pedig a rendezett pontpárokhoz mint irányított szakaszokhoz az ekvivalenciaosztályukat mint vektort rendeli, akkor

(X, V, Φ) háromdimenziós valós affin tér. Bármely rögzített $A \in X$ -re az X_A vektortér az A kezdőpontú helyvektorok tere.

- Vektortér természetes affin struktúrája: Ha V tetszőleges vektortér, akkor az $X = V$ halmazon a $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ ($\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$) leképezés affin struktúrát ad meg.
- Az \mathbf{F} test, mint egydimenziós vektortér, az affin egyenes standard példája („szám-egyenes”). Bármely affin egyenes vektorizáció, majd a keletkező egydimenziós vektortérben bázis rögzítése által azonosítható \mathbf{F} -fel. Ez gyakorlatilag a 0 és az 1 testelemek kijelölésével egyenértékű.
- Alterek eltoltjai: Ha V tetszőleges altér egy W vektortérben, továbbá $\mathbf{v} \in W$ tetszőleges rögzített vektor, akkor az $X = V + \mathbf{v}$ halmazon ugyancsak affin struktúrát definiál a $\Phi : X \times X \rightarrow V$, $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ ($\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V + \mathbf{v}$) leképezés.
- Direkt szorzat: Ha (X_1, V_1, Φ_1) és (X_2, V_2, Φ_2) affin terek, akkor $(X_1 \times X_2, V_1 \times V_2, \Phi_1 \times \Phi_2)$ is az.
- Faktortér: Ha adott az (X, V, Φ) affin tér és a V vektortér egy W altere, akkor vezessük be az X halmazon azt a \sim ekvivalenciarelációt, amelynél az X -beli A és B pontokra $A \sim B$ pontosan akkor teljesül, ha $\overrightarrow{AB} \in W$. Legyen $X' = X / \sim$ az ekvivalenciaosztályok halmaza és V' a V/W faktortér, ekkor a $\Phi' : X' \times X' \rightarrow V'$, $\Phi'([A], [B]) = [\overrightarrow{AB}]$ leképezés affin struktúra az X' halmazon. Az (X', V', Φ') affin teret az X tér W szerinti faktorterének nevezzük.

1.3. Definíció (Affin leképezés). Legyenek (X, V, Φ) és (X', V', Φ') affin terek. Egy $f : X \rightarrow X'$ leképezést affin leképezésnek nevezünk, ha alkalmas $\varphi : V \rightarrow V'$ lineáris leképezéssel bármely $A, B \in X$ -re $\varphi(\Phi(A, B)) = \Phi'(f(A), f(B))$ (azaz $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$) teljesül.

Nyilván φ -t az f affin leképezés egyértelműen meghatározza. Ezt a φ lineáris leképezést az f „linearizáltjának” (vagy f deriváltjának) nevezhetjük. A továbbiakban gyakran alkalmazzuk f linearizáltjára az $L(f)$ jelölést.

Észrevehetjük, hogy ilyenkor bármely $A \in X$ pont kiválasztásával a

$$\begin{array}{ccc} X_A & \xrightarrow{f} & X'_{f(A)} \\ \downarrow \Phi_A & & \downarrow \Phi'_{f(A)} \\ V & \xrightarrow{L(f)} & V' \end{array}$$

diagram kommutatív, azaz $\Phi'_{f(A)} \circ f = L(f) \circ \Phi_A$. Ebből rögtön adódik az affin leképezések alábbi jellemzése.

1.4. Állítás. Egy $f : X \rightarrow X'$ leképezés pontosan akkor affin, ha bármely (vagy akár csak egyetlen) $A \in X$ -re $f : X_A \rightarrow X'_{f(A)}$ lineáris. \square

1.5. Állítás. Bármely affin tér identikus leképezése és bármely konstans leképezése affin, affin leképezések kompozíciója affin, bijektív affin leképezés inverze affin. \square

1.6. Definíció (Affin izomorfizmus, affinitás). A bijektív affin leképezéseket affin izomorfizmusoknak nevezzük. Két affin tér izomorf, ha van közöttük affin izomorfizmus. Egy affin tér saját magára képező affin izomorfizmusait affin automorfizmusoknak, vagy röviden affinitásoknak nevezzük. Az X affin tér affinitásai a

kompozíció műveletére nézve csoportot alkotnak, ezt a csoportot X affin csoportjának nevezzük és $\text{Aff}(X)$ -szel jelöljük.

Az affinitás fogalmának segítségével ismét körülírhatjuk, mi az affin geometria tárgya: azokkal a geometriai fogalmakkal és mennyiségekkel foglalkozik, amelyek affinitásokkal szemben invariánsak.

1.7. Állítás. *Tetszőleges (X, V, Φ) affin tér izomorf a természetes affin struktúrával ellátott V vektortérrel.*

Bizonyítás: Tetszőlegesen rögzített $P \in X$ ponttal $\Phi_P : X \rightarrow V$ affin izomorfizmus, melyre $L(\Phi_P) = id_V$, ugyanis minden $A, B \in X$ -re $\Phi(A, B) = \Phi(A, P) + \Phi(P, B) = \Phi_P(B) - \Phi_P(A)$. \square

Látjuk tehát, hogy az affin tér és a vektortér fogalma nem sokban különbözik; az eltérés lényegében csak annyi, hogy az affin tér esetében „elfelejtjük”, hol van az origó. Az affin teret bármely pontjának origóként való kitüntetése vektortérre teszi. Ezt a tényt későbbi számolásainkban olyan formában többször is ki fogjuk használni, hogy bármely affin térről feltehetjük, hogy valamely vektortérből keletkezik a természetes affin struktúra bevezetésével. Ebből rögtön következik például, hogy két (ugyanazon test feletti) affin tér pontosan akkor izomorf, ha a dimenziójuk egyenlő.

Az az eljárás, amelynek során valamely X affin teret egy $P \in X$ origó kiválasztásával az X_P vektortérrel, majd azon keresztül V -vel azonosítunk, nem „természetes”. Bár ez az eljárás végrehajtható minden X affin térre, a P pont önkényes megválasztásával jár, amire nincs „egységes”, X -től független módszer. Ezzel szemben látni fogjuk majd a 7. szakaszban, hogy bármely X affin tér felfogható úgy, mint egy az X -hez természetes módon rendelt \widehat{X} vektortérben egy lineáris altér eltoltja. Az itt hangsúlyozott „természetesség” pontos matematikai jelentését az absztrakt algebra tisztázza majd a kategóriák és a funktorok fogalmának segítségével.

1.8. Állítás. *Lássuk el a V és W vektortereket természetes affin struktúrájukkal. Egy $f : V \rightarrow W$ leképezés pontosan akkor affin, ha $f(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) + \mathbf{b}$ alakú, ahol $\varphi : V \rightarrow W$ lineáris és $\mathbf{b} \in W$.*

Bizonyítás: Ha f affin, akkor alkalmas $\varphi (= L(f)) : V \rightarrow W$ lineáris leképezéssel $\varphi(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{u})$ minden $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ -re; ekkor $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $\mathbf{x} = \mathbf{v}$ és $\mathbf{b} = f(\mathbf{0})$ választással adódik, hogy $f(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) + \mathbf{b}$ minden $\mathbf{x} \in V$ -re.

