Bevezető analízis I. jegyzet és példatár

Gémes Margit, Szentmiklóssy Zoltán

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Matematikai Intézet

2016. január 29.

Kiadó: Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar, dr. Surján Péter
ISBN 978-963-284-720-7

Tartalomjegyzék

Halmazok, logika, bizonyítási módszerek

1.1. Halmazok

A **halmaz** alapfogalom, nem definiáljuk. Talán úgy tudjuk körülírni, hogy valamilyen dolgok összessége.
Egy halmazt az elemei határoznak meg. Az elemek benne vannak a halmazban. Jelölés: $a \in A$, azaz az a elem benne van az A halmazban. Annak a jelölése, hogy a b elem nincs benne az A halmazban: $b \notin A$.
Példák halmazokra, elemekre:

— A valós számok halmaza.

— $H = \{z : z \in \mathbb{Z}, z \text{ páros}\}, \quad -4 \in H, \quad 5 \notin H$

1.1. Definíció: Két halmaz egyenlő, ha ugyanazok az elemei.

1.2. Definíció: Az üres halmaz az a halmaz, amelyiknek nincs eleme.

1.3. Definíció: Azt mondjuk, hogy K részhalmaza H-nak, ha K minden eleme benne van H-ban. Jelölés: $K \subset H$.

Egy halmaz mindig részhalmaza önmagának.

Példák halmazokra, részhalmazokra:

— $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

— $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$

Fontos: Nem szabad összekeverni a halmaz elemét a halmaz részhalmazával. Például $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, mert minden nemnegatív egész szám racionális is, de $\mathbb{N} \notin \mathbb{Q}$, mert $\mathbb{Q}$ elemei a racionális számok, és $\mathbb{N}$ nem egy darab racionális szám, hanem (végtelen) sok egész szám.
A halmazokat **Venn-diagrammal** is szoktuk szemléltetni.

A halmazok között műveleteket is végezhetünk:

1.4. Definíció: Az A és B halmazok

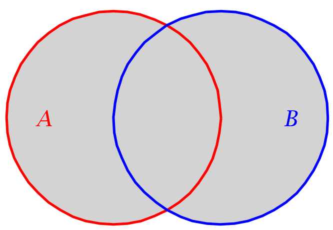
— **uniója** vagy egyesítése az a C halmaz, amelyik tartalmazza azokat az elemeket, amelyek A és B közül legalább az egyikben benne vannak. Jelölés: $C = A \cup B$.

— **metszete** vagy közös része az a C halmaz, amelyik tartalmazza azokat az elemeket, A-ban is, és B-ben is benne vannak. Jelölés: $C = A \cap B$.

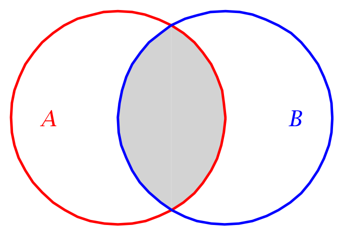
— **különbsége** az a C halmaz, amelyik azokat az elemeket tartalmazza, amelyek A-ba benne vannak, de B-ben nem. Jelölés: $C = A \setminus B$.

1.5. Definíció: Az A és B halmazokat **diszjunktaknak** nevezzük, ha a metszetük az üres halmaz: $A \cap B = \emptyset$.
1.6. Definíció: Legyen H egy rögzített halmaz, és legyen $A \subset H$. Ekkor az A halmaz H-ra vonatkozó **komplementere** az $\overline{A} = H \setminus A$ halmaz.
1.7. Tétel: A de Morgan-féle azonosságok: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ és $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

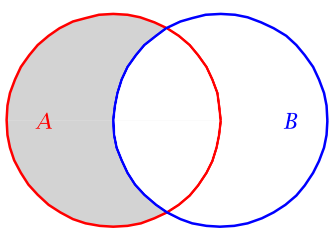
A következő Venn-diagramok a halmazműveleteket szemléltetik:



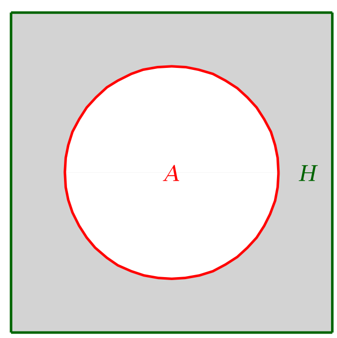
$\boldsymbol{A \cup B}$



$\boldsymbol{A \cap B}$



$\boldsymbol{A \setminus B}$



$\boldsymbol{\overline{A}}$

1.8. Tétel: Azonosságok:

— $A \subset A$

— $\emptyset \subset A$

— Ha $A \subset B$ és $B \subset C$, akkor $A \subset C$.

