KONVEX HALMAZOK AFFIN TÉRBEN
Moussong Gábor, 2009

A konvex halmazok elméletének egy jelentős része csak a tér affin struktúrájára támaszkodik és nem használja a tér metrikus viszonyait. Itt azokat a konvex halmazokkal kapcsolatos fogalmakat és összefüggéseket vesszük sorra, amelyek az affinitásokkal szemben invariánsak, és így már az affin geometriában is értelmezhetők, illetve bizonyíthatók. Az alábbiakban (X, V, Φ) véges dimenziós valós affin tér, amelyet a természetes topológiájával látunk el. Az X tér dimenzióját d jelöli.

1. Konvex halmazok, konvex kombinációk

1.1. Definíció (Szakasz). Adott $A, B \in X$ mellett A, B végpontú szakaszon (vagy: az A, B pontokat összekötő szakaszon) az $[A, B] = \Phi_A^{-1}\big(\{t \cdot \overrightarrow{AB} : 0 \le t \le 1\}\big)$ halmazt értjük.

Könnyen látható, hogy $A \neq B$ esetén $[A, B] = \Phi_A^{-1}\big(\{t \cdot \overrightarrow{AB} : t \ge 0\}\big) \cap \Phi_B^{-1}\big(\{t \cdot \overrightarrow{BA} : t \ge 0\}\big)$, azaz az $[A, B]$ szakasz az $\langle A, B\rangle$ egyenesen annak a két zárt félegyenesnek a metszeteként áll elő, amelyek végpontja A, illetve B, és amelyek tartalmazzák B-t, illetve A-t. Így nyilván $[B, A] = [A, B]$. Ha $A = B$, akkor $[A, B] = \{A\}$, amelyet elfajuló szakasznak tekintünk.

Tetszőleges $O \in X$ ponttal $[A, B] = \{P \in X \,:\, \overrightarrow{OP} = t\cdot\overrightarrow{OA} + (1-t)\cdot\overrightarrow{OB},\ 0 \le t \le 1\}$, azaz $[A, B] = \{tA + (1-t)B \,:\, 0 \le t \le 1\}$.

1.2. Definíció (Konvex halmaz). Egy $K \subseteq X$ halmaz konvex, ha bármely két pontjával együtt azok összekötő szakaszát is tartalmazza, azaz tetszőleges $A, B \in K$ esetén $[A, B] \subseteq K$.

1.3. Példák

- Bármely X-beli affin altér konvex, az üres halmaz konvex, bármely féltér és bármely szakasz konvex.
- A számegyenesen pontosan az intervallumok konvexek (közéjük értve az elfajuló vagy végtelenbe nyúló intervallumokat is).
- Szakasznak affin leképezésnél származó képe (esetleg elfajuló) szakasz, emiatt bármely konvex halmaznak affin leképezésnél származó képe, illetve őasképe konvex.
- Ha $K_1 \subseteq X_1$ és $K_2 \subseteq X_2$ konvex, akkor $K_1 \times K_2 \subseteq X_1 \times X_2$ is konvex.
- Ha $K \subseteq X$ konvex és $P \in X$, akkor a $C = \bigcup_{\lambda > 0} H_{P,\lambda}(K)$ halmaz is konvex, ahol $H_{P,\lambda}$ jelöli a P középpontú és λ arányú homotéciát. Legyen ugyanis $A = H_{P,\lambda}(A')$, $B = H_{P,\mu}(B')$, $A', B' \in K$ és $t \in [0, 1]$, ekkor közvetlen számolással adódik, hogy $tA + (1-t)B = H_{P,\nu}(uA' + (1-u)B')$, ahol $\nu = t\lambda + (1-t)\mu$ és $u = t\lambda/\nu$. Az is könnyen ellenőrizhető, hogy a $C \cup \{P\}$ halmaz is konvex.
  Egy valós vektortérben konvex kúpnak nevezünk egy részhalmazt, ha konvex és bármely elemével együtt annak összes pozitív skalárszorosát is tartalmazza. A fenti C és $C \cup \{P\}$ halmazok konvex kúpok az X_P vektortérben.
- Az $\mathbf{R}^d$-beli $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \big(\sum_{i=1}^d (x_i - y_i)^2\big)^{1/2}$ metrikával definiált $B(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d : \rho(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < r\}$ nyílt, illetve $\overline{B}(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d : \rho(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \le r\}$ zárt golyók,

továbbá ezek affinitással nyert képei, a nyílt, illetve zárt ellipszoidtestek konvex halmazok $\mathbf{R}^d$-ben.

- A $V \times V \to \mathbf{R}$ szimmetrikus bilineáris függvények vektorterében a pozitív definit (illetve a negatív definit) szimmetrikus bilineáris függvények konvex kúpot alkotnak.
- Egy négyzetes valós mátrixot duplán sztochasztikusnak nevezünk, ha minden eleme nemnegatív, továbbá minden sorösszege és minden oszlopösszege 1-gyel egyenlő. Jelölje B_n az $n \times n$ méretű duplán sztochasztikus mátrixok halmazát, ekkor $B_n \subset \mathbf{R}^{n\times n}$ konvex halmaz.
- Konvex halmazok tetszőleges X-beli rendszerének a metszete konvex.

További érdekes példák származtathatók a következő konstrukció használatával.

1.4. Definíció (Minkowski-kombináció). Legyenek $K, L \subseteq X$ tetszőleges részhalmazok és $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ rögzített együtthatók, melyekre $\alpha + \beta = 1$. A K és L halmazok α és β együtthatókkal vett Minkowski-kombinációján az

$$\alpha K + \beta L = \big\{\alpha P + \beta Q : P \in K,\ Q \in L\big\}$$

halmazt értjük. Ha $X = V$ vektortér, akkor a Minkowski-kombináció az $\alpha + \beta = 1$ feltétel nélkül is értelmezhető. Az $\alpha = \beta = 1$ esetben a $K + L$ Minkowski-összegről beszélünk.

1.5. Állítás. *Konvex halmazok tetszőleges Minkowski-kombinációja is konvex.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy K és L konvex halmazok X-ben. Legyen az $\alpha K + \beta L$ Minkowski-kombináció két tetszőleges pontja $A = \alpha P + \beta Q$ és $B = \alpha R + \beta S$, ahol $P, R \in K$ és $Q, S \in L$, továbbá legyen $C \in [A, B]$ tetszőleges, azaz $C = tA + (1-t)B$, $t \in [0, 1]$. Ekkor $C = t(\alpha P + \beta Q) + (1-t)(\alpha R + \beta S) = \alpha(tP + (1-t)R) + \beta(tQ + (1-t)S)$, itt $tP + (1-t)R \in K$ és $tQ + (1-t)S \in L$, így $C \in \alpha K + \beta L$. $\square$

1.6. Definíció (Konvex burok). Az 1.3-beli utolsó példa következtében bármely $S \subseteq X$ halmazhoz az őt tartalmazó X-beli konvex halmazok között létezik legszűkebb, mégpedig az S-et tartalmazó összes X-beli konvex halmaz metszete. Ezt a halmazt nevezzük az S halmaz konvex burkának, és $\mathrm{conv}(S)$-sel jelöljük.

Például bármely szakasz a végpontjai konvex burka. Egy halmaz pontosan akkor konvex, ha azonos a konvex burkával.

1.7. Definíció (Konvex kombináció). Egy affin kombinációt konvex kombinációnak nevezünk, ha a benne szereplő együtthatók nemnegatívak. Tehát a $P \in X$ pont az $A_1, \ldots, A_k$ pontok konvex kombinációja, ha $P = \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_k A_k$, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0$ és $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$.

Például bármely szakasz pontosan a két végpont konvex kombinációiból áll.

1.8. Tétel. *Bármely ponthalmaz konvex burka a belőle vett véges pontrendszerek konvex kombinációiból áll.*

Bizonyítás: Legyen $S \subseteq X$ tetszőleges, és jelölje $c(S)$ az S-beli véges pontrendszerek összes lehetséges konvex kombinációi halmazát. Megmutatjuk, hogy $c(S) = \mathrm{conv}(S)$.