Megfordítva, ha f a fenti alakú, akkor a $\varphi(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = (\varphi(\mathbf{v}) + \mathbf{b}) - (\varphi(\mathbf{u}) + \mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{u})$ egyenlőség mutatja, hogy f affin. \square

1.9. Definíció (Affin koordinátarendszer). Ha X d -dimenziós affin tér az \mathbf{F} test fölött, akkor X -beli affin koordinátarendszernek nevezünk egy tetszőleges $\mathbf{x} : X \rightarrow \mathbf{F}^d$ affin izomorfizmust. Egy affin koordinátarendszer megadása egyenértékű az origó kijelölésével X -ben és egy bázis rögzítésével V -ben. Ha rögzítjük az \mathbf{x} affin koordinátarendszert, akkor egy $P \in X$ pont affin koordinátáin az $\mathbf{x}(P) \in \mathbf{F}^d$ vektor koordinátáit értjük.

Ha \mathbf{x} és \mathbf{y} két affin koordinátarendszer X -ben, akkor az $\mathbf{y} \circ \mathbf{x}^{-1} : \mathbf{F}^d \rightarrow \mathbf{F}^d$ leképezés affin izomorfizmus, azaz az 1.8. Állítás szerint $\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$, ahol $A \in GL(d, \mathbf{F})$ és $\mathbf{b} \in \mathbf{F}^n$. (Itt $GL(d, \mathbf{F})$ az \mathbf{F} fölötti $d \times d$ méretű invertálható mátrixok csoportját jelöli.)

1.10. Példák, definíciók (Eltolás, homotécia, dilatáció)

- Ha X' az X affin térnek egy $W \leq V$ altér szerinti faktortere, akkor az $X \rightarrow X'$ faktorizáló leképezés affin leképezés. Megfordítva, ha $f : X \rightarrow X'$ tetszőleges szürjektív affin leképezés, akkor X' izomorf X faktorával a $\text{Ker } L(f) \leq V$ altér szerint.
- $f \in \text{Aff}(X)$ eltolás, ha $L(f)$ identikus. Az eltolások részcsoporthoz alkotnak $\text{Aff}(X)$ -ben. Az $L : \text{Aff}(X) \rightarrow GL(V)$ hozzárendelés csoport-homomorfizmus (ahol $GL(V)$ a $V \rightarrow V$ invertálható lineáris leképezések csoportja); az X affin tér eltolásainak a csoportja ennek az L homomorfizmusnak a magja.

A természetes affin struktúrával ellátott vektorterek esetében az eltolások valamely rögzített vektor hozzáadását jelentik. Ebből rögtön látható, hogy tetszőleges X affin tér eltolásainak a csoportja izomorf a V vektortérrel, mint additív csoporttal.

- Adott $P \in X$ és $\lambda \in \mathbf{F}^*$ ($= \mathbf{F} - \{0\}$) esetén P középpontú, λ arányú X -beli homotéciának nevezzük azt a $H_{P,\lambda} : X \rightarrow X$ leképezést, amelynél minden $A \in X$ pontra $\overrightarrow{PH_{P,\lambda}(A)} = \lambda \overrightarrow{PA}$ (azaz $H_{P,\lambda}(A) = \Phi_P^{-1}(\lambda \Phi_P(A))$). Ekkor $H_{P,\lambda} \in \text{Aff}(X)$ és $L(H_{P,\lambda}) = \lambda \cdot id_V$. Nyilván $H_{P,\lambda} \circ H_{P,\mu} = H_{P,\lambda\mu}$, azaz a rögzített középpontú homotéciák egy \mathbf{F}^* -gal (az \mathbf{F} test multiplikatív csoportjával) izomorf részcsoporthoz alkotnak $\text{Aff}(X)$ -ben.
- Dilatációnak nevezzük azokat az f affinitásokat, amelyekre az $L(f)$ lineáris leképezés egy nemzérus skalárral való szorzás. Az X affin tér dilatációi részcsoporthoz alkotnak $\text{Aff}(X)$ -ben, hiszen definíció szerint a dilatációk az $L^{-1}(\mathbf{F}^* id_V)$ halmazt alkotják, amely részcsoporthoz, hiszen egy $GL(V)$ -beli részcsoporthoz inverz képe az L homomorfizmusnál.

Mind az eltolások, mind a homotéciák egyben dilatációk is.

Az identikus leképezés egyszerre eltolás is és homotécia is (tetszőleges középponttal), és csak az identitás ilyen.

1.11. Állítás. *Ha egy dilatáció különbözik az identitástól, akkor vagy eltolás, vagy homotécia.*

Bizonyítás: Legyen $f \in \text{Aff}(X)$, melyre $L(f) = \lambda \cdot id_V$, $\lambda \neq 0, 1$. Azt kell belátni, hogy létezik olyan $P \in X$, hogy $f = H_{P,\lambda}$.

Fixpontot keresünk f számára. Feltehető, hogy $X = V$ a természetes affin struktúrával, ekkor az 1.8. Állítás szerint $f(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) + \mathbf{b}$ alakú, ahol most $\varphi(\mathbf{x}) = L(f)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Az $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mathbf{b}$ egyenletnek $\lambda \neq 1$ miatt létezik megoldása, mégpedig a $\mathbf{p} = \mathbf{b}/(1 - \lambda)$ vektor, amely az f (egyetlen) fixpontja. Ezzel $f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{p} + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{p})$, azaz $f = H_{\mathbf{p},\lambda}$. \square

1.12. Következmény. *A kompozíció művelete nem vezet ki a homotéciák és eltolások alkotta halmazból.* \square

2. Affin alterek

2.1. Definíció (Affin altér). Legyen (X, V, Φ) affin tér és $Y \subseteq X$ tetszőleges részhalmaz. Azt mondjuk, hogy Y affin altér X -ben, ha létezik olyan $W \leq V$ lineáris altér, hogy az $(Y, W, \Phi|_{Y \times Y})$ hármas affin tér. Ilyenkor Y a W alteret

nyilván egyértelműen meghatározza. W -re időnként az \overrightarrow{Y} jelölést használjuk. (Így például $V = \overrightarrow{X}$.)

2.2. Állítás. Az X affin tér tetszőleges $Y \subseteq X$ részhalmazára az alábbi állítások ekvivalensek:

- (i) Y affin altér;
- (ii) $Y \neq \emptyset$ és minden $A \in Y$ -ra $\Phi_A(Y) \leq V$ lineáris altér;
- (iii) létezik olyan $A \in Y$, hogy $\Phi_A(Y) \leq V$ lineáris altér;
- (iv) létezik olyan $W \leq V$ lineáris altér és olyan $A \in X$, hogy $Y = \Phi_A^{-1}(W)$.