— $A \setminus A = \emptyset$

— $A \setminus \emptyset = A$

— $A \cup A = A$

— $A \cap A = A$

— $A \cup B = B \cup A$

— $A \cap B = B \cap A$

1.2. Logikai műveletek, igazságtáblázatok

Azokat a mondatokat, amelyekhez józan ésszel az **igaz** vagy **hamis** logikai értékek valamelyikét hozzárendelhetjük, állításoknak nevezzük.

Nem minden mondat állítás.

Példák olyan mondatokra, amelyek **nem** állítások:

— Miért nem süt a nap?

— Ez a mondat nem igaz.

Példák állításokra:

— Most nem süt a nap. (Lehet igaz is, lehet hamis is.)

— A logaritmus függvény a pozitív számokon van értelmezve. (Igaz.)

— A logaritmus függvény a negatív számokon van értelmezve. (Hamis.)

Az **állításokat** logikai műveletekkel kapcsolhatjuk össze. A logikai műveletek: **konjunkció** (vagy „és”), **diszjunkció** (vagy „vagy”), **negáció** (vagy tagadás), **implikáció** (vagy következtetés). Jelöljön A és B állításokat, így a logikai műveletek jelölése:

— **konjunkció:** $A \wedge B$

— **diszjunkció:** $A \vee B$

— **negáció:** $\overline{A}$ vagy $\neg A$

— **implikáció:** $A \rightarrow B$ vagy $A \implies B$

A logikai műveletek értelmezése:

— $A \wedge B$ pontosan akkor **igaz**, ha A is igaz, és B is igaz.

— $A \vee B$ pontosan akkor **hamis**, ha A is hamis, és B is hamis.

— $\overline{A}$ vagy $\neg A$ pontosan akkor **igaz**, ha A hamis.

— $A \implies B$ pontosan akkor **hamis**, ha A igaz, és B hamis.

Megjegyzések:

— „A pontosan akkor igaz...", azt jelenti, hogy minden más esetben hamis.

— „A pontosan akkor hamis...", azt jelenti, hogy minden más esetben igaz.

— A „vagy"-gyal összekötött állítás akkor is igaz, ha mindkét rész állítás igaz. A matematikában az úgynevezett **„megengedő vagy"-ot** használjuk.

— Az $A \implies B$ implikáció arról szól, hogy minden olyan esetben, amikor A igaz, B-nek is teljesülnie kell. Arról nem szól az implikáció, hogy mi van akkor, ha A hamis. Ezért értelmes az implikációt úgy definiálni, hogy $A \implies B$ igaz legyen azokban az esetekben, amikor A hamis, függetlenül attól, hogy B igaz vagy hamis. Tehát hamis állításból minden következik. Ezt azért fontos tudnunk, mert így látjuk, hogy hamis állításból kiindulva nem tudunk semmit bizonyítani, hamis állításból ugyanis minden igaz és minden hamis állítás következik.

1.9. Definíció: Az A és B állítások ekvivalensek (jele: $A \iff B$), ha $A \implies B$ és $B \implies A$ is teljesül, vagyis a két állítás kölcsönösen következik egymásból.
A logikai műveleteket igazságtáblázatokkal is fel lehet írni:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \implies B$
i	i	i	i	i
i	h	h	i	h
h	i	h	i	i
h	h	h	h	i

A	$\neg A$
i	h
h	i

A logikai műveletekkel összekapcsolt állítások tagadásait is felírhatjuk táblázatba.
Fontos: Egy állításnak és a tagadásának mindig ellentétes a logikai értéke.

A	B	$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$	$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$	$\neg(A \implies B) = A \wedge \neg B$
i	i	h	h	h
i	h	i	h	i
h	i	i	h	h
h	h	i	i	h

Példák igaz állításokra:

— A 4 páros szám.

— A 4 páros szám és $5 > 2$.

— A 4 páros szám vagy $5 > 2$.

— A 4 páratlan szám vagy $5 > 2$.

— A 4 páros szám vagy $5 < 2$.

— Ha 4 páros szám, akkor $5 > 2$.

— Ha 4 páratlan szám, akkor $5 > 2$.

— Ha 4 páratlan szám, akkor $5 < 2$.

Példák hamis állításokra:

— A 4 páratlan szám.

— A 4 páros szám és $5 < 2$.

— A 4 páratlan szám és $5 > 2$.

— A 4 páratlan szám és $5 < 2$.

— A 4 páratlan szám vagy $5 < 2$.

— Ha 4 páros szám, akkor $5 < 2$.

Példák állításokra és a tagadásukra:

— **Állítás:** A csitári hegyek alatt leesett a hó.
Tagadása: A csitári hegyek alatt nem esett le a hó.

— **Állítás:** Nem vagy itt jó helyen, és nem vagy való nekem.
Tagadása: Jó helyen vagy itt, vagy nekem való vagy.

— **Állítás:** Esik az eső és nem találsz rám.
Tagadása: Nem esik az eső vagy rám találsz.