$c(S) \subseteq \mathrm{conv}(S)$: Ha $P \in c(S)$, akkor P valamely $A_1, \ldots, A_k \in S$ pontok $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ együtthatós konvex kombinációja. A pontok száma, azaz k szerinti teljes indukcióval megmutatjuk, hogy $P \in \operatorname{conv}(S)$. A $k = 1$ eset triviális, a $k = 2$ esetben pedig a konvexitás definíciója szerint ez igaz. Legyen $k > 2$ és tegyük föl, hogy a k-nál kevesebb tagú konvex kombinációk $\operatorname{conv}(S)$-ben vannak. Ha a λ_i együtthatók valamelyike 0, akkor az indukciós feltevést a többi pontra alkalmazva készen vagyunk. Egyébként pedig legyen $\mu = \lambda_1 + \ldots + \lambda_{k-1}$ és $\mu_i = \lambda_i/\mu$ $(i = 1, \ldots k-1)$. Ekkor $B = \mu_1 A_1 + \ldots + \mu_{k-1} A_{k-1}$ konvex kombináció, ezért az indukciós feltevésből $B \in \operatorname{conv}(S)$. Végül P a B és az A_k pont konvex kombinációja a μ és λ_k együtthatókkal, így $P \in \operatorname{conv}(S)$.

$\operatorname{conv}(S) \subseteq c(S)$: Elég belátni, hogy $c(S)$ konvex, hiszen az egytagú konvex kombinációkkal $S \subseteq c(S)$, és így a konvex burok definíciójából $\operatorname{conv}(S) \subseteq c(S)$ következik. Legyen $A, B \in c(S)$ és álljon elő A az $A_1, \ldots, A_k \in S$ pontok $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ együtthatós konvex kombinációjaként, B pedig a $B_1, \ldots, B_l \in S$ pontok $\mu_1, \ldots, \mu_l$ együtthatós konvex kombinációjaként. Ha $P \in [A, B]$, akkor P az A és a B konvex kombinációja valamilyen α és β együtthatókkal. Ekkor a P pont előállítható az A_1, $\ldots$, A_k, $B_1, \ldots, B_l \in S$ pontok konvex kombinációjaként rendre az $\alpha\lambda_1, \ldots, \alpha\lambda_k$, $\beta\mu_1, \ldots, \beta\mu_l$ együtthatókkal, így $P \in c(S)$. $\square$

1.9. Következmény. *Egy $S \subseteq X$ halmaz akkor és csak akkor konvex, ha zárt a konvex kombinációk képzésére, azaz ha bármely véges sok S-beli pont bármely konvex kombinációja is eleme S-nek.*

Bizonyítás: Ha S konvex, akkor $S = \operatorname{conv}(S)$, így az 1.8. Tétel miatt az S-beli pontok konvex kombinációi S-ben vannak. Megfordítva, ha S zárt a konvex kombinációk képzésére, akkor ezt az S-beli pontpárokra alkalmazva adódik, hogy minden $A, B \in S$-re $[A, B] \subseteq S$. $\square$

2. Konvex halmazokra vonatkozó alaptételek

2.1. Tétel (Carathéodory tétele). *A d-dimenziós X affin térben egy $S \subseteq X$ halmaz konvex burkának bármely pontja előáll legfeljebb $d+1$ darab S-beli pont konvex kombinációjaként.*

Bizonyítás: Az 1.8. Tételt alkalmazva $P \in \operatorname{conv}(S)$ előállítható valamilyen $A_1, \ldots$, $A_k \in S$ pontoknak valamilyen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ együtthatós konvex kombinációjaként. Ekkor $\lambda_1 \overrightarrow{PA_1} + \ldots + \lambda_k \overrightarrow{PA_k} = \mathbf{0}$. Tegyük fel, hogy k a legkisebb olyan szám, amellyel ilyen előállítás lehetséges, ekkor szükségképpen az összes λ_i pozitív. Azt állítjuk, hogy $k \le d+1$. Indirekt módon tegyük fel, hogy $k > d+1$, ekkor az A_1, $\ldots$, A_k pontrendszer nem független, ezért léteznek olyan, nem mind 0-val egyenlő $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ valós számok, hogy $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 0$ és $\alpha_1 \overrightarrow{PA_1} + \ldots + \alpha_k \overrightarrow{PA_k} = \mathbf{0}$. Ekkor elég kicsi $\varepsilon > 0$ mellett a $\lambda_1 + \varepsilon\alpha_1, \ldots, \lambda_k + \varepsilon\alpha_k$ számok nemnegatívak; ehhez nyilván $\varepsilon \le \min\{-\lambda_i/\alpha_i : \alpha_i < 0,\ 1 \le i \le k\}$ elegendő. Válasszuk ε-t ezzel a korláttal egyenlőnek. Ekkor a P pont az $A_1, \ldots, A_k$ pontok konvex kombinációja a $\lambda_1 + \varepsilon\alpha_1, \ldots, \lambda_k + \varepsilon\alpha_k$ együtthatókkal, amelyek között a 0 is előfordul. P tehát előáll k-nál kevesebb S-beli pont konvex kombinációjaként, ami ellentmond k minimalitásának. $\square$

2.2. Definíció (Szimplex). Az X affin térben k-dimenziós szimplexnek nevezzük $k+1$ darab független pont konvex burkát. Jelölés: ha $A_0, A_1, \ldots, A_k \in X$ függetlenek, akkor $[A_0, A_1, \ldots, A_k] = \operatorname{conv}\big(\{A_0, A_1, \ldots, A_k\}\big)$. Az $A_0, A_1, \ldots, A_k$ pontokat a szimplex csúcsainak nevezzük.

Könnyen meggondolható (és az **5.** szakaszban részletesen is tárgyaljuk majd), hogy a szimplex a csúcsai halmazát egyértelműen meghatározza.

A 0-dimenziós szimplexek egypontúak, az 1-dimenziós szimplexek pontosan a nem elfajuló szakaszok, a 2-dimenziósakat háromszögnek, a 3-dimenziósakat tetraédernek nevezzük.

Miután egy szimplex a csúcsai alkotta pontrendszer nemnegatív együtthatós affin kombinációból áll, bármely d-dimenziós szimplexet elő tudunk állítani $d+1$ darab zárt féltér közös részeként. Legyenek ugyanis A_0, A_1, ..., A_d a szimplex csúcsai, ekkor ezek a pontok affin bázist alkotnak X-ben. Legyenek s_0, s_1, ..., $s_d \in X^*$ az ehhez az affin bázishoz tartozó duális affin formák. (Emlékeztetőül: $s_i(P)$ a P-t előállító affin kombinációban szereplő i-edik együttható.) Ekkor $[A_0, A_1, \ldots, A_d] = \bigcap_{i=0}^{d}\{P \in X : s_i(P) \geq 0\}$ a szimplex előállítása $d+1$ zárt féltér metszeteként.

2.3. Állítás. *Bármely $S \subseteq X$ halmaz konvex burka előáll azoknak a szimplexeknek az egyesítéseként, amelyeknek a csúcsai S-nek elemei.*

Bizonyítás: Bármelyik S-beli csúcsú szimplex nyilván benne fekszik $\mathrm{conv}(S)$-ben, így elég a fordított tartalmazást belátni. Legyen $P \in \mathrm{conv}(S)$ tetszőleges. Az 1.8. Tétel szerint P benne van véges sok alkalmas S-beli pont konvex burkában; válasszunk egy olyan A_0, A_1, ..., A_k minimális S-beli pontrendszert, amelynek P a konvex burkában van. Elég megmutatni, hogy ez a pontrendszer független. Ha nem így volna, akkor benne feküdne egy k-nál kisebb dimenziójú Y affin altérben, amelyre a 2.1. Tételt alkalmazva az adódna, hogy P előáll az A_0, A_1, ..., A_k pontok közül legfeljebb k darabnak a konvex kombinációjaként is. Ez ellentmond az A_0, A_1, ..., A_k pontrendszer minimalitásának. $\square$

2.4. Lemma (Radon tétele). *Ha valamely $S \subseteq X$ pontrendszer nem független, akkor S-nek léteznek olyan S_1 és S_2 diszjunkt részhalmazai, amelyekre* $\mathrm{conv}(S_1) \cap \mathrm{conv}(S_2) \neq \emptyset$.