Bizonyítás: Az (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) implikációk a definíciókból rögtön adódnak. A (iv) \Rightarrow (i) következtetéshez azt kell meggondolni, hogy bármely $B, C \in Y$ -ra $\overrightarrow{BC} \in W$. Viszont $Y = \Phi_A^{-1}(W)$ miatt $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \in W$, és így $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \in W$. \square

2.3. Példák

- Vektortér természetes affin struktúrájára nézve az affin alterek pontosan a lineáris alterek eltoltjai. (Ez 2.2.(iv)-ből rögtön látszik.)
- Tetszőleges $f : X \rightarrow X'$ affin leképezés képhalmaza affin altér az X' affin térben. (Ez azonnal adódik az 1.8. Állítás alkalmazásával.) Ha f injektív, akkor affin izomorfizmus X és az $f(X)$ affin altér között. Ilyenkor azt mondjuk, hogy f affin beágyazás X -ről X' -be.
- Tetszőleges affin térben a 0-dimenziós affin alterek pontosan az egypontú részhalmazok (amelyeket azonosnak tekintünk a tér pontjaival). Az 1-dimenziós affin alterek az affin tér egyenesei, a 2-dimenziósak az affin tér síkjai. Egy d -dimenziós affin térben, ahol d véges, a $(d-1)$ -dimenziós affin altereket hipersíkoknak nevezük. Tehát pl. egy egyenes pontjai hipersíkok az egyenesen, illetve egy sík hipersíkjai a benne fekvő egyenesek.
- Az X affin tér pontjai egy rendszerét kollineárisnak nevezük, ha valamely X -beli egyenes tartalmazza őket. Bármely két pont kollineáris, sőt, ha $A, B \in X$ két különböző pont, akkor egyértelműen létezik olyan X -beli egyenes, amely A -t és B -t tartalmazza, mégpedig a $\Phi_A^{-1}(\mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB})$ ponthalmaz. Erre az egyenesre bevezetjük az $\langle A, B \rangle$ jelölést.

Vektorterekben a koordinátákban felírt homogén lineáris egyenletrendszerek megoldáshalmazai éppen a lineáris alterek. Ennek mintájára affin terekben az affin alterek inhomogén lineáris egyenletrendszerek megoldáshalmazaiként nyerhetők. Ezt a tényt fogalmazzuk meg „koordinátamentes” formában a 2.5. Állítás, amelyet az affin formák definíciójával készítünk elő.

Idézzük föl előljáróban a lineáris forma fogalmát. A V vektortéren értelmezett lineáris formán egy tetszőleges $V \rightarrow \mathbf{F}$ lineáris leképezést értünk. A lineáris formák a természetes módon adódó műveletekkel vektorteret alkotnak \mathbf{F} fölött, amit V duális térnek nevezünk és általában V^* -gal jelölünk.

2.4. Definíció (Affin forma). Az \mathbf{F} test feletti X affin téren értelmezett affin formának nevezünk egy tetszőleges $s : X \rightarrow \mathbf{F}$ affin leképezést. A természetes (azaz pontonként értelmezett) összeadásra és skalárral való szorzásra nézve az affin formák \mathbf{F} fölött vektorteret alkotnak, amelyre az X^\bullet jelölést vezetjük be.

Bármely affin forma linearizáltja egy $V \rightarrow \mathbf{F}$ lineáris leképezés, azaz a V^* duális vektortér eleme. Ezáltal kapjuk az $L : X^\bullet \rightarrow V^*$ lineáris leképezést, amely nyilván

szürjektív, és amelynek a magja a konstans affin formákból áll. Így tehát véges dimenziós X esetében $\dim X^\bullet = \dim X + 1$. Valamely $P \in X$ pont rögzítésével az $s \mapsto (L(s), s(P))$ hozzárendelés izomorfizmus az X^\bullet és a $V^* \oplus \mathbf{F}$ vektorterek között. Az affin formák terének ez a direkt felbontása ugyanolyan értelemben nem természetes, mint ahogyan X azonosítása a V vektortérrel nem az. Ha viszont eleve $X = V$ a természetes affin struktúrájával, akkor persze $X^\bullet = V^* \oplus \mathbf{F}$ az $s(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) + \mathbf{b} \iff (\varphi, \mathbf{b}) = (L(s), s(\mathbf{0}))$ megfeleltetéssel.

Tetszőleges X esetén létezik két kitüntetett affin forma X -en: a konstans 0 és a konstans 1 értékű függvény; ezeket $\mathbf{0}$ -val, illetve $\mathbf{1}$ -gyel jelöljük.

Ha $s \in X^\bullet$ tetszőleges affin forma az X affin téren, akkor $\mathcal{Z}(s)$ jelöli s zéróhalmazát, azaz az $\{A \in X : s(A) = 0\}$ halmazt. Például $\mathcal{Z}(\mathbf{0}) = X$ és $\mathcal{Z}(\mathbf{1}) = \emptyset$. Ha $S \subseteq X^\bullet$ tetszőleges nemüres részhalmaz, akkor $\mathcal{Z}(S)$ jelöli az S -beli affin formák zéróhalmazainak közös részét: $\mathcal{Z}(S) = \bigcap \{\mathcal{Z}(s) : s \in S\}$. Nyilván $\mathcal{Z}(S) = \mathcal{Z}(U)$, ahol U az S által az X^\bullet vektortérben generált lineáris altér.

Ha $\dim X = d$ véges és $\mathbf{x} : X \rightarrow \mathbf{F}^d$ affin koordinátarendszer X -ben, akkor az 1.8. Állítás alkalmazásával az $s \in X^\bullet$ affin formák általános koordinátás alakját az $s \circ \mathbf{x}^{-1} : \mathbf{F}^d \rightarrow \mathbf{F}$, $s(x_1, \dots, x_d) = a_1 x_1 + \dots + a_d x_d + b$ inhomogén lineáris függvény adja. Az $a_1, \dots, a_d, b \in \mathbf{F}$ konstansok tetszőleges megválasztása affin formát definiál.

A következő állítás csupán a lineáris egyenletrendszerekről szóló szokásos lineáris algebrai megállapítások átfogalmazása az affin geometria nyelvére. „Hétköznapi” tartalma az, hogy egy d -dimenziós affin térben a k -dimenziós affin altereket $d - k$ darab független inhomogén lineáris egyenlet írja le.

2.5. Állítás. *Legyen X véges dimenziós affin tér, $d = \dim X$. Egy $Y \subseteq X$ nemüres részhalmaz pontosan akkor k -dimenziós affin altér, ha létezik olyan $(d-k)$ -dimenziós $U \leq X^\bullet$ lineáris altér, hogy $\mathbf{1} \notin U$ és $Y = \mathcal{Z}(U)$. Speciálisan, ha $H \subset X$ hipersík, akkor van olyan $s \in X^\bullet$ affin forma, hogy $H = \mathcal{Z}(s)$, és megfordítva, bármely nemkonstans affin forma zéróhalmaza hipersík. Ha $s, t \in X^\bullet$ -ra $\mathcal{Z}(s) = \mathcal{Z}(t)$, akkor $t = \lambda s$ alkalmas $\lambda \in \mathbf{F}$, $\lambda \neq 0$ -val. \square*

2.6. Definíció (Párhuzamosság). Legyenek Y és Z affin alterek az X affin térben.

Azt mondjuk, hogy Y és Z párhuzamos (jelben: $Y \parallel Z$), ha $\vec{Y} = \vec{Z}$. A párhuzamosság nyilván ekvivalenciareláció X affin alterei halmazán. Párhuzamos affin alterek dimenziója egyenlő.

Azt mondjuk, hogy Y gyengén párhuzamos Z -vel (jelben: $Y \langle Z$), ha $\vec{Y} \leq \vec{Z}$. A gyenge párhuzamosság részben rendezési reláció X affin alterei halmazán. $Y \langle Z$ esetén nyilván $\dim Y \leq \dim Z$.