— **Állítás:** Nem bérelek ki egy jó nagy puputevét vagy nem járom be Kenyát.
Tagadása: Kibérelek egy jó nagy puputevét és bejárom Kenyát.

— **Állítás:** A világ a jóra éhes vagy az ember a széptől ékes.
Tagadása: A világ nem a jóra éhes és az ember nem a széptől ékes.

— **Állítás:** Ha itt a nyár, akkor meleg az idő.
Tagadása: Itt a nyár, és nem meleg az idő.

A logika elemeit azért kell ismernünk, hogy a bizonyításainkban csak helyes lépéseket végezzünk.

1.3. Bizonyítási módszerek: direkt, indirekt

Ahogy már írtuk, a matematikában az axiómák kivételével minden állítást bizonyítani kell. Az egyszerű vagy egyszerűnek látszó állításokat is. Bizonyítás közben felhasználhatjuk az axiómákat és a már korábban bizonyított állításokat. Ez nem jelenti azt, hogy valóban mindig mindent bizonyítani fogunk, erre időnk sem lesz, ehelyett elfogadjuk, hogy mások már bizonyították a megfelelő állításokat, tételeket.
Ugyanakkor a feladatok gyakran szólnak állítások bizonyításáról.
A bizonyításokat éppen úgy meg lehet tanulni, mint a matematika többi részét.

A feladatok egy része megmondja, hogy mit kell bizonyítani.

Példa: Bizonyítsuk be, hogy $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, ahol $n\in\mathbb{N}^+$.
Ilyenkor végig kell gondolni az állítást, és hogy milyen bizonyítási módszerek jöhetnek szóba. Itt például bizonyíthatunk **teljes indukcióval** vagy felhasználhatjuk a számtani sorozat összegképletét.
Sok esetben a feladat csak kérdez, és nem mondja meg, hogy mit kell bizonyítani.
Példa: Van-e olyan $N\in\mathbb{N}^+$ szám, amelyikre teljesül, hogy ha $n>N$, akkor $n^2>n+10$, ahol $n\in\mathbb{N}^+$?
Ahhoz, hogy tudjuk, hogy mit akarunk bizonyítani **sejtésekre** van szükségünk. A sejtésekhez rajzokkal, konkrét értékek kiszámításával juthatunk el. Nagyon fontos, hogy meg tudjuk különböztetni a **sejtéseket** a **bizonyított** állításoktól.
Ha az előző példát akarjuk megoldani, érdemes próbálkozni:
$n=1$-re $n^2=1,\quad n+10=11$
$n=2$-re $n^2=4,\quad n+10=12$
$n=3$-ra $n^2=9,\quad n+10=13$
$n=4$-re $n^2=16,\quad n+10=14$
$n=5$-re $n^2=25,\quad n+10=15$
Most az a **sejtésünk**, hogy igen, van ilyen N szám. Ha már van sejtésünk, akkor el kell kezdeni a **bizonyítást**. A bizonyítás nem azonos a bizonygatással. Az, hogy „látszik, hogy igaz”, nem bizonyítás.
Az előző sejtést **becsléssel** bizonyíthatjuk be: $n+10<n+n$, ha $n>10$. Tehát, ha $n>10$, akkor $n+10<n+n=2n$, továbbá ha $n>2$, akkor $2n<n^2$. Vagyis, ha $n>10>2$, akkor az összes egyenlőtlenség teljesül a következő becslésben: $n+10<n+n=2n<n^2$, tehát az $N=10$ jó megoldás. Most $N=10$ esetben bizonyítottuk a sejtést.
Megjegyzés: az teljesen érdektelen, hogy esetleg 10-nél kisebb jó megoldása is van a feladatnak.

Egy újabb **példa:** Van-e olyan $N\in\mathbb{N}^+$, amelyikre teljesül, hogy ha $n>N$, akkor $2^n>n^4$, ahol $n\in\mathbb{N}^+$?
Próbálkozzunk most is:
$n=1$-re $2^1=2,\quad 1^4=1$
$n=2$-re $2^2=4,\quad 2^4=16$
$n=3$-ra $2^3=8,\quad 3^4=81$

$n = 4$-re $2^4 = 16, \quad 4^4 = 256$
$n = 5$-re $2^5 = 32, \quad 5^4 = 625$
Most az a sejtés alakulhat ki, hogy a feladatban szereplő N nem létezik, és ez „látszik” is. A „látszik” nem bizonyítás. Ha megpróbáljuk a sejtésünket **bizonyítani**, és azt tapasztaljuk, hogy nem sikerül, két lehetőség van: az egyik az, hogy ügyetlenek vagyunk, és ezért nem sikerül bizonyítani, a másik lehetőség az, hogy nem is igaz a sejtésünk. Tehát, ha nem sikerül egy bizonyítás, érdemes megváltoztatni a sejtést. Ebben az esetben a megváltoztatott sejtést kell bizonyítani.
Megjegyzés: például teljes indukcióval is lehet bizonyítani, hogy van olyan $N \in \mathbb{N}^+$, amelyikre teljesül, hogy ha $n > N$, akkor $2^n > n^4$, ahol $n \in \mathbb{N}^+$. Ezt a bizonyítást most nem írjuk le.