Bizonyítás: Feltehető, hogy $S = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ véges. Léteznek olyan λ_1, λ_2, ..., λ_k nem csupa zérus valós számok, amelyekre $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k = 0$ és valamilyen (tetszőleges) $O \in X$ kezdőponttal $\lambda_1\overrightarrow{OA_1} + \lambda_2\overrightarrow{OA_2} + \ldots + \lambda_k\overrightarrow{OA_k} = \mathbf{0}$. Legyen $I = \{i : \lambda_i > 0\}$ és $J = \{j : \lambda_j < 0\}$, továbbá $\lambda_I = \sum_{i\in I}\lambda_i$ és $\lambda_J = \sum_{j\in J}\lambda_j$. Ekkor az $\overrightarrow{OP} = \sum_{i\in I}(\lambda_i/\lambda_I)\cdot\overrightarrow{OA_i}$ egyenlőséggel definiált P pontra $\overrightarrow{OP} = \sum_{j\in J}(\lambda_j/\lambda_J)\cdot\overrightarrow{OA_j}$ is teljesül. Mindkét formulában konvex kombinációk állnak, emiatt $P \in \mathrm{conv}(S_1) \cap \mathrm{conv}(S_2)$, ahol $S_1 = \{A_i : i \in I\}$ és $S_2 = \{A_j : j \in J\}$. $\square$

2.5. Tétel (Helly tétele, véges változat). *Legyen adott a d-dimenziós valós affin térben véges sok konvex halmaz. Ha közülük bármelyik legfeljebb $(d+1)$-nek van közös pontja, akkor az összesnek van közös pontja.*

Bizonyítás: Legyenek K_1, K_2, ..., K_n az adott konvex halmazok. Teljes indukciót alkalmazunk n szerint. Ha $n \leq d+1$, akkor nincs mit bizonyítani; legyen $n = d+2$. Bármelyik $1 \leq m \leq d+2$ indexhez a feltevés szerint található olyan A_m pont, amelyre $A_m \in K_i$ teljesül minden $i \neq m$, $1 \leq i \leq d+2$ esetén. Az A_1, A_2, ..., A_{d+2} pontok rendszere összefüggő, ezért a 2.4. Lemmát alkalmazva vannak olyan diszjunkt I és J indexhalmazok, hogy a $\mathrm{conv}(\{A_i : i \in I\})$ és a $\mathrm{conv}(\{A_j : j \in J\})$ halmazoknak létezik P közös pontja. Ekkor az $\{A_i : i \in I\} \subseteq \bigcap_{i\notin I} K_i$ és az $\{A_j : j \in J\} \subseteq \bigcap_{j\notin J} K_j$ tartalmazások miatt $P \in \left(\bigcap_{i\notin I} K_i\right) \cap \left(\bigcap_{j\notin J} K_j\right) = \bigcap_{m=1}^{d+2} K_m$.

Tegyük fel most, hogy $n > d+2$ és az $n-1$ halmazból álló rendszerekre igaz az állítás. Legyen $m = 1, \ldots, n-1$-re $L_m = K_m \cap K_n$. Ekkor az L_m halmazok is konvexek és közülük bármely $(d+1)$-nek van közös pontja, hiszen ennek az ellenőrzéséhez a K_m halmazok közül $(d+2)$-nek kell közös ponttal bírnia, ezt pedig már beláttuk. Nyilván $\bigcap_{m=1}^{n} K_m = \bigcap_{m=1}^{n-1} L_m$, ezért az L_1, L_2, $\dots$, L_{n-1} halmazok rendszerére az indukciós feltevést alkalmazva adódik az állítás. $\square$

A Helly-tételnek olyan változata is használatos, amelyben a konvex halmazok száma nem feltétlenül véges. Végtelen sok halmaz közös pontjának létezéséhez nem kell erősebb geometriai feltevést tennünk, ez pusztán topológiai okok következménye lesz. Az alábbi lemma az $\mathbf{R}^d$-beli kompakt (azaz korlátos és zárt) halmazok egyik gyakran használt topológiai tulajdonsága, bizonyításától itt eltekintünk.

2.6. Lemma. *Legyen $K \subseteq X$ kompakt halmaz. Ha X-beli nyílt halmazok egy rendszere lefedi K-t, akkor ezek közül a halmazok közül véges sok is lefedi K-t.* $\square$

2.7. Tétel (Helly tétele, végtelen változat). *Legyen adott a d-dimenziós valós affin térben tetszőlegesen sok konvex zárt halmaz, amelyek között legalább az egyik korlátos. Ha a halmazok közül bármelyik legfeljebb $(d+1)$-nek van közös pontja, akkor az összesnek van közös pontja.*

Bizonyítás: Legyen K a halmazrendszer kompakt tagja. Indirekt módon tegyük fel, hogy a halmazoknak nincs közös pontja. Ekkor K-nak nyílt halmazokkal való lefedését alkotja a többi halmaz komplementere. Hivatkozva a 2.6. Lemmára és K kompaktságára a halmazrendszer véges sok tagjának a komplementere is lefedi K-t, azaz ennek a véges sok tagnak K-val együtt nincs közös pontja. Ez pedig ellentmond a 2.5. Tételnek. $\square$

A Helly-tétel alkalmazásaként az alábbi állításban megmutatjuk, hogy egy kompakt konvex halmaz nem térhet el tetszőlegesen nagy mértékben attól, hogy középpontosan szimmetrikus legyen.

2.8. Állítás. *Legyen K kompakt konvex halmaz a d-dimenziós valós affin térben, $d \geq 1$. Ekkor létezik olyan $P \in K$ pont, hogy bármely P-n átmenő $E \subseteq X$ egyenesre $K \cap E = [A, B]$, $A \neq B \neq P$ esetén az (ABP) osztóviszonyra $1/d \leq (ABP) \leq d$ teljesül.*

Bizonyítás: Minden $Q \in K$ pontra készítsük el a $K_Q = H_{Q,d/(d+1)}(K)$ konvex halmazt. Állítjuk, hogy ezek közül a halmazok közül bármelyik $(d+1)$-nek van közös pontja. Legyen ugyanis Q_1, Q_2, $\dots$, $Q_{d+1} \in K$ tetszőleges. Jelöljük S-sel ezek súlypontját és S_i-vel az i-edik elhagyása után a többi pont súlypontját:

$$S = \frac{1}{d+1}Q_1 + \ldots + \frac{1}{d+1}Q_{d+1}, \quad S_i = \frac{1}{d}Q_1 + \ldots + \frac{1}{d}Q_{i-1} + \frac{1}{d}Q_{i+1} + \ldots + \frac{1}{d}Q_{d+1};$$

ekkor $S_i \in K$ és a súlyok csoportosításával $S = \frac{1}{d+1}Q_i + \frac{d}{d+1}S_i = H_{Q_i,d/(d+1)}(S_i) \in K_{Q_i}$ teljesül minden $i = 1, \dots, (d+1)$-re. A 2.6. Következményt alkalmazva válasszunk egy $P \in \bigcap\{K_Q : Q \in K\}$ pontot. Ha $[A, B]$ a K halmaz P-n átmenő húrja és $A \neq B \neq P$, akkor $P \in K_A$ miatt $P \in H_{A,d/(d+1)}([A, B])$, ahonnan $(ABP) \leq d$. A másik egyenlőtlenség A és B szerepcseréjével adódik. $\square$

Megjegyzés. A d-dimenziós szimplex példája mutatja, hogy d a lehető legkisebb szám, amellyel a 2.8-beli egyenlőtlenségek fennállnak, továbbá szimplex esetén a csúcsok súlypontja az egyetlen alkalmas P pont.

3. Konvex halmazok topológiai tulajdonságai

Az alábbiakban (és persze már 2.6–2.8-ban is) a nyílt, zárt, kompakt, stb. jelzők az X affin tér természetes topológiájára vonatkoznak. Az $\mathrm{int}S$, $\overline{S}$, illetve ∂S jelöléseket is egy $S \subseteq X$ ponthalmaznak az X tér természetes topológiájára vonatkozó belsejére, lezárására és határára használjuk.