2.7. Állítás. *Bármely X affin tér Y és Z affin altereire érvényesek a következők.*

- (1) *Ha $Y \parallel Z$, akkor $Y = Z$ vagy $Y \cap Z = \emptyset$.*
- (2) *Ha $Y \langle Z$, akkor $Y \subseteq Z$ vagy $Y \cap Z = \emptyset$.*
- (3) *$Y \langle Z$ akkor és csak akkor áll fenn, ha létezik olyan $Y' \subseteq Z$ affin altér, hogy $Y' \parallel Y$.*
- (4) *Bármely $A \in X$ -hez egyértelműen létezik olyan Y' affin altér, hogy $A \in Y'$ és $Y' \parallel Y$.*
- (5) *Ha $Y \parallel Z$ és Y, Z véges dimenziósak, akkor belefoglalhatók egy legfeljebb eggyel magasabb dimenziós affin altérbe.*
- (6) *Ha Y és Z hipersíkok és $Y \cap Z = \emptyset$, akkor $Y \parallel Z$.*

Bizonyítás: (1), (2), (3) és (4) közvetlenül következik a definícióból.

Az (5) állítás bizonyításához válasszunk egy $A \in Y$ és egy $B \in Z$ pontot, legyen $W = \Phi_A(Y) \leq V$. Ha U a W és az \overrightarrow{AB} vektor generálta altér V -ben, akkor $S = \Phi_A^{-1}(U)$ affin altér X -ben, $Y \cup Z \subseteq S$, és $\dim S \leq \dim Y + 1$.

A (6) állítás bizonyításához feltesszük, hogy $X = V$ a természetes affin struktúrával, $Y = W + \mathbf{a}$, $Z = U + \mathbf{b}$, ahol W és U lineáris hipersíkok V -ben. Ha indirekt feltevéssel $Y \nparallel Z$, akkor $W \neq U$, és így szükségképpen $W + U = V$. Emiatt található $\mathbf{w} \in W$ és $\mathbf{u} \in U$ úgy, hogy $\mathbf{w} - \mathbf{u} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. Ekkor $\mathbf{x} = \mathbf{w} + \mathbf{a} = \mathbf{u} + \mathbf{b}$, ahonnan $\mathbf{x} \in Y \cap Z$, ami ellentmond az $Y \cap Z = \emptyset$ feltételnek. \square

Megjegyzés. Ha X affin sík, $E \subset X$ egyenes, $P \in X - E$, akkor (4)-ből és (5)-ből következően egyértelműen létezik olyan $E' \subset X$ egyenes, hogy $P \in E'$ és $E' \cap E = \emptyset$. A párhuzamossági axióma állítása tehát automatikusan érvényes az affin geometriában.

2.8. Állítás. *Bármely dilatáció minden affin alteret vele párhuzamos affin altérbe visz.*

Bizonyítás: Ha f dilatáció, akkor $L(f)$, skalárral való szorzás lévén, minden V -beli lineáris alteret önmagába visz. Így tetszőleges Y affin altérre $\overrightarrow{f(Y)} = L(f)(\overrightarrow{Y}) = \overrightarrow{Y}$ miatt $f(Y) \parallel Y$. \square

A 2.8. Állítás módot ad dilatációknál a képpont „szerkesztéssel” történő meghatározására.

2.9. Következmény. *Legyen f tetszőleges dilatáció egy X affin térben, $A \in X$, $A' = f(A) \neq A$, és E jelölje az $\langle A, A' \rangle$ egyenest. Legyen $B \in X$ tetszőleges, E -re nem illeszkedő további pont. Az ehhez tartozó $B' = f(B)$ képpont az alábbi F és G egyenesek metszéspontjaként áll elő:*

F az a B -n átfektetett egyenes, amelyet f önmagába képez, azaz ha f homotécia P középponttal, akkor $F = \langle P, B \rangle$, ha pedig f eltolás, akkor F az E -vel párhuzamos egyenes B -n át;

G pedig az az A' -n átmenő egyenes, amely párhuzamos az $\langle A, B \rangle$ egyenessel. \square

2.10. Definíció (Komplementaritás). Az Y és Z affin alterek komplementer alterek az X affin térben, ha $V = \overrightarrow{Y} \oplus \overrightarrow{Z}$ direkt összeg. Ilyenkor $Y \cap Z$ egyetlen pont. A komplementaritás szimmetrikus reláció X affin alterei halmazán.

Affin alterek párhuzamosságát, illetve komplementaritását használva affin leképezések néhány fontos típusát tudjuk bevezetni.

2.11. Definíció (Vetítés altérre). Legyen Y affin altér az X affin térben, és rögzítsük az $\overrightarrow{Y} \leq V$ altér egy U direkt kiegészítőjét a V vektortérben. Definiáljuk a $p : X \rightarrow Y$ leképezést a következő módon. Tetszőleges $A \in X$ -hez egyértelműen található olyan $Z(A) \subseteq X$ affin altér, hogy $A \in Z(A)$ és $\overrightarrow{Z(A)} = U$. Ekkor $Z(A) \cap Y$ egy pontú; legyen $p(A)$ ez a pont. Vektorizálva és lineáris algebrára hivatkozva rögtön látszik, hogy p affin leképezés. Nyilván $p \circ p = p$. A p leképezést az X affin tér Y affin altérre történő U irányú vetítésének nevezzük.

2.12. Definíció (Párhuzamos vetítés). Legyen Y és Z két egyenlő dimenziójú affin altér az X affin térben és rögzítsük az $\overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z} \leq V$ alterek egy U közös direkt kiegészítőjét a V vektortérben. Ekkor a 2.11-beli p leképezés Z -re történő leszűkítése affin izomorfizmus Z és Y között. Ezt a $p|_Z$ leképezést a Z altér Y -ra történő U irányú párhuzamos vetítésének nevezzük.

2.13. Definíció (Affin szimmetria). Legyen Y affin altér az X affin térben és legyen $p : X \rightarrow Y$ a tér U irányú vetítése Y -ra. Bármely $A \in X$ -hez egyértelműen létezik olyan $\tau(A) \in X$ pont, melyre $\overrightarrow{p(A)\tau(A)} = \overrightarrow{Ap(A)}$. Ekkor $\tau \in \text{Aff}(X)$ és $\tau \circ \tau = \text{id}_X$. Ezt a τ leképezést az Y affin altérre vonatkozó U irányú affin szimmetriának nevezzük. Meggondolható, hogy ha $\text{char } \mathbf{F} \neq 2$, akkor Y pontosan a τ fixpontjaiból áll. A pontokra (azaz 0-dimenziós affin alterekre) vonatkozó affin szimmetriákat középpontos szimmetriáknak is nevezzük, ezek éppen a -1 arányú homotéciák.

3. Affin kombinációk, függetlenség, affin bázis

Vektortérben affin kombinációnak szokás nevezni az olyan lineáris kombinációkat, amelyekben az együtthatók összege 1. Ilyen fajta kombinációkat vektorok helyett egy affin tér pontjaiból is képezhetünk.

3.1. Definíció (Affin kombináció). Legyenek A_1, A_2, \dots, A_k pontok az X affin térben, legyenek továbbá adva a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbf{F}$ elemek, melyekre $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Azt mondjuk, hogy a B pont az A_i pontok λ_i együtthatós affin kombinációja, ha valamely $O \in X$ -re $\overrightarrow{OB} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$.