A bizonyításoknál figyeljünk oda, hogy **csak a feladatban megadott feltételeket** használjuk fel! A megoldás során minden **sejtést** igazoljunk!

A bizonyítási módszerek közül kettővel foglalkozunk: a **direkt** és az **indirekt** bizonyítással.

Direkt bizonyítás:

A direkt bizonyításnál **igaz** állításból indulunk ki, és helyes matematikai lépésekkel jutunk el a bizonyítandó állításhoz.

Példa direkt bizonyításra: A számtani-mértani közép egyenlőtlenség bizonyítása.

A direkt bizonyításoknál nagyon kell figyelni arra, hogy **nem a bizonyítandó állításból** indulunk ki, hiszen arról nem tudjuk, hogy igaz-e, csak majd a bizonyítás után. Ha hamis állításból indulunk ki, bármit levezethetünk, ld. a megjegyzést az implikációnál.

Példa olyan **hibás** bizonyításra, amikor hamis állításból indulunk ki:
Az a sejtésünk, hogy $1 = 2$. Az egyenlőség mindkét oldalát 0-val megszorozva a $0 = 0$ igaz állításhoz jutunk. Abból, hogy a végeredmény igaz, nem következtethetünk arra, hogy a kiindulás is igaz volt.
Ezért figyeltünk oda a számtani-mértani közép egyenlőtlenség bizonyításakor, hogy igaz állításból induljunk ki.

Nem minden esetben tudjuk előre, hogy melyik az az igaz állítás, amiből ki kell indulni. Természetesen gondolkozhatunk visszafele, próbálkozhatunk a bizonyítandó állítás alakításával, és azzal, hogy így jussunk el egy igaz állításhoz, de a megoldás végén a bizonyítás leírásakor az **igaz állításból kiindulva kell eljutni helyes lépéseken keresztül a bizonyítandó állításhoz.** Az igaz állítás a START, a bizonyítandó állítás a CÉL. Segíthet, ha visszafele bejárjuk a pályát, de a versenyen a STARTBÓL kell kiindulni, és a CÉLBA kell beérkezni.

Indirekt bizonyítás:

Az indirekt bizonyításnál feltesszük a bizonyítandó állítás tagadását (ld. logikai műveletek), ez az **indirekt feltevés**, majd ebből az indirekt feltevésből kiindulva helyes matematikai lépéseken keresztül ellentmondásra jutunk. Az ellentmondás azt jelenti, hogy az indirekt feltevés hamis, tehát az eredeti állítás igaz.

Példa indirekt bizonyításra: $\sqrt{2}$ irracionalitásának bizonyítása.

Az indirekt bizonyításnál arra kell figyelnünk, hogy helyesen fogalmazzuk meg a bizonyítandó állítás tagadását. Hibás tagadás hibás bizonyításhoz vezet. Annak a tagadása, hogy „ez a toll kék”, az, hogy „ez a toll **nem** kék”. Nem tagadása az „ez a toll kék” állításnak sem az, hogy „ez a toll piros”, sem az hogy „ez a toll nem kék, hanem piros”.

Példa olyan **hibás** bizonyításra, amikor rosszul fogalmazzuk meg az indirekt feltevést:
Az a sejtésünk, hogy ha $x^2 > 4$, akkor $x > 2$. A sejtést indirekt módon próbáljuk bizonyítani. A hibásan megfogalmazott indirekt feltevés: Ha $x^2 > 4$, akkor $x \leq 2$. Az így megfogalmazott indirekt feltevés biztosan nem igaz, ellenpélda az $x = 3$, hiszen $3^2 = 9 > 4$, és $3 > 2$. Tehát az indirekt feltevés nem igaz. Ebből helyesen megfogalmazott indirekt feltevés esetén következne, hogy az eredeti állítás igaz. Most viszont nem következik, és az eredeti állítás nem is igaz: például $x = -3$ esetén $(-3)^2 = 9 > 4$ és $-3 < 2$.

1.4. Hogyan indokoljunk?

Sok feladat tesz fel olyan jellegű kérdést, hogy „igaz-e, lehet-e, következik-e” valami, és a feladat végén ott van, hogy „a választ indokoljuk meg”!
A helyes indokláshoz tudnunk kell, hogy mikor milyen jellegű indoklást kell adnunk.

Most különböző típusú feladatokra nézünk példákat.