3.1. Állítás. *Konvex halmaz lezárása konvex.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $K \subseteq X$ konvex, legyen $A, B \in \overline{K}$ és $P \in [A, B]$. Ekkor valamilyen $t \in [0, 1]$-re P az A és B konvex kombinációja t és $1-t$ együtthatókkal. Léteznek olyan K-beli A_n és B_n sorozatok, hogy $A_n \to A$ és $B_n \to B$. Ekkor az A_n és a B_n pont t és $1-t$ együtthatókkal vett P_n konvex kombinációja K-hoz tartozik. Affin koordinátákat használva és a vektorműveletek folytonosságára hivatkozva rögtön látható, hogy $P_n \to P$, ahonnan $P \in \overline{K}$. $\square$

3.2. Állítás. *Legyen K konvex halmaz. Ekkor:*
(1) *ha $A \in \overline{K}$ és $B \in \mathrm{int}K$, akkor $[A, B] - \{A\} \subseteq \mathrm{int}K$;*
(2) *$\mathrm{int}K$ konvex;*
(3) *$\mathrm{int}K$ pontosan akkor üres, ha K benne fekszik egy hipersíkban;*
(4) *$\mathrm{int}K = \mathrm{int}\overline{K}$;*
(5) *ha $\mathrm{int}K \neq \emptyset$, akkor $\overline{K} = \overline{\mathrm{int}K}$.*

Bizonyítás: (1): Legyen $P \in [A, B]$, $P \neq A, B$ tetszőleges pont és definiáljuk a λ valós számot a $\overrightarrow{AP} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$ egyenlőséggel, ekkor $0 < \lambda < 1$. A P középpontú, $\lambda/(\lambda-1)$ arányú $H_{P,\lambda/(\lambda-1)}$ homotécia a B pontot A-ba, így az $\mathrm{int}K$ nyílt halmazt A egy nyílt környezetébe viszi. Emiatt választhatunk olyan $C \in K$ pontot, amely A-nak ebbe a környezetébe esik, azaz amelynél a $Q = H_{P,(\lambda-1)/\lambda}(C)$ pontra $Q \in \mathrm{int}K$. Tekintsük most a $H_{C,\lambda}$ homotéciát. Egyrészt $H_{C,\lambda}(Q) = P$, másrészt $C \in K$ miatt $H_{C,\lambda}(K) \subseteq K$ és annál inkább $H_{C,\lambda}(\mathrm{int}K) \subseteq K$ teljesül. Tehát $P \in H_{C,\lambda}(\mathrm{int}K) \subseteq K$, ahol $H_{C,\lambda}(\mathrm{int}K)$ nyílt halmaz, és így $P \in \mathrm{int}K$.

(2): Rögtön következik (1)-ből.

(3): Ha K nem része semmilyen hipersíknak, akkor $\dim\langle K\rangle = d$, ezért K-ban van $d+1$ független pont: A_0, A_1, $\dots$, A_d. Ekkor K lefedi az $[A_0, A_1, \dots, A_d]$ d-dimenziós szimplexet. A baricentrikus koordinátákkal adott $[1 : 1 : \dots : 1]$ pont (azaz az A_0, $A_1, \dots, A_d$ pontrendszer súlypontja) a szimplexet metszetként előállító félterek mindegyikének belső pontja, így a szimplexnek is belső pontja, annál inkább belső pontja K-nak.
Megfordítva, ha H hipersík és $K \subseteq H$, akkor $\mathrm{int}H = \emptyset$ miatt $\mathrm{int}K = \emptyset$.

(4): $K \subseteq \overline{K}$ miatt nyilván $\mathrm{int}K \subseteq \mathrm{int}\overline{K}$. Megfordítva, legyen $P \in \mathrm{int}\overline{K}$. Ekkor $\mathrm{int}K$ nem lehet üres, mert akkor (3) alkalmazásával K és így $\overline{K}$ is benne feküdne egy hipersíkban, és akkor $\mathrm{int}\overline{K}$ is üres lenne. Válasszunk egy $B \in \mathrm{int}K$ pontot. Az $\mathrm{int}\overline{K}$ halmaz nyílt volta miatt választhatunk olyan A pontot a $\langle P, B\rangle$ egyenesen, amely $\mathrm{int}\overline{K}$-ba esik és amelyre $P \in [A, B]$, $A \neq P$. Ekkor az (1) állítás alkalmazásával $P \in \mathrm{int}K$.

(5): A $\overline{K} \supseteq \overline{\mathrm{int}K}$ tartalmazás $K \supseteq \mathrm{int}K$ miatt nyilvánvaló. A fordított irányú tartalmazás igazolásához tekintsünk egy tetszőleges $A \in \overline{K}$ pontot. Válasszunk egy A-tól különböző $B \in \mathrm{int}K$ pontot is, ekkor az A pont benne van az $[A, B] - \{A\}$ halmaz lezárásában. Ekkor az (1) állítás felhasználásával az A pont benne van az ennél bővebb $\mathrm{int}K$ halmaz lezárásában is. $\square$

3.3. Állítás.
(1) *Nyílt halmaz konvex burka nyílt.*
(2) *Kompakt halmaz konvex burka kompakt.*

Bizonyítás: (1): Legyen $S \subset X$ nyílt és $P \in \operatorname{conv}(S)$. Ekkor a 2.3. Állítás szerint vannak olyan A_0, A_1, …, $A_k \in S$ független pontok, hogy $P \in [A_0, A_1, \dots, A_k]$, azaz P az A_0, A_1, …, A_k pontok konvex kombinációja valamilyen λ_0, λ_1, …, λ_k együtthatókkal. Feltehető, hogy például $0 < \lambda_0 < 1$. Legyen $i = 1, \dots, k$-ra $\mu_i = \lambda_i/(1-\lambda_0)$, ekkor $Q = \mu_1 A_1 + \ldots + \mu_k A_k$ is konvex kombináció, így $Q \in \operatorname{conv}(S)$. A P pont A_0-nak és Q-nak λ_0 és $1-\lambda_0$ együtthatókkal vett konvex kombinációjaként áll elő, ahonnan $\overrightarrow{QP} = \lambda_0 \cdot \overrightarrow{QA_0}$. Emiatt a Q középpontú, λ_0 arányú homotécia az A_0 pontot P-be képezi, és $Q \in \operatorname{conv}(S)$ miatt az S nyílt halmazt $\operatorname{conv}(S)$ egy részhalmazába. Ez a részhalmaz a P pontnak olyan környezete, amely $\operatorname{conv}(S)$-ben fekszik.

(2): Tekintsük az $Y = \mathbf{R}^{d+1} \times X^{d+1}$ affin téren azt a $\Delta : Y \to X$ leképezést, amelynél $\Delta(\lambda_0, \dots, \lambda_d, A_0, \dots, A_d) = \lambda_0 A_0 + \ldots + \lambda_d A_d$. Az X térben affin koordináták felhasználásával rögtön látható, hogy Δ affin leképezés, és így folytonos.
Ha $S \subset X$ nemüres kompakt halmaz, akkor a

$$T = \Big\{ (\lambda_0, \dots, \lambda_d, A_0, \dots, A_d) \in Y : \sum_{i=0}^{d} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0,\ A_i \in S\ (i = 0, \dots, d) \Big\}$$

halmaz is kompakt, hiszen korlátos és zárt az Y térben. A 2.1. Tétel miatt $\operatorname{conv}(S) = \Delta(T)$, így a Δ leképezés folytonossága miatt $\operatorname{conv}(S)$ kompakt. □

Megjegyzés. Zárt halmaz konvex burka nem feltétlenül zárt, amint azt a síkon egy egyenes és egy rá nem illeszkedő pont egyesítéseként előálló halmaz példája mutatja.

3.4. Definíció (Konvex halmaz dimenziója). A $K \subseteq X$ nemüres konvex halmaz dimenzióján a K affin burkának dimenzióját értjük, azaz $\dim K = \dim\langle K \rangle$.

A 3.2.(3) Állításból következik, hogy $\dim K = \dim X$ pontosan akkor teljesül, ha K-nak van belső pontja.

3.5. Példák

- Ha $A_0, \dots, A_k$ független pontok, akkor $\dim[A_0, \dots, A_k] = \dim\langle A_0, \dots, A_k\rangle = k$, tehát egy k-dimenziós szimplex dimenziója a 3.4. Definíció értelmében is k.
- Egy n-dimenziós vektortéren a szimmetrikus bilineáris függvények $\binom{n+1}{2}$-dimenziós vektorteret alkotnak, amelyben a pozitív definit függvények alkotta konvex kúp nyílt, így szintén $\binom{n+1}{2}$-dimenziós.
- A duplán sztochasztikus $n \times n$-es mátrixok B_n halmazát $2n-1$ független egyenlet (és n^2 további egyenlőtlenség) írja le az $\mathbf{R}^{n \times n}$ térben, ezért $\dim B_n = (n-1)^2$.