Vegyük észre, hogy ilyenkor bármely $O' \in X$ -re $\overrightarrow{O'B} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{O'A_i}$ ugyancsak fennáll, hiszen $\overrightarrow{O'B} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OB} = (\sum_{i=1}^k \lambda_i) \overrightarrow{O'O} + \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = \sum_{i=1}^k \lambda_i (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_i}) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{O'A_i}$. Speciálisan, $O' = B$ választással $\mathbf{0} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{BA_i}$ teljesül. Nyilván ez az utóbbi egyenlőség is alkalmas a B pont definiálására.

Ha $X = V$ a természetes affin struktúrával és az A_i, B pontok V -beli \mathbf{a}_i, \mathbf{b} vektorokkal vannak azonosítva, akkor $O = \mathbf{0}$ választással látható, hogy az affin kombináció fogalma valóban az 1 összegű együtthatókkal vett lineáris kombinációt jelenti: ilyenkor $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{a}_i$.

3.2. Állítás. Az affin leképezések felcserélhetők az affin kombinációk képzésével. Azaz: ha $f : X \rightarrow Y$ affin leképezés és X -ben a B pont az A_1, A_2, \dots, A_k pontok valamely affin kombinációja, akkor Y -ban az $f(B)$ pont az $f(A_1), f(A_2), \dots, f(A_k)$ pontok ugyanilyen együtthatós affin kombinációja.

Bizonyítás: Az 1.4. Állítást és a fenti észrevételt felhasználva rögtön adódik. \square

3.3. Állítás. Az X affin tér egy nemüres Y részhalmaza pontosan akkor affin altér, ha zárt az affin kombinációk képzésére, azaz ha tetszőleges $A_1, A_2, \dots, A_k \in Y$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbf{F}$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ esetén az A_i pontok λ_i együtthatós affin kombinációja is eleme Y -nak.

Bizonyítás: Feltesszük, hogy $X = V$ a természetes affin struktúrával.

Ha Y affin altér, azaz $Y = W + \mathbf{a}$ valamilyen $W \leq V$ -vel és $\mathbf{a} \in Y$ -nal, továbbá $\mathbf{a}_i = \mathbf{x}_i + \mathbf{a}$, ahol $\mathbf{x}_i \in W$, akkor $\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i (\mathbf{x}_i + \mathbf{a}) = (\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}_i) + (\sum_{i=1}^k \lambda_i) \mathbf{a} \in W + \mathbf{a} = Y$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy Y zárt az affin kombinációk képzésére és válasszunk egy tetszőleges $\mathbf{a} \in Y$ elemet. Megmutatjuk, hogy az $Y - \mathbf{a}$ halmaz lineáris altér V -ben. Legyenek $\mathbf{x}_i = \mathbf{a}_i - \mathbf{a} \in Y - \mathbf{a}$ tetszőleges elemek és $\lambda_i \in \mathbf{F}$ tetszőleges együtthatók ($i = 1, \dots, k$). Belátjuk, hogy az \mathbf{x}_i vektorok λ_i együtthatós lineáris kombinációja is $Y - \mathbf{a}$ -ban van. Legyen $\lambda_{k+1} = 1 - \sum_{i=1}^k \lambda_i$, ezzel $\mathbf{a} + \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}_i =$

$\lambda_{k+1}\mathbf{a} + \sum_{i=1}^k (\lambda_i\mathbf{a} + \lambda_i\mathbf{x}_i) = \lambda_{k+1}\mathbf{a} + \sum_{i=1}^k \lambda_i\mathbf{a}_i$, ami az Y -beli \mathbf{a} és \mathbf{a}_i elemek egy affin kombinációja, tehát Y -beli. \square

3.4. Következmény. Ha affin alterek egy tetszőleges rendszerének a metszete nem az üres halmaz, akkor affin altér. \square

3.5. Következmény. Bármely nemüres $S \subseteq X$ részhalmazhoz létezik legszűkebb, S -et tartalmazó affin altér. \square

3.6. Definíció (Affin burok). A nemüres $S \subseteq X$ részhalmazt tartalmazó legszűkebb affin alteret az S halmaz affin burkának nevezzük és $\langle S \rangle$ -sel jelöljük. Ilyenkor úgy is fogalmazhatunk, hogy az S halmaz affin generátorrendszer az $\langle S \rangle$ affin altérben. Ha S_1, \dots, S_k az X részhalmazainak vagy pontjainak (nemüres egyesítésű) listája, akkor $\langle S_1, \dots, S_k \rangle$ jelöli az egyesítésük affin burkát.

3.7. Állítás. Tetszőleges nemüres $S \subseteq X$ részhalmazra az S affin burka pontosan az S -beli elemek affin kombinációiból áll.

Bizonyítás: Jelöljük $C(S)$ -sel az S -beli elemek affin kombinációiból álló ponthalmazt. Belátjuk, hogy $\langle S \rangle = C(S)$.

Az $\langle S \rangle \supseteq C(S)$ tartalmazás fennáll, hiszen $\langle S \rangle$ affin altér, és így zárt az affin kombinációk képzésére (3.3. Állítás).

Az $\langle S \rangle \subseteq C(S)$ tartalmazáshoz (ismét a 3.3. Állítás felhasználásával) elég azt belátni, hogy affin kombinációk affin kombinációja a kiindulási pontoknak is affin kombinációja. Valóban, tekintsük az $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}_i$ affin kombinációt a V vektortérben, és tegyük föl, hogy mindegyik \mathbf{x}_i vektor maga is egy $\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^{k_i} \mu_{ij} \mathbf{y}_{ij}$ affin kombináció. Ekkor $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \sum_{j=1}^{k_i} \mu_{ij} \mathbf{y}_{ij} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_i \mu_{ij} \mathbf{y}_{ij}$ az \mathbf{y}_{ij} vektorok affin kombinációja, hiszen az együtthatók összege $\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_i \mu_{ij} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \sum_{j=1}^{k_i} \mu_{ij} = \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. \square

3.8. Példák. Bármely $A \in X$ pontra $\langle A \rangle = \{A\}$. Ha $A, B \in X$, $A \neq B$, akkor a 2.3-ban bevezetett jelöléssel összhangban $\langle A, B \rangle$ az A -n és B -n átfektetett egyenes. Ha $X = V$ és $A = \mathbf{a}$, $B = \mathbf{b} \in V$, akkor $\langle A, B \rangle = \{t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b} : t \in \mathbf{F}\}$.

3.9. Állítás. Tegyük fel, hogy $\text{char } \mathbf{F} \neq 2$. Az X affin tér egy nemüres Y részhalmaza pontosan akkor affin altér, ha bármely $A, B \in Y$ -ra $\langle A, B \rangle \subseteq Y$.

Bizonyítás: Affin alterekre a feltétel a 3.3. Állítás speciális eseteként teljesül. A fordított irányhoz feltehető, hogy $X = V$ és $\mathbf{0} \in Y$; azt kell bebizonyítani, hogy Y lineáris altér V -ben. Valóban, skalárral való szorzásra zárt, mert $\mathbf{x} \in Y$ -ra $\mathbf{F}\mathbf{x} = \langle \mathbf{0}, \mathbf{x} \rangle \subseteq Y$, és összegre zárt, mert $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Y$ -ra $\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{2} \in \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \subseteq Y$ és így $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \langle \mathbf{0}, \frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{2} \rangle \subseteq Y$. \square

Az affin alterek fenti jellemzése nyilvánvalóan nem érvényes a kételemű test feletti (legalább kétdimenziós) affin terekben, hiszen az egyenesek kételeműek, és így a 3.9. Állításban szereplő feltétel semmit sem követel Y -ről. Meggondolható viszont, hogy a 3.9. Állítás olyan formában is igaz, hogy a $\text{char } \mathbf{F} \neq 2$ kikötés helyett csak azt tesszük fel, hogy \mathbf{F} legalább háromelemű.