Az „Igaz-e minden esetben?” típusú feladatok:

Példa: Igaz-e, hogy minden olyan esetben, amikor az egyenlőség mindkét oldala értelmes, akkor $\sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x$?
Megoldás: Első lépés a két oldal értelmezési tartományának vizsgálata: mindkét oldal értelmezve van a valós számok halmazán. Ha az egyenlőség mindkét oldalát négyzetre emeljük, akkor egy **azonosságot** kapunk a valós számok halmazán. A kérdés az, hogy az eredeti egyenlőség ekvivalens-e a négyzetre emelés utáni egyenlőséggel. Az a sejtésünk, hogy nem, mert az eredeti egyenlőség bal oldala nem lehet negatív, a jobb oldala viszont igen. Tehát a **sejtésünk** és a válaszunk az, hogy a két oldal nem lesz minden valós x-re egyenlő. Ezt a választ úgy tudjuk megindokolni, hogy mutatunk egy olyan x értéket, amely nem elégíti ki az egyenlőséget, például az $x = \pi$ jó lesz **ellenpéldának.** Ha ugyanis $x = \pi$, akkor $\sqrt{1-\sin^2 \pi} = \sqrt{1-0} = 1 \neq -1 = \cos \pi$.

Tehát, ha a kérdés úgy hangzik, hogy „Igaz-e minden esetben?”, és a válasz az, hogy „nem”, akkor elég egyetlen ellenpéldát megadnunk. Természetesen mindig meg kell mutatnunk, hogy az ellenpélda valóban ellenpélda.

Megjegyzés: A feladatban nem feltétlenül szerepel a „minden esetben” kifejezés. Ha egy állításról általánosan beszélünk, akkor mindig a „minden esetre” gondolunk. Tehát az előbbi példát úgy is megfogalmazhattuk volna, hogy „Igaz-e, hogy $\sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x$?” A válasz az, hogy nem igaz, és egyetlen ellenpélda jó indoklásnak.

Példa: Igaz-e, hogy két szigorúan monoton növő függvény összege szigorúan monoton növő, ha mindkét függvény értelmezve van a teljes számegyenesen?

Megoldás: Próbálkozhatunk néhány konkrét példával. Mindig segít, ha ilyenkor vázoljuk néhány konkrét függvény grafikonját. Kialakul a sejtésünk, hogy a kérdésre az „igaz” válasz lesz a jó. Most viszont nem elég, ha konkrétan mutatunk példát arra, amikor az állítás igaz, hiszen **minden** szigorúan monoton növő függvénypárt ellenőriznünk kellene, ami lehetetlen. Ilyenkor bizonyítunk. Legyen f és g szigorúan monoton növő. Ez azt jelenti, hogy ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) < f(x_2)$ és $g(x_1) < g(x_2)$. Az egyenlőtlenségeket összeadva $f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2)$, tehát az állítás igaz.

Tehát, ha a kérdés úgy hangzik, hogy „Igaz-e minden esetben?”, és a válasz az, hogy „igen”, akkor az indoklás az általános bizonyítás.

A „Következik-e?” típusú kérdésnél ugyanolyan jellegű indoklást kell adnunk, mint az „Igaz-e?” kérdésnél.

A „Lehet-e?” típusú feladatok:

Példák:

— Lehet-e két irracionális szám összege racionális?

Megoldás: Először át kell gondolni, hogy mi mindent tudunk az irracionális számokról, aztán próbálkozhatunk konkrét példákkal: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\sqrt{2} + \sqrt{2}$, és az a sejtésünk, hogy a válasz „nem”. Megpróbáljuk a sejtést bebizonyítani, de nem sikerül. Talán azért nem, mert nem is igaz a sejtés. Megváltoztatjuk a sejtést arra, hogy igen, két irracionális szám összege lehet racionális. Ezt valamilyen konkrét példával tudjuk megindokolni. Példa: $\sqrt{2}$ és $-\sqrt{2}$. Adjuk össze a két számot: $\sqrt{2} + \left(-\sqrt{2}\right) = 0 \in \mathbb{Q}$.

— Lehet-e két szigorúan monoton csökkenő függvény összege szigorúan monoton növő?

Megoldás: Próbálkozhatunk néhány konkrét példával. Mindig segít, ha ilyenkor vázoljuk néhány konkrét függvény grafikonját. Kialakul a sejtésünk, hogy a kérdésre a „nem lehet” válasz lesz a jó. Most viszont nem elég, ha konkrétan mutatunk példát arra, amikor az állítás nem igaz, hiszen **minden** szigorúan monoton csökkenő függvénypárt ellenőriznünk kellene, ami lehetetlen. Ilyenkor bizonyítunk. Legyen f és g szigorúan monoton csökkenő. Ez azt jelenti, hogy ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) > f(x_2)$ és $g(x_1) > g(x_2)$. Az egyenlőtlenségeket összeadva $f(x_1) + g(x_1) > f(x_2) + g(x_2)$, tehát az összegfüggvényre nem teljesülhet a szigorúan monoton növekedés definíciója, ami szerint az $f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2)$ egyenlőtlenségnek kellene teljesülnie.