3.6. Definíció (Konvex halmaz relatív belseje és relatív határa). Legyen $K \subseteq X$ nemüres konvex halmaz. K relatív belsejének (relatív határának) nevezzük és $\operatorname{relint} K$-val ($\operatorname{rel}\partial K$-val) jelöljük K belső pontjainak (határpontjainak) halmazát a $\langle K \rangle$ affin térre vonatkozóan.

A 3.2.(3) Állításból következik, hogy bármely nemüres konvex halmaz relatív belseje sem üres. Sőt, 3.2.(5) miatt $\overline{K} = \overline{\operatorname{relint} K}$ érvényes bármely K konvex halmazra.

3.7. Állítás. *Ha $K \subset X$ kompakt konvex halmaz és $\dim K \geq 1$, akkor $K = \mathrm{conv}(\mathrm{rel}\partial K)$.*

Bizonyítás: Legyen $P \in K$ tetszőleges és válasszunk egy P-n áthaladó E egyenest az $\langle K \rangle$ affin altérben. Ekkor $E \cap K$ egy (esetleg elfajuló) $[A, B]$ szakasz E-ben, ahol $A, B \in \mathrm{rel}\partial K$. Így $P \in \mathrm{conv}(\mathrm{rel}\partial K)$. $\square$

3.8. Állítás. *Ha $K, L \subset X$ nemüres diszjunkt konvex zárt halmazok és legalább az egyikük kompakt, akkor léteznek diszjunkt konvex nyílt környezeteik, azaz olyan $M, N \subset X$ konvex nyílt halmazok, amelyekre $K \subset M$, $L \subset N$ és $M \cap N = \emptyset$.*

Bizonyítás: Affin koordinátarendszer bevezetésével feltehető, hogy $X = \mathbf{R}^d$. Legyen például K kompakt. A $\rho(\mathbf{x}, L) = \inf\{\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{y} \in L\}$ $(\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d)$ függvény folytonos és L zártsága miatt L-en kívül pozitív, ezért a K kompakt halmazon pozitív minimumot vesz fel; legyen δ ez a minimumérték. Ekkor az $M = K + B(\mathbf{0}, \delta/2)$ és az $N = L + B(\mathbf{0}, \delta/2)$ Minkowski-összegek diszjunktak. M és N konvexek az 1.5. Állítás miatt, továbbá nyílt halmazok, hiszen a $B(\mathbf{0}, \delta/2)$ nyílt halmaz eltoltjainak uniói. $\square$

Megjegyzés. A 3.8. Állításban a kompaktsági feltevés nem engedhető el. Tekintsük például ugyanis az $\mathbf{R}^2$ síkban a $K = \{(x, y) : x > 0, y \geq 1/x\}$ és az $L = \{(x, y) : y \leq 0\}$ halmazt, ezeknek nincsenek diszjunkt konvex környezeteik.

3.9. Tétel.

(1) *Ha $M \subseteq X$ nemüres konvex nyílt halmaz, akkor M homeomorf X-szel (azaz az $\mathbf{R}^d$ térrel).*

(2) *Ha $K \subseteq X$ kompakt konvex halmaz és $\mathrm{int}K \neq \emptyset$, akkor K homeomorf a $\overline{B}^d = \overline{B}(\mathbf{0}, 1) \subseteq \mathbf{R}^d$ zárt egységgömbbel, ∂K pedig az S^{d-1} egységgömbfelülettel.*

Bizonyítás: (1): Alkalmas affin koordinátarendszer választásával feltehető, hogy $X = \mathbf{R}^d$ és $\mathbf{0} \in M$. Definiáljuk a $\lambda : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ függvényt a

$$\lambda(\mathbf{x}) = \inf\left\{\frac{1}{\lambda} : \lambda > 0,\ \lambda \cdot \mathbf{x} \in M\right\} \qquad (\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d)$$

formulával. Nyilván λ pozitív-homogén, azaz bármely $c > 0$-ra és $\mathbf{x}$-re $\lambda(c \cdot \mathbf{x}) = c \cdot \lambda(\mathbf{x})$. Állítjuk, hogy a λ függvény folytonos.
Rögtön következik a definícióból, hogy $\mathbf{x} \in M$-re $\lambda(\mathbf{x}) < 1$, $\mathbf{x} \in \partial M$-re $\lambda(\mathbf{x}) = 1$ és $\mathbf{x} \notin \overline{M}$-ra $\lambda(\mathbf{x}) > 1$ teljesül. Ezért $\lambda(\mathbf{x}) \neq 0$ esetén $\lambda(\mathbf{x})$ azzal az aránnyal egyenlő, amilyen arányú origó középpontú homotéciát M-re alkalmazva az $\mathbf{x}$ pont az M képének határpontja. (Továbbá $\lambda(\mathbf{x}) = 0$ pontosan azokra az $\mathbf{x}$-ekre áll, amelyekhez nem található ilyen homotécia.) Emiatt bármely $a > 0$ valós számra $\lambda^{-1}(0, a) = H_{\mathbf{0},a}(M)$ és $\lambda^{-1}(a, +\infty) = H_{\mathbf{0},a}(\mathbf{R}^d - \overline{M})$ nyílt halmazok, így λ folytonos.
Definiáljuk az $f : M \to \mathbf{R}^d$ és a $g : \mathbf{R}^d \to M$ leképezést az

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{1 - \lambda(\mathbf{x})}, \qquad g(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y}}{1 + \lambda(\mathbf{y})}$$

formulákkal. A λ függvény folytonossága miatt f és g folytonos, továbbá $\lambda(g(\mathbf{y})) = \lambda(\mathbf{y})/(1+\lambda(\mathbf{y})) < 1$ miatt g valóban M-be képez. A λ függvény pozitív-homogenitásának felhasználásával közvetlen számolás mutatja, hogy f és g egymás inverzei.

(2): Legyen $M = \mathrm{int}K$, a fentiekhez hasonlóan tegyük föl, hogy$X = \mathbf{R}^d$, $\mathbf{0} \in M$, és definiáljuk a $\lambda : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ függvényt. Most a ∂K halmaz kompaktsága és $\mathbf{0} \notin \partial K$

miatt alkalmas $c, C > 0$ konstansokkal $c < \frac{\lambda(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} < C$ fennáll minden $\mathbf{x} \in \partial K$-ra, így λ pozitív-homogenitása miatt minden $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$-ra is. Ezért az $F, G : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$,

$$F(\mathbf{x}) = \begin{cases} \dfrac{\lambda(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} \cdot \mathbf{x}\,, & \text{ha } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ \\ \mathbf{0}\,, & \text{ha } \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases} \qquad \text{és} \qquad G(\mathbf{y}) = \begin{cases} \dfrac{\|\mathbf{y}\|}{\lambda(\mathbf{y})} \cdot \mathbf{y}\,, & \text{ha } \mathbf{y} \neq \mathbf{0} \\ \\ \mathbf{0}\,, & \text{ha } \mathbf{y} = \mathbf{0} \end{cases}$$

leképezések folytonosak (a $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^d$ pontban is). Nyilván F és G egymás inverzei, továbbá $F(K) = \overline{B}^d$ és $F(\partial K) = S^{d-1}$. $\square$

3.10. Következmény. *Bármely k-dimenziós konvex halmaz relatív belseje homeomorf $\mathbf{R}^k$-val. Bármely k-dimenziós korlátos konvex halmaz lezárása homeomorf $\overline{B}^k$-val, határa homeomorf S^{k-1}-gyel.*

Bizonyítás: Ha L konvex és $\dim L = k$, akkor relint$L$ nemüres és nyílt a k-dimenziós $\langle L \rangle$ affin altérben. Így $M = \text{relint}L$-re és $X = \langle L \rangle$-re alkalmazható a 3.9.(1) Tétel. Ha L még korlátos is, akkor a 3.9.(2) Tételt alkalmazzuk $K = \overline{L}$-ra. $\square$

4. Elválasztás, támaszhipersíkok

4.1. Definíció (Elválasztható halmazok). Legyen $A, B \subseteq X$. Azt mondjuk, hogy a $H \subset X$ hipersík elválasztja A-t és B-t, ha A és B a H szerinti két különböző zárt félsíkba esik. Két X-beli ponthalmaz elválasztható, ha található hozzájuk olyan hipersík, amely elválasztja őket.
Azt mondjuk, hogy a H hipersík szigorúan elválasztja A-t és B-t, ha A és B a H szerinti két különböző nyílt félsíkba esik. Két X-beli ponthalmaz szigorúan elválasztható, ha található hozzájuk olyan hipersík, amely szigorúan elválasztja őket.