3.10. Állítás. Legyen Y véges dimenziós affin altér az X affin térben és $A \in X$. Ekkor $\dim \langle Y, A \rangle \leq \dim Y + 1$, és itt egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $A \notin Y$.

Bizonyítás: Feltehető, hogy $X = V$ és $\mathbf{0} \in Y$, ezzel lineáris algebrából jól ismert tényre vezettük vissza az állítást. \square

3.11. Következmény. *Bármely affin tér tetszőleges $k + 1$ elemű S részhalmazára $\dim\langle S \rangle \leq k$ teljesül.*

Bizonyítás: Közvetlenül adódik a 3.10. állításból k szerinti teljes indukcióval. \square

3.12. Állítás. *Az X affin tér tetszőleges $A_0, A_1, \dots, A_k \in X$ pontjaira az alábbi feltételek ekvivalensek:*

- (i) $\dim\langle A_0, A_1, \dots, A_k \rangle = k$;
- (ii) $A_i \notin \langle A_0, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_k \rangle$ minden $i = 0, 1, \dots, k$ -ra;
- (iii) $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k}$ lineárisan független vektorok V -ben;
- (iv) ha $O \in X$, $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{F}$, $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 0$ és $\sum_{i=0}^k \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = \mathbf{0}$, akkor $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$.

Bizonyítás: (i), (ii) és (iii) ekvivalenciája a 3.10. Állítás bizonyításához hasonlóan jól ismert lineáris algebrai tulajdonságokból adódik.

(iii) \Rightarrow (iv): $\sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i} = \sum_{i=1}^k \lambda_i (\overrightarrow{A_0O} + \overrightarrow{OA_i}) = -\lambda_0 \overrightarrow{A_0O} + (-\lambda_0 \overrightarrow{OA_0}) = \mathbf{0}$, ahonnan az $\overrightarrow{A_0A_i}$ vektorok lineáris függetlensége miatt $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$, és így $\lambda_0 = 0$.

(iv) \Rightarrow (iii): Tegyük fel, hogy $\sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i} = \mathbf{0}$. Legyen $\lambda_0 = -\sum_{i=1}^k \lambda_i$ és $O = A_0$, ekkor $\sum_{i=0}^k \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i} = \mathbf{0}$, így (iv) felhasználásával $(\lambda_0 = -\sum_{i=1}^k \lambda_i) \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$. \square

3.13. Definíció (Függetlenség). Azt mondjuk, hogy $A_0, A_1, \dots, A_k \in X$ független pontok az X affin térben, ha teljesítik a 3.12. állításban szereplő feltételek valamelyikét (és így mindegyiket).

Például egyetlen pont mindig független, két pont akkor és csak akkor független, ha különböző, három pont akkor és csak akkor független, ha nem kollineáris.

3.14. Definíció (Affin bázis). Az X véges dimenziós affin térben affin bázisnak nevezünk egy A_0, A_1, \dots, A_k pontrendszer, ha az $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k}$ vektorok bázist alkotnak a $V = \overline{X}$ vektortérben.

Ilyenkor $k = \dim V = d$, azaz egy affin bázis szükségképpen $d + 1$ pontból áll. Az affin bázisok alábbi jellemzése közvetlenül adódik a definíciókból.

3.15. Állítás. *Legyen X véges dimenziós affin tér, $d = \dim X$. Egy X -beli pontrendszer pontosan akkor affin bázis X -ben, ha független és $(d + 1)$ elemű, illetve akkor, ha affin generátorrendszer és $(d + 1)$ elemű.* \square

3.16. Állítás. *Legyen X véges dimenziós affin tér, ekkor bármely X -beli független pontrendszer kiegészíthető affinn bázissá X -ben.*

Bizonyítás: 3.12.(iii)-ra hivatkozva az állítás rögtön következik a lineárisan független vektorrendszerek bázissá való kibővíthetőségéről szóló lineáris algebrai alaptételből. \square

Megjegyzés. Végtelen dimenziós affin terekben léteznek olyan végtelen pontrendszerek, amelyek bármely (nemüres) véges részszerete független. Az ilyen pontrendszereket is kézenfekvő függetlennek nevezni. Affin bázisnak ezek után a maximális független pontrendszereket, illetve ezzel egyenértékű módon a minimális affin generátorrendszereket tekinthetjük. A geometria szempontjából elsősorban a véges dimenziós affin terek fontosak, ezért szorítkoztunk a függetlenség és az affin bázis fentebbi definíciójában a véges esetre. Transzfinit eszközöket felhasználva a 3.16. Állítás végtelen dimenziós analogonja is bebizonyítható volna.

3.17. Definíció (Affin bázishoz csatolt affin koordinátarendszer). Ha az A_0, A_1, \dots, A_d pontok affin bázist alkotnak X -ben, akkor tetszőleges $P \in X$ -re az $\overrightarrow{A_0P} = \sum_{i=1}^d \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}$ előállításban szereplő együtthatókat tekintjük egy $\mathbf{x}(P) \in \mathbf{F}^d$ vektor koordinátáinak. Ezzel egy $\mathbf{x} : X \rightarrow \mathbf{F}^d$ affin izomorfizmust definiáltunk, amelyet az A_0, A_1, \dots, A_d affin bázishoz csatolt affin koordinátarendszernek nevezünk.

Nyilván bármely \mathbf{x} affin koordinátarendszer ilyen módon keletkezik, mégpedig az $A_0 = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{0})$ és $A_i = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{e}_i)$ ($i = 1, \dots, d$) pontok alkotta affin bázisból. (Itt $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbf{F}^d$ az i -edik standard bázisvektor.)

3.18. Tétel. Rögzítsünk egy A_0, A_1, \dots, A_d affin bázist az X affin térben. Ekkor bármely $P \in X$ pont előállítható az A_0, A_1, \dots, A_d pontok affin kombinációjaként, továbbá az ehhez szükséges együtthatókat a P pont egyértelműen meghatározza.

Bizonyítás: Legyenek $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbf{F}$ az adott affin bázishoz csatolt affin koordinátarendszerben a P pont koordinátái, azaz $\overrightarrow{A_0P} = \sum_{i=1}^d \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}$. Ekkor a $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^d \lambda_i$ jelölést használva az $\overrightarrow{A_0P} = \sum_{i=0}^d \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}$ egyenlőség mutatja, hogy P az A_0, A_1, \dots, A_d pontok $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_d$ együtthatos affin kombinációja.