Tehát, ha a kérdés úgy hangzik, hogy „Lehet-e?”, és a válasz az, hogy „igen”, akkor az indoklás egy példa. Természetesen meg kell mutatni, hogy a példa valóban jó. Ha viszont a válasz az, hogy „nem lehet”, akkor az indoklás az általános bizonyítás.

Fontos: Az „igaz-e, lehet-e, következik-e” típusú feladatok megoldásakor néhány konkrét példára vagy korábbi ismeretekre, tapasztalatokra támaszkodva **először ki kell alakítani egy sejtést.** A sejtés határozza meg, hogy példát, ellenpéldát keresünk, vagy bizonyítani próbálunk egy állítást. Ha az indoklás nem sikerül, érdemes a sejtést megváltoztatni. Lehet, hogy a megoldás során többször is változik a sejtésünk. Ha látjuk, hogy miért nem tudunk példát vagy ellenpéldát mutatni, az megkönnyíti a bizonyítást, illetve, ha látjuk, hogy miért nem tudunk bizonyítani, például milyen feltétel hiányzik, az megkönnyíti a példa, ellenpélda gyártását.

1.5. Feladatok

Biztatásul közlöm, hogy tévesnek bizonyult a cáfolata annak a híresztelésnek, mely szerint mégsem hazugság azt tagadni, hogy lesz olyan hallgató, akinek egy analízis feladatot sem kell megoldania ahhoz, hogy ne bukjon meg.

(Baranyai Zsolt)

Igaz-e tetszőleges A és B halmazokra, hogy

1.1. $A \backslash B = A \cap \overline{B}$

1.2. $(A \cup B) \backslash B = A$

1.3. $(A \backslash B) \cup B = A$

1.4. $\overline{A} \backslash B = A \backslash \overline{B}$?

Balkezes Bendegúz a bal kezével mindig igaz, a jobb kezével mindig hamis állításokat írt. Melyik kezével írta a következő állításokat?

1.5. Minden 9-cel osztható négyzetszám osztható 3-mal.

1.6. Minden 8-cal osztható szám osztható 2-vel és 4-gyel.

1.7. Minden 8-cal osztható szám osztható 2-vel vagy 4-gyel.

1.8. Minden 2-re végződő négyzetszám páratlan.

1.9. A 0 páros szám.

1.10. Van olyan piros krokodil, amelyik éppen most ebben a teremben repked.

1.11. Minden piros krokodil, amelyik éppen most ebben a teremben repked, 17-nél nagyobb prímszám.

1.12. A teremben hallgatók ülnek, az asztalon nyalókák vannak. Ugyanazt jelenti-e a következő két mondat?

(a) Minden hallgatóhoz van olyan nyalóka, amelyiket szopogatott.

(b) Van olyan nyalóka, amelyiket minden hallgató szopogatott.

1.13. Tudjuk, hogy egy buliban minden fiú táncolt valamelyik lánnyal. Következik-e ebből, hogy minden lány táncolt valamelyik fiúval? Következik-e az eredeti állításból, hogy van olyan lány, aki minden fiúval táncolt?

1.14. Egy udvarban van 5 kecske és 20 bolha. Tudjuk, hogy van olyan kecske, amelyiket minden bolha megcsípett. Következik-e ebből, hogy van olyan bolha, amelyik minden kecskét megcsípett?

1.15. Két doboz tetején a következő feliratok láthatók:

1. *Ebben a dobozban egy tábla csoki van.*

2. *Ebben a dobozban nincs csoki.*

Van-e biztosan csoki valamelyik dobozban, és ha igen, melyikben, feltéve, hogy

(a) mindkét felirat igaz?

(b) mindkét felirat hamis?

(c) pontosan az egyik felirat igaz?

1.16. **Ha hull a hó, akkor Micimackó fázik.** Melyik mondat jelenti ugyanezt?

(a) Ha nem hull a hó, akkor Micimackó nem fázik.

(b) Ha Micimackó nem fázik, akkor nem hull a hó.

1.17. **Ha hull a hó, akkor Micimackó fázik.** Melyik mondat ennek a tagadása?

(a) Ha nem hull a hó, akkor Micimackó nem fázik.

(b) Ha Micimackó nem fázik, akkor nem hull a hó.

(c) Ha hull a hó, akkor Micimackó nem fázik.

(d) Ha nem hull a hó, akkor Micimackó fázik.

(e) Hull a hó, és Micimackó nem fázik.

Írjuk le a következő mondatok tagadását!