Ha A és B konvex halmazok X-ben, akkor bármely relint$A$-t és relint$B$-t elválasztó hipersík a 3.6. Definíciót követő észrevétel alapján egyúttal $\overline{A}$-t és $\overline{B}$-t, és így A-t és B-t is elválasztja.

A szigorúan elválasztható halmazok szükségképpen diszjunktak, míg az elválasztható halmazok nem feltétlenül azok. Szélsőséges példaként bármely hipersík elválasztja saját magát saját magától.

4.2. Lemma (Banach–Hahn-tétel). *Legyen $M \subset X$ nyílt konvex halmaz és $Y \subset X$ affin altér, melyekre $M \cap Y = \emptyset$. Ekkor létezik olyan H hipersík X-ben, hogy $Y \subseteq H$ és $M \cap H = \emptyset$.*

Bizonyítás: Feltehetjük, hogy $M \neq \emptyset$. Először belátjuk a lemmát a sík esetére, azaz abban a speciális esetben, amikor $\dim X = 2$ és $Y = \{P\}$ egypontú. Tekintsük az $N = \bigcup_{\lambda > 0} H_{P,\lambda}(M)$ nyílt halmazt. Az 1.3-beli ötödik példa szerint N konvex, és nyilván $P \in \partial N$. Az N halmaznak van további $Q \neq P$ határpontja, hiszen $\{P\}$ semmilyen síkbeli konvex nyílt halmaz határával nem lehet azonos. Állítjuk, hogy az $E = \langle P, Q \rangle$ egyenes ekkor diszjunkt N-től, és így M-től is. Ellenkező esetben ugyanis válasszunk egy $R \in E \cap N$ pontot. Ha R az E egyenesen a Q-t tartalmazó P szerinti félegyenesre esik, akkor $Q = H_{P,\lambda}(R)$ valamilyen $\lambda > 0$-val, ahonnan $Q \in N$ következik, ami lehetetlen, hiszen N nyílt és $Q \in \partial N$. Ha pedig R a másik

félegyenes pontja, akkor a 3.2.(1) Állítást N-re, Q-ra és R-re alkalmazva következik, hogy $P \in N$, ami szintén lehetetlen.
Tekintsük most az általános esetet; feltehetjük, hogy $d = \dim X \geq 3$ és azt is, hogy $\dim Y \leq d-2$. Legyen $Z \supseteq Y$ maximális dimenziós M-től diszjunkt affin altér X-ben, belátjuk, hogy Z hipersík. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\dim Z \leq d-2$. Faktorizáljuk X-et a $\overrightarrow{Z}$ altér szerint és legyen $q : X \to X/\overrightarrow{Z}$ a faktorizáló leképezés. Ekkor a $q(M) \subset X/\overrightarrow{Z}$ halmaz konvex, nyílt és a $q(Z)$ pont nem tartozik hozzá. Válasszunk egy tetszőleges $S \subseteq X/\overrightarrow{Z}$ kétdimenziós affin alteret a $q(Z)$ ponton át. Alkalmazzuk a lemma már bizonyított speciális esetét a $q(Z)$ pontra és az $S \cap q(M)$ konvex nyílt halmazra az S affin síkban. Ha $E \subset S$ egyenes, melyre $q(Z) \in E$ és $E \cap q(M) = \emptyset$, akkor $q^{-1}(E)$ egy Z-nél magasabb dimenziós, Y-t tartalmazó, M-től diszjunkt affin altér X-ben, ami ellentmond Z maximalitásának. $\square$

4.3. Állítás. *Legyenek M és N nemüres diszjunkt konvex halmazok X-ben, amelyek közül legalább az egyik nyílt. Ekkor M és N elválaszthatók. Ha mindkét halmaz nyílt, akkor szigorúan is elválaszthatók.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy M nyílt. Tetszőlegesen választott origóval azonosítsuk X-et a V vektortérrel, majd képezzük az $N - M$ Minkowski-kombinációt. $N - M$ nyílt halmaz, hiszen $N - M = \bigcup_{\mathbf{x} \in N}(\mathbf{x} - M)$ és itt mindegyik $\mathbf{x} - M$ tag az M középpontos szimmetriával származó képének egy eltoltja, tehát nyílt. Továbbá $M \cap N = \emptyset$ miatt $N - M$ nem tartalmazza az origót, ezért a 4.2. Lemma felhasználásával található olyan $s \in V^*$ lineáris forma, amely minden $N - M$-beli vektoron pozitív értéket vesz fel. Emiatt az $s(M) \subset \mathbf{R}$ intervallum minden eleme kisebb az $s(N) \subset \mathbf{R}$ intervallum minden eleménél. Válasszunk egy elválasztó pontot, azaz a $[\sup s(M), \inf s(N)]$ zárt intervallum egy tetszőleges c elemét. Ekkor a $\mathbf{v} \mapsto s(\mathbf{v}) - c$ affin forma zéróhalmaza olyan hipersík, amely elválasztja M-et és N-et. Ha M és N is nyílt halmaz, akkor $s(M)$ és $s(N)$ nyílt intervallumok és így $c \notin s(M) \cup s(N)$, emiatt ez a hipersík szigorúan választja el M-t és N-et. $\square$

4.4. Következmény. *Legyenek K és L nemüres diszjunkt konvex zárt halmazok, amelyek közül legalább az egyik kompakt. Ekkor K és L szigorúan elválaszthatók.*

Bizonyítás: Rögtön következik a 3.8. és a 4.3. Állításokból. $\square$

Megjegyzés. A 4.4. Következményben a kompaktsági feltevés nem engedhető el, tekintsük ugyanis például a 3.8. Állítást követő megjegyzésben szereplő K és L halmazokat.

4.5. Következmény. *Az X affin tér egy részhalmaza pontosan akkor konvex és zárt, ha előáll zárt félterek metszeteként. A konvex zárt halmazok is és a konvex nyílt halmazok is előállnak nyílt félterek metszeteként.*

Bizonyítás: Zárt félterek metszete nyilván konvex és zárt. Megfordítva, legyen $K \subseteq X$ konvex zárt halmaz. Válasszunk a 4.4. Következmény alapján minden $P \in X - K$ ponthoz egy P-t és K-t szigorúan elválasztó hipersíkot és annak a K-t tartalmazó F_P zárt félterét. Ekkor $K = \bigcap_{P \in X-K} F_P$.
Ha a fenti konstrukcióban F_P-nek a megfelelő nyílt félteret választjuk, akkor K nyílt félterek metszeteként áll elő. Végül, ha K nyílt, akkor a 4.3. Állításra hivatkozva választjuk a hipersíkokat, majd a nyílt féltereket. $\square$

4.6. Állítás (Kakutani-lemma). *Ha $K, L \subseteq X$ diszjunkt konvex halmazok, akkor bármely $P \in X$ pontra K diszjunkt $\operatorname{conv}(\{P\} \cup L)$-től, vagy L diszjunkt $\operatorname{conv}(\{P\} \cup K)$-tól.*

Bizonyítás: Feltehető, hogy $P \notin K \cup L$. Ha $A \in K \cap \operatorname{conv}(\{P\} \cup L)$, akkor valamilyen $B \in L$ pontra $A \in [P, B]$. Hasonlóképpen ha $C \in L \cap \operatorname{conv}(\{P\} \cup K)$, akkor $C \in [P, D]$ alkalmas $D \in K$-val. Az A, B, C, D, P pontok mindannyian egy síkban vannak, ahol az $\langle A, D\rangle$ egyenes elválasztja B-t C-től, valamint a $\langle B, C\rangle$ egyenes elválasztja A-t D-től. Emiatt az $[A, D] \subseteq K$ és $[B, C] \subseteq L$ szakaszok metszik egymást, ami ellentmond K és L diszjunktságának. $\square$