Ha P valamely $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_d \in \mathbf{F}$ együtthatokkal is előáll, mint az A_0, A_1, \dots, A_d pontok affin kombinációja, akkor egy tetszőleges $O \in X$ kezdőpontot rögzítve $\overrightarrow{OP} = \sum_{i=0}^d \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = \sum_{i=0}^d \mu_i \overrightarrow{OA_i}$ és $\sum_{i=1}^d \lambda_i = \sum_{i=1}^d \mu_i = 1$ fennáll. Ekkor $\sum_{i=0}^d (\lambda_i - \mu_i) \overrightarrow{OA_i} = \mathbf{0}$ és $\sum_{i=1}^d (\lambda_i - \mu_i) = 0$, így az affin függetlenség 3.12.(iv)-beli tulajdonságát felhasználva $\lambda_i = \mu_i$ ($i = 0, \dots, d$). \square

3.19. Állítás. Legyen A_0, A_1, \dots, A_d affin bázis az X affin térben. Rögzített $i = 0, 1, \dots, d$ mellett rendeljük hozzá mindegyik $P \in X$ ponthoz a 3.18. Tételbeli előállításban szereplő, A_i -hez tartozó λ_i együtthatot. Ekkor ez az $s_i : X \rightarrow \mathbf{F}$, $P \mapsto \lambda_i$ függvény affin forma X -en. Az így nyert s_0, s_1, \dots, s_d affin formák bázist alkotnak az X^\bullet vektortérben.

Bizonyítás: Vektorizáljuk X -et az A_0 pontban, azonosítsuk V -vel az X_{A_0} vektorteret, és legyen a V -beli $\overrightarrow{A_0A_i}$ ($i = 1, \dots, d$) bázishoz tartozó duális bázis $\varphi_i \in V^*$ ($i = 1, \dots, d$). Ekkor a 3.18. Tétel bizonyítása szerint $i = 1, \dots, d$ -re $s_i = \varphi_i$ és $s_0 = \mathbf{1} - (s_1 + \dots + s_d)$. Emiatt s_0, s_1, \dots, s_d generátorrendszer az $X^\bullet = V^* \oplus \mathbf{F}$ vektortérben, és mivel a dimenzió $d + 1$, bázis is. \square

3.20. Definíció (Duális affin formák). A 3.19. Állításban szereplő $s_0, s_1, \dots, s_d \in X^\bullet$ affin formákat az A_0, A_1, \dots, A_d affin bázishoz tartozó duális affin formáknak nevezzük.

Könnyen látható, hogy a duális affin formákat az $s_i(A_j) = \delta_{ij}$ ($0 \leq i, j \leq d$) egyenlőségek is egyértelműen meghatározzák; ez a következő állításnak egy speciális esete.

3.21. Állítás. Ha A_0, A_1, \dots, A_d affin bázis az X affin térben, továbbá A'_0, A'_1, \dots, A'_d tetszőlegesen adott pontok az X' affin térben, akkor egyértelműen létezik olyan $f : X \rightarrow X'$ affin leképezés, melyre $f(A_i) = A'_i$ ($i = 0, 1, \dots, d$).

Bizonyítás: Az A_0 , illetve A'_0 pontokban történő vektorizálással az 1.4. Állításra hivatkozva a megfelelő lineáris algebrai tételből rögtön adódik. \square

3.22. Következmény. Ha A_0, A_1, \dots, A_d és B_0, B_1, \dots, B_d affin bázisok az X affin térben, akkor egyértelműen létezik olyan $f \in \text{Aff}(X)$ affinitás, melyre $f(A_i) = B_i$ ($i = 0, 1, \dots, d$). \square

Megjegyzés. A 3.22. Következményben foglalt tényt a csoportelmélet nyelvén úgy szokás megfogalmazni, hogy az $\text{Aff}(X)$ csoport „egyszeresen tranzitívan hat” az X affin tér rendezett affin bázisainak halmazán. Csoportok hatásáról későbbi geometriai tanulmányaink során még több alkalommal esik szó.

4. Osztóviszony, súlypont, baricentrikus koordináták

4.1. Definíció (Osztóviszony). Legyen A és B két különböző rögzített pont az E affin egyenesen. Tetszőleges $P \in E$, $P \neq B$ ponthoz egyértelműen létezik olyan $\lambda \in \mathbf{F}$, hogy $\overrightarrow{AP} = \lambda \cdot \overrightarrow{PB}$. Ezt a λ elemet (ABP) -vel jelöljük és a P pont A -ra és B -re vonatkozó osztóviszonyának nevezzük.

Például $(ABA) = 0$. Ha $\mathbf{F} = \mathbf{R}$, és P az $[A, B]$ szakasz belső pontja, akkor (ABP) azt mondja meg, hogy a P pont milyen arányban osztja az $[A, B]$ szakaszt. Például a szakasz felezőpontjára az osztóviszony értéke $1 : 1 = 1$, az A -hoz közelebbi harmadolópontra $1 : 2 = 1/2$, a másik harmadolópontra $2 : 1 = 2$. Ha a P pont nem tartozik az $[A, B]$ szakaszhoz, akkor (ABP) negatív.

4.2. Állítás. $(ABP) = \beta/\alpha$, ahol a P pont az A és a B affin kombinációja α , illetve β együtthatókkal.

Bizonyítás: $\mathbf{0} = \alpha \cdot \overrightarrow{PA} + \beta \cdot \overrightarrow{PB}$, ahonnan $\overrightarrow{AP} = \beta/\alpha \cdot \overrightarrow{PB}$. \square

4.3. Következmény. Bármely affin leképezés osztóviszonytartó. Azaz, ha $f : X \rightarrow Y$ affin leképezés, $A \neq B \neq P$ kollineáris pontok X -ben, és $f(A) \neq f(B) \neq f(P)$, akkor $(f(A)f(B)f(P)) = (ABP)$.

Bizonyítás: Rögtön adódik a 3.2. és a 4.2. Állítás összevetésével. \square

4.4. Állítás.

- (1) $(ABP) \neq -1$;
- (2) Rögzített A és B mellett bármely $\lambda \in \mathbf{F}$, $\lambda \neq -1$ skálárhoz található olyan P , hogy $(ABP) = \lambda$;
- (3) $(ABP) = (ABQ)$ esetén szükségképpen $P = Q$;
- (4) $(ABP)(BAP) = 1$;
- (5) Ha A , B és C egy affin egyenes három különböző pontja, akkor $(ABC)(BCA)(CAB) = 1$;
- (6) Ha P , Q , R és S egy affin egyenes négy különböző pontja, akkor $(PQS)(QRS)(RPS) = -1$.

Bizonyítás: A 4.3. Következményre hivatkozva feltehető, hogy az affin egyenes az \mathbf{F} testtel azonos, ekkor az $a, b, p \in \mathbf{F}$ elemek osztóviszonya $(abp) = (p - a)/(b - p)$ alakban írható. Ezzel mind a hat állítás átfogalmazható egy-egy \mathbf{F} -beli elemekre vonatkozó formulává és így közvetlen számolással ellenőrizhető. \square

4.5. Definíció (Súlypont). Súlyozott pontrendszert kapunk az X affin térben, ha véges sok $A_0, A_1, \dots, A_k \in X$ ponthoz egy-egy $m_i \in \mathbf{F}$ ($i = 0, 1, \dots, k$) súlyt rendelünk. (Formális definícióval élve X -beli súlyozott pontrendszeren X egy véges részhalmazán értelmezett \mathbf{F} -be képező függvényt érthetünk.) Azt mondjuk, hogy az $S \in X$ pont ennek a súlyozott pontrendszernek súlypontja, ha $\sum_{i=0}^k m_i \overrightarrow{SA_i} = \mathbf{0}$.