1.18. Minden medve szereti a mézet.

1.19. Minden tengerész ismer olyan kikötőt, ahol minden kocsmában járt.

1.20. Van olyan méz, amit nem minden medve szeret.

Tagadjuk a következő mondatokat!

1.21. Ha itt a nyár, akkor meleg az idő.

1.22. A medve télen alszik, az egyetemi hallgató nyáron.

1.23. Az ausztrál úszók azért olyan gyorsak, mert cápát alkalmaznak segédedzőnek.

1.24. Ha a nagynénikémnek kerekei lennének, akkor ő lenne a miskolci gyors.

1.25. Fogadjuk el igaznak a következő állításokat:

(a) Ha egy állat emlős, akkor vagy van farka, vagy van kopoltyúja.
(b) Egyik állatnak sincs farka.
(c) Minden állat vagy emlős, vagy van farka, vagy van kopoltyúja.

Következik-e ebből, hogy minden állatnak van kopoltyúja?

Tudjuk, hogy az (a_n) és (b_n) olyan sorozatok, hogy ha $a_n > 2520$, akkor $b_n > 2520$. Mire következtethetünk abból, hogy

1.26. $a_n > 2520$

1.27. $a_n \leq 2520$

Matematika országban a bíró csak a bizonyítékoknak hisz. Például, ha Flóra azt állítja, hogy van fekete oroszlán, akkor állításának helyességéről meggyőzheti a bírót azzal, ha mutat neki egy fekete oroszlánt.

1.28. Flóra azt állítja, hogy minden oroszlán fekete. Elég bizonyíték-e, ha mutat a bírónak egy fekete oroszlánt?

1.29. Flóra azt állítja, hogy minden oroszlán fekete, Gerzson pedig azt állítja, hogy Flóra téved. Hogyan bizonyíthatná Gerzson az állítását?

Vizsgáljuk meg az állításpárokat, hogy következik-e valamelyikből a másik!

1.30. **P:** $x^2 - x - 6 = 0$ **Q:** $x = 2$

1.31. **P:** $\sqrt{x^2 - 5} < 3$ **Q:** $x^2 - 5 < 9$

1.32. **P:** $x > 5$ **Q:** $x^2 > 25$

1.33. **P:** $x^2 - x - 6 > 0$ **Q:** $x > 2$

Matematika országban a bíró csak a bizonyítékoknak hisz. Például, ha Flóra azt állítja, hogy van fekete oroszlán, akkor állításának helyességéről meggyőzheti a bírót azzal, ha mutat neki egy fekete oroszlánt.

1.34. Flóra azt állítja, hogy minden $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvénynek, ha van minimuma, akkor a minimumhelye 1-nél nagyobb vagy a minimum érték pozitív. Igazat állít-e Flóra, vagy nem? Ha igazat állít, hogyan indokolhatja a bírónak? Ha nem igaz az állítása, milyen indoklással győzhetjük meg erről a bírót?

1.35. Gerzson azt állítja, hogy ha egy sorozatban az 5-nél nagyobb indexű tagok 10-nél nagyobbak, akkor $a_k = 200$ esetén $k > 10$. Igazat állít-e Gerzson, vagy nem? Ha igen, hogyan indokolhat a bírónak? Ha nem igaz az állítása, milyen indoklással győzhetjük meg erről a bírót?

1.36. Flóra azt állítja, hogy ha $\sin x > 0{,}5$, akkor $x > \pi/6$. Gerzson szerint Flóra állításának a tagadása igaz. Fogalmazzuk meg Gerzson állítását! Melyiküknek van igaza, és hogyan indokolhat a bírónak?

1.37. Gerzson azt állítja, hogy az x^2 függvény páros és az egész számegyenesen monoton. Igazat állít-e Gerzson? Ha igen, hogyan indokolhat a bírónak? Fogalmazzuk meg Gerzson állításának a tagadását!

1.38. Flóra azt állítja, hogy a $\log_2 x$ függvény szigorúan monoton nő vagy periodikus. Igazat állít-e Flóra?

1.39. Hány igaz állítás van a következő keretben?

1) A teremben repkedő piros krokodilok prímszámok.
2) Ha $x^2 = y^2$, akkor $x = y$
3) Ha $x = y$, akkor $\sin x = \sin y$.

1.40. Hány igaz állítás van a következő keretben?

1) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$
2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
3) Ebben a keretben pontosan 1 igaz állítás van.

1.41. Ebben a feladatban a Földet tökéletesen gömb alakúnak képzeljük. Ezen a gömb alakú Földön indult el egy kutató reggeli sétára. Először ment 1 km-t délre, majd 1 km-t keletre, végül 1 km-t északra, és így visszért arra pontra, ahonnan elindult. Honnan indulhatott el?

1.42. Egy kocsmáros 12 liter bort 4 liter vízzel akart keverni, de a bort tartalmazó 12 literes hordón kívül csak egy 2 literes és egy 8 literes edénye volt. Hogyan végezte el a keverést?