4.7. Tétel. *Legyenek $K, L \subset X$ nemüres konvex halmazok, melyekre* $\operatorname{relint} K$ *és* $\operatorname{relint} L$ *diszjunktak. Ekkor K és L elválaszthatók.*

Bizonyítás: Nyilván elegendő $\operatorname{relint} K$ és $\operatorname{relint} L$ elválaszthatóságát megmutatni.
Ha K és L közül legalább az egyik d-dimenziós, akkor $\operatorname{relint} K$ és $\operatorname{relint} L$ közül legalább az egyik nyílt, ezért a 4.3. Állítást alkalmazva készen vagyunk.
Ha K és L mindketten d-nél alacsonyabb dimenziósak, akkor elég tehát megmutatni, hogy $\operatorname{relint} K$ és $\operatorname{relint} L$ belefoglalhatók olyan diszjunkt konvex halmazokba, amelyek közül legalább az egyik d-dimenziós. Ezt pedig a 4.6. Állítás ismételt alkalmazásával érjük el. Ha ugyanis M és N d-nél alacsonyabb dimenziójú diszjunkt konvex halmazok, akkor valamely $P \in X - (\langle M\rangle \cup \langle N\rangle)$ pontot választva 4.6 szerint M kibővíthető a $\operatorname{conv}(\{P\} \cup M)$ halmazzá vagy N kibővíthető a $\operatorname{conv}(\{P\} \cup N)$ halmazzá úgy, hogy továbbra is két diszjunkt konvex halmazt kapjunk. E lépés során az egyik halmaz dimenziója eggyel nőtt, ezért ilyen kibővítések véges egymásutánjával előbb-utóbb egyikük d-dimenziós lesz. $\square$

4.8. Definíció (Támaszhipersík, támaszféltér). Legyen $S \subseteq X$ tetszőleges ponthalmaz. Egy $H \subset X$ hipersíkot az S halmaz támaszhipersíkjának mondunk, ha S része az egyik H szerinti zárt féltérnek, és nincs olyan ennél a féltérnél valódi módon szűkebb zárt féltér, amely S-et tartalmazza. Az S halmaz támaszfélterének mondjuk a H szerinti zárt félterek közül az S-et tartalmazót (illetve mindkettőt, ha $S \subseteq H$).
Például ha S része az egyik H szerinti zárt féltérnek és ugyanakkor $H \cap \overline{S} \neq \emptyset$, akkor H szükségképpen támaszhipersík. Lehetséges azonban még konvex halmazok esetében is, hogy egy támaszhipersík nem tartalmazza a halmaz egyetlen határpontját sem, ld. pl. a 3.8. Állítást követő megjegyzésben szereplő K halmazt és az x-tengelyt mint K támaszegyenesét.
Az S halmaz támaszhipersíkjait zéróhalmazként előállító $s \in X^\bullet$ affin formákat nyilván az a tulajdonság jellemzi, hogy az $s(S)$ halmaz része a számegyenes pozitív vagy negatív zárt félegyenesének, és $0 \in \overline{s(S)}$.

4.9. Tétel. *Konvex halmaz bármely határpontjához található olyan támaszhipersík, amely ezt a pontot tartalmazza.*

Bizonyítás: Legyen $K \subset X$ konvex és $P \in \partial K$. Ha létezik K-t tartalmazó hipersík, akkor az támaszhipersík is. Ezért feltehető, hogy $\dim K = d$. Mivel ekkor $P \notin \operatorname{relint} K$, alkalmazhatjuk a 4.7. Tételt a K és az $L = \{P\}$ halmazokra. Bármely elválasztó hipersík egyúttal P-n átmenő támaszhipersík. $\square$

4.10. Állítás. *Ha K konvex halmaz és $H \cap \operatorname{relint} K \neq \emptyset$ teljesül K-nak valamely H támaszhipersíkjára, akkor $K \subseteq H$.*

Bizonyítás: $\dim K = d$ esetén $H \cap \operatorname{relint} K \neq \emptyset$ lehetetlen, hiszen ilyenkor $\operatorname{relint} K = \operatorname{int} K$ nyílt. Ha pedig $\dim K < d$, térjünk át a $\langle K\rangle$ affin altérre és a $\langle K\rangle$-beli $H \cap \langle K\rangle$ támaszhipersíkra. $\square$

4.11. Állítás. *Bármely konvex zárt halmaz azonos a támaszféltereinek a metszetével.*

Bizonyítás: Jelölje L a K konvex zárt halmaz támaszféltereinek a metszetét. A $K \subseteq L$ tartalmazás nyilvánvaló. Megfordítva, ha $A \in X - K$, akkor a 4.5. Következményt alkalmazva található olyan $s \in X^\bullet$ affin forma, hogy $s(A) < 0$ és minden $B \in K$-ra $s(B) \geq 0$. Legyen $c = \inf s(K)$, ekkor az $s'(P) = s(P) - c \ \ (P \in X)$ képlettel adott affin forma által definiált $\{P \in X : s'(P) \geq 0\}$ támaszféltér nem tartalmazza A-t, így $A \notin L$. Tehát $L \subseteq K$ is érvényes. □

5. Határpontok

5.1. Definíció (Határpont rendje, csúcs, lap, hiperlap). Legyen $A \in \partial K$, ahol $K \subset X$ konvex halmaz és $\dim K = d$. Az A határpont rendjén az $r(A) = \dim Y$ számot értjük, ahol Y a K halmaz A-t tartalmazó összes támaszhipersíkjának a metszeteként előálló affin altér. Bármely $A \in \partial K$-ra $0 \leq r(A) \leq d-1$. Az A pontot a K konvex halmaz csúcsának nevezzük, ha $r(A) = 0$. Az $L \subseteq K$ halmazt K lapjának nevezzük, ha $L = \emptyset$, $L = K$, vagy $L = H \cap K$, ahol H a K egy támaszhipersíkja. Az $\emptyset$-tól és K-tól különböző lapokat K valódi lapjainak hívjuk, ezek dimenziója d-nél kisebb szám. A $(d-1)$-dimenziós lapokat hiperlapoknak nevezzük.

Nyilván bármely $L \subseteq K$ nemüres lapra $L = \langle L \rangle \cap K$.

5.2. Példák

- Egy $[A_0, A_1, \ldots, A_d]$ d-dimenziós szimplex esetében valamely határpont rendje akkor és csak akkor r, ha benne van az A_0, A_1, …, A_d pontok közül $(r+1)$-nek a konvex burkában és nincs benne $(r+1)$-nél kevesebbnek a konvex burkában. A szimplexnek az 5.1. Definíció értelmében vett csúcsai tehát éppen a 2.2. Definícióbeli szóhasználat szerinti csúcsai.
- Az $[A_0, A_1, \ldots, A_d]$ szimplex valódi lapjai az $[A_{i_0}, A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}]$ alakú részhalmazok ($0 \leq k < d$, $0 \leq i_0 < i_1 < \ldots < i_k \leq d$), amelyek maguk is szimplexek.
- Ha $A \in \partial K$ a K konvex halmaz csúcsa, akkor $\{A\}$ lapja K-nak. (Indoklás: $r(A) = 0$ miatt léteznek olyan s_1, …, s_d lineárisan független affin formák, melyekre $s_i(A) = 0$ és $s_i(K) \geq 0$ minden $i = 1, \ldots d$-re; ekkor az $s = s_1 + \ldots + s_d$ affin formával $\mathcal{Z}(s)$ támaszhipersík és $\mathcal{Z}(s) \cap K = \{A\}$. Ha ugyanis valamely $B \in K$-ra $s(B) = 0$ teljesül, akkor szükségképpen minden i-re $s_i(B) = 0$, viszont $r(A) = 0$ miatt $\bigcap_{i=1}^{d} \mathcal{Z}(s_i) = \{A\}$ és így $B = A$.) Az egyelemű lapok viszont nem feltétlenül csúcsok: például egy ellipszoid minden valódi lapja egypontú.

5.3. Állítás. *Ha $K \subseteq X$ d-dimenziós konvex zárt halmaz, akkor ∂K egyenlő a K valódi lapjainak egyesítésével.*

Bizonyítás: Rögtön adódik a 4.9. Tételből. □

5.4. Állítás. *Ha L_1 és L_2 a $K \subseteq X$ konvex halmaz két különböző lapja, akkor* $\operatorname{relint} L_1 \cap \operatorname{relint} L_2 = \emptyset$.