4.6. Állítás. Ha a súlyok összege nem 0, akkor a súlyozott pontrendszernek egyértelműen létezik súlypontja, mégpedig az az S pont, amelybe a tér egy tetszőleges O pontjából az $\overrightarrow{OS} = (\sum_{i=0}^k m_i \overrightarrow{OA_i}) / \sum_{i=0}^k m_i$ vektor mutat.

Bizonyítás: Valóban, a 3.1. Definíciót követő észrevétel szerint a súlypont azonos az A_0, A_1, \dots, A_k pontoknak az $m_i / \sum_{j=0}^k m_j$ ($i = 0, 1, \dots, k$) együtthatókkal vett affin kombinációjával. \square

4.7. Példák. Ha $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ és a pontokat egyenlő súlyokkal látjuk el, akkor az így kapott súlyozott pontrendszer súlypontja a közönséges értelemben vett súlypont. Például két pont esetében a súlypont a szakasz felezőpontja, három nem kollineáris pont esetében a súlypont a háromszög (elemi geometriai értelemben vett) súlypontja.

4.8. Állítás (A súlyok csoportosíthatósági tétele). Ha egy nem 0 összegű súlyokkal súlyozott pontrendszer pontjait diszjunkt csoportokba osztjuk úgy, hogy az egyes csoportokban a súlyok összege nem 0, majd mindegyik csoport súlypontját ellátjuk a csoportban szereplő súlyok összegével mint súllyal, akkor az így nyert súlyozott pontrendszer súlypontja azonos az eredeti súlyozott pontrendszer súlypontjával.

Bizonyítás: Álljon a pontrendszer az m_{ij} súlyokkal ellátott A_{ij} pontokból az $\{A_{i1}, \dots, A_{ik_i}\}$ ($i = 1, \dots, l$) csoportokba osztva úgy, hogy $m_i = \sum_{j=1}^{k_i} m_{ij} \neq 0$ ($i = 1, \dots, l$), és legyenek S_1, \dots, S_l az egyes csoportokhoz tartozó súlypontok, azaz $\sum_{j=1}^{k_i} m_{ij} \overrightarrow{S_i A_{ij}} = \mathbf{0}$ ($i = 1, \dots, l$). Ekkor $\sum_{i=1}^l m_i$ egyenlő az összes súly összegével, tehát nem 0. Legyen S az m_1, \dots, m_l súlyokkal ellátott S_1, \dots, S_l pontrendszer súlypontja. Ekkor

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^l m_i \overrightarrow{S S_i} = \sum_{i=1}^l m_i \frac{\sum_{j=1}^{k_i} m_{ij} \overrightarrow{S A_{ij}}}{\sum_{j=1}^{k_i} m_{ij}} = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{k_i} m_{ij} \overrightarrow{S A_{ij}},$$

ami azt mutatja, hogy S az eredeti teljes pontrendszer súlypontja. \square

4.9. Példák, elemi geometriai következmények. Itt feltesszük, hogy $\mathbf{F} = \mathbf{R}$. Az alábbi példák olyan az elemi geometriából jól ismert állítások, amelyeket felfoghatunk a csoportosíthatósági tétel közvetlen alkalmazásaiként.

- A háromszög súlypontja illeszkedik a súlyvonalakra és 1 : 2 arányban osztja őket.
- A tetraéder súlypontja illeszkedik a súlyvonalakra (azaz a csúcsokat a szemközti lap súlypontjával összekötő szakaszokra) és 1 : 3 arányban osztja őket, továbbá felezi a szemközti élek felezőpontjait összekötő három szakaszt.
- Bármely síkbeli négyszög esetében a szemközti oldalak felezőpontjait összekötő két szakasznak és az átlók felezőpontját összekötő szakasznak közös a felezőpontja.

4.10. Definíció (Baricentrikus koordináták). Rögzítsünk egy A_0, A_1, \dots, A_d affin bázist az X affin térben. Ha egy $P \in X$ pontot az x_0, x_1, \dots, x_d súlyok segítségével lehet súlypontként előállítani az A_0, A_1, \dots, A_d pontrendszerből, akkor azt mondjuk, hogy ezek a súlyok a P pont baricentrikus koordinátái az adott affin bázisra nézve.

A 3.18. és 4.6. Állítások következtében bármely $P \in X$ -nek vannak baricentrikus koordinátái, és azokat a P pont arányosság erejéig egyértelműen határozza meg,

továbbá bármely nem 0 összegű x_0, x_1, \dots, x_d testelem- $(d+1)$ -es előáll, mint valamilyen X -beli pont baricentrikus koordinátái.

Rögzített A_0, A_1, \dots, A_d affin bázis mellett azt a tényt, hogy az x_0, x_1, \dots, x_d elemek a $P \in X$ pont baricentrikus koordinátái, a $P = [x_0 : x_1 : \dots : x_d]$ jelöléssel fejezzük ki. Nyilván $[x_0 : x_1 : \dots : x_d] = [x'_0 : x'_1 : \dots : x'_d]$ pontosan akkor teljesül, ha létezik olyan $\lambda \in \mathbf{F}$, hogy $x'_i = \lambda x_i$ ($i = 0, 1, \dots, d$). A baricentrikus koordináták használata tehát azonosítást teremt az X tér és az

$$\left\{ \mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_d) \in \mathbf{F}^{d+1} : \sum_{i=0}^d x_i \neq 0 \right\} / \sim$$

faktorhalmaz között, ahol a \sim ekvivalenciareláció az arányosságot jelenti, azaz $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ akkor és csak akkor áll fenn, ha $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}$ alkalmas $\lambda \in \mathbf{F}$ -fel.

4.11. Példák. Legyen A_0, A_1, \dots, A_d affin bázis az X affin térben.

- $A_0 = [1 : 0 : \dots : 0]$, $A_1 = [0 : 1 : \dots : 0]$, \dots , $A_d = [0 : 0 : \dots : 1]$. Ha $\mathbf{F} = \mathbf{R}$, akkor ezeknek a pontoknak a közöséges értelemben vett súlypontja $[1 : 1 : \dots : 1]$.
- $P = [x_0 : x_1 : \dots : x_d]$ akkor és csak akkor tartozik az $\langle A_{i_0}, A_{i_1}, \dots, A_{i_k} \rangle$ affin altérhez, ha minden $i \neq i_j$ ($j = 0, 1, \dots, k$) esetén $x_i = 0$.
- $i = 0, 1, \dots, d$ -re jelölje H_i azt az X -beli hipersíkot, amelyre $A_i \in H_i$ és amely párhuzamos az $\langle A_j : j \neq i \rangle$ hipersíkkal. Az s_i duális affin formákat alkalmazva $H_i = \mathcal{Z}(\mathbf{1} - s_i)$. Emiatt a $P = [x_0 : x_1 : \dots : x_d]$ pont akkor és csak akkor tartozik H_i -hez, ha $\sum_{j \neq i} x_j = 0$.

Megjegyzés. A két utolsó példában bizonyos affin altereket a baricentrikus koordinátákban felírt homogén lineáris egyenletrendszerrel tudtunk megadni. A 7. szakasz végén látni fogjuk, hogy ez minden affin altérre így van. Későbbi geometriai tanulmányainkban kiderül majd, hogy a baricentrikus koordináták a projektív geometriában használatos ún. „homogén koordináták” egy speciális változata. A homogén koordináták elnevezése onnan származik, hogy segítségükkel az alakzatokat homogén egyenletekkel lehet leírni.