Bizonyítás: Feltehető, hogy L_1 és L_2 valódi lap; legyen $i = 1, 2$-re $L_i = H_i \cap K$, ahol H_i támaszhipersík, legyen továbbá F_i a H_i-hez tartozó támaszféltér. Ha $A \in \operatorname{relint} L_1 \cap \operatorname{relint} L_2$, akkor $L_1 \subset K \subseteq F_2$ és $A \in H_2 = \partial F_2$ miatt 4.10-re hivatkozva $A \in \operatorname{relint} L_1$ csak úgy lehetséges, ha $L_1 \subseteq H_2$. Hasonlóan $L_2 \subseteq H_1$. Ekkor viszont $L_1 = H_1 \cap H_2 \cap K = L_2$. □

5.5. Állítás. *Bármely konvex halmaz csúcsainak a halmaza megszámlálható.*

Bizonyítás: Legyen $A \in \partial K$ a $K \subset X$ d-dimenziós konvex halmaz egy csúcsa. Tekintsük a $C(A) = \{s \in X^\bullet : s(A) = 0, s(K) \geq 0\}$ halmazt a $(d+1)$-dimenziós $X^\bullet$ vektortérben. Nyilván $C(A)$ konvex kúp, és mivel A csúcs, $\dim C(A) = d$. Ha A és A' a K két különböző csúcsa, akkor az $X^\bullet$-beli $\{s \in X^\bullet : s(A) = s(A')\}$ lineáris hipersík elválasztja $C(A)$-t és $C(A')$-t. Az 5.2-beli harmadik példa mutatja, hogy $C(A)$ és $C(A')$ nem fekszenek benne ebben a hipersíkban, emiatt 4.10 felhasználásával $\operatorname{relint} C(A) \cap \operatorname{relint} C(A') = \emptyset$.
Az $L : X^\bullet \to V^*$ linearizáló leképezésnél $L(s) = L(s')$ pontosan akkor teljesül, ha $s - s'$ konstans. Emiatt $(\operatorname{Ker} L) \cap \langle C(A) \rangle = 0$, és L a $C(A)$ halmazt injektíven képezi a d-dimenziós V^* vektortérbe. Így az $L(C(A))$ képhalmaz szintén d-dimenziós konvex halmaz.
Elegendő megmutatni, hogy a K halmaz két különböző A és A' csúcsára az $L(C(A))$ és az $L(C(A'))$ halmaz belseje diszjunkt, ugyanis megszámlálhatónál több páronként diszjunkt nyílt halmaz nem fér el a V^* térben. (Ez utóbbihoz annyit elegendő tudni V^*-ról, hogy szeparábilis, azaz létezik benne megszámlálható sűrű ponthalmaz. Ez valóban így van a $V^* \cong \mathbf{R}^d$ térben.)
Tegyük fel, hogy $s \in C(A)$, $s' \in C(A')$ és $L(s) = L(s')$. Ekkor $0 = s(A) \leq s(A')$ és $0 = s'(A') \leq s'(A)$ miatt $s - s'$ csak úgy lehet konstans, hogy $s(A') = s'(A) = 0$ is fennáll. Ekkor viszont s és s' nem relatív belső pontja $C(A)$-nak, illetve $C(A')$-nek, és így L-képeik sem belső pontok. $\square$

5.6. Definíció (Extremális pont). A $P \in K$ pontot a K konvex halmaz extremális pontjának nevezzük, ha a $K - \{P\}$ halmaz konvex. (Ez azzal egyenértékű, hogy P nem áll elő semmilyen K-ban fekvő végpontú szakasz felezőpontjaként, vagy akár csak relatív belső pontjaként.) A K konvex halmaz extremális pontjainak halmazát $\mathcal{E}(K)$-val jelöljük. Nyilván $\dim K > 0$ esetén $\mathcal{E}(K) \subseteq \operatorname{rel}\partial K$.

5.7. Példák

- Szakasz extremális pontjai a végpontok.
- Ha A a K konvex halmaz csúcsa, akkor $A \in \mathcal{E}(K)$.
- Egy ellipszoid bármely relatív határpontja extremális pont.
- Ha egy konvex zárt halmaz tartalmaz egyenest, akkor könnyen látható módon nincs extremális pontja. (Érvényes a megfordítás is, de nehezebb bizonyítani: ha a K nemüres konvex zárt halmazra $\mathcal{E}(K) = \emptyset$, akkor van K-ban fekvő egyenes.)
- Az $n \times n$-es duplán sztochasztikus mátrixok B_n halmazának (ld. 1.3.) extremális pontjai az $n \times n$-es permutációmátrixok.

5.8. Lemma. *Legyen $K \subseteq X$ konvex.*
(1) *Ha $Y \subseteq X$ affin altér, akkor $Y \cap \mathcal{E}(K) \subseteq \mathcal{E}(Y \cap K)$.*
(2) *Ha H a K konvex halmaz támaszhipersíkja, akkor $H \cap \mathcal{E}(K) = \mathcal{E}(H \cap K)$.*

Bizonyítás: (1): Ha $P \in Y \cap \mathcal{E}(K)$, akkor $(Y \cap K) - \{P\} = Y \cap (K - \{P\})$ konvex.
(2): Elég az (1)-hez képest fordított irányú tartalmazást belátni. Legyen $P \in \mathcal{E}(H \cap K)$. Egyrészt ekkor $P \in H$ és $P \in K$, másrészt ha P előállna valamely $A, B \in K$-val az $[A, B]$ szakasz belső pontjaként, akkor ez csak $A, B \in H$ mellett volna lehetséges, hiszen A és B ugyanabban a H szerinti zárt féltérben vannak. Ekkor viszont P nem lenne a $H \cap K$ halmaz extremális pontja, mert $[A, B] \subseteq H \cap K$. $\square$

5.9. Tétel (Krein–Milman-tétel). *Bármely kompakt konvex halmaz azonos az extremális pontjai konvex burkával.*

Bizonyítás: A $K \subseteq X$ kompakt konvex halmaz dimenziója szerinti teljes indukcióval megmutatjuk, hogy $K = \mathrm{conv}(\mathcal{E}(K))$. Legyen $k = \dim K$.
Az állítás nyilvánvaló $k = 0$ esetén. Tegyük fel, hogy $k \geq 1$ és k-nál kisebb dimenziójú kompakt konvex halmazokra az állítás igaz. A 3.7. Állításra hivatkozva elég belátni, hogy $\mathrm{rel}\partial K \subseteq \mathrm{conv}(\mathcal{E}(K))$. Legyen $A \in \mathrm{rel}\partial K$ és a 4.9. Tétel alapján válasszunk olyan H támaszhipersíkot K számára a $\langle K \rangle$ affin térben, amelyre $A \in H$. Ekkor az indukciós feltevést és 5.8.(2)-t használva $A \in H \cap K = \mathrm{conv}(\mathcal{E}(H \cap K)) = \mathrm{conv}(H \cap \mathcal{E}(K)) \subseteq \mathrm{conv}(\mathcal{E}(K))$. $\square$

5.10. Állítás. *Legyen $\alpha K + \beta L$ a K és L konvex halmazok tetszőleges Minkowski-kombinációja. Ekkor $\mathcal{E}(\alpha K + \beta L) \subseteq \alpha\mathcal{E}(K) + \beta\mathcal{E}(L)$.*

Bizonyítás: Legyen $C \in \mathcal{E}(\alpha K + \beta L)$, ekkor $C = \alpha A + \beta B$ alkalmas $A \in K$, $B \in L$ pontokkal. Állítjuk, hogy $A \in \mathcal{E}(K)$ és $B \in \mathcal{E}(L)$. Ha például A nem volna K-nak extremális pontja, akkor létezne olyan $S \subseteq K$ szakasz, amelyre $A \in \mathrm{relint}\, S$. Ekkor $\alpha S + \beta\{B\} \subseteq \alpha K + \beta L$ olyan szakasz volna, amelynek C relatív belső pontja, ami ellentmond annak, hogy C extremális pont az $\alpha K + \beta L$ halmazban. Ugyanígy látható be, hogy $B \in \mathcal{E}(L)$. $\square$