1.43. Négy embernek egy rozoga hídon kell átmennie sötétben egy zseblámpa segítségével. Egyszerre csak ketten tudnak átmenni és lámpa nélkül nem, tehát csak a „ketten átmennek, egy visszajön a lámpával" módszer lehetséges. Az emberek maximális sebessége különböző. Ha egyedül vannak, rendre 1, 2, 5 és 10 perc alatt érnek át. Két ember együtt a lassabbik sebességével tud haladni. Átjuthatnak-e a hídon valamennyien 30 perc alatt? Átjuthatnak-e 20 perc alatt? És 17 perc alatt? Vagy 15 perc alatt?

1.44. Egy 13 jegyű kódszámban bármely 3 szomszédos számjegy összege 11. A kód második jegye 6, a tizenkettedik jegy pedig 4. Mi a 13-adik jegy?

1.45. Kovács úr minden délután 5 órakor érkezik vonattal az állomásra, ahol a felesége várja kocsival, és azonnal hazaviszi. Egyik nap Kovács úr hamarabb végzett a munkájával, és korábbi vonatra szállt. Így 4 órakor érkezett az állomásra. Elindult gyalog hazafelé. A felesége a szokásos időben indult érte kocsival. Amikor az úton találkoztak, Kovács úr beült a kocsiba, és hazamentek. A szokásos időpontnál 10 perccel hamarabb érkeztek haza. Hány órakor ült be Kovács úr az autóba, ha feltételezzük, hogy a felesége mindig azonos és állandó sebességgel ment a kocsival?

1.46. Csélcsap Csaba egyszerre udvarolt Amáliának és Borókának. Amália a metró A, Boróka ugyanazon metróvonal B végállomásánál lakott. Csaba a véletlenszerű időpontban befejezett munka után lement a metróba, és mert mindkét lányt egyformán szerette, a metróra bízta a döntést. Amelyik metró először jött, arra szállt fel. A metrók mindkét irányban 10 percenként követték egymást. Egy idő után azt vette észre, hogy átlagosan 10 alkalomból 9-szer Amáliához ment, és csak egyszer Borókához. Hogyan lehetséges ez?

1.47. Egy börtönben az egyik rabnak felajánlják, hogy kiszabadulhat, ha a börtön kapuját egy megadott jel után pontosan 45 perccel nyitja ki. Órát viszont nem adnak neki, csak egy doboz gyufát, és két gyújtózsinórt. A gyújtózsinórokról azt lehet tudni, hogy mindkét gyújtózsinór pontosan 1 óra alatt ég végig, de a láng időben nem feltétlenül egyszerre és egyenletesen halad végig a zsinórokon. Hogyan tudja a rab a gyújtózsinórok segítségével pontosan kimérni a 45 percet?

1.48. Egy biológus egy 10m hosszú rúdra 100 hangyát rakott fel. Véletlenszerű volt, hogy melyik hangya a rúd melyik pontjára került, és az is véletlenszerű volt, hogy melyik hangya a rúd melyik vége fele nézett. A hangyák állandó, 1cm/s sebességgel haladtak mindaddig, amíg bele nem ütköztek egy másik hangyába. Akkor mindkét hangya megfordult, és 1cm/s sebességgel haladtak az ellenkező irányba a következő ütközésig, amikor is az ütköző hangyák megint megfordultak, és állandó, 1cm/s sebességgel haladtak tovább az ellenkező irányba a következő ütközésig, és így tovább. Ha egy hangya elért a rúd valamelyik széléhez, akkor leesett a rúdról. Bizonyítsuk be, hogy a kísérlet kezdete után 20 perccel már üres volt a rúd!

1.49. Válasszunk ki egy tetszőleges számot az alábbi négyzetben. Karikázzuk be, és a választott szám sorában és oszlopában lévő többi számot pedig húzzuk ki! Ezután a megmaradtak közül karikázzunk be egy újabb számot, és a választott szám sorában és oszlopában lévő többi számot pedig húzzuk ki! Folytassuk az eljárást, amíg lehet! A végén adjuk össze a bekarikázott számokat! Ismételjük meg az előző eljárást úgy, hogy másik számból indulunk ki! Mit tapasztalunk? Fejtsük meg a négyzet titkát!

	8	11	1	12	0	4	23
13	**21**	**24**	**14**	**25**	**13**	**17**	**36**
21	**29**	**32**	**22**	**33**	**21**	**25**	**44**
0	**8**	**11**	**1**	**12**	**0**	**4**	**23**
2	**10**	**13**	**3**	**14**	**2**	**6**	**25**
10	**18**	**21**	**11**	**22**	**10**	**14**	**33**
8	**16**	**19**	**9**	**20**	**8**	**12**	**31**
7	**15**	**18**	**8**	**19**	**7**	**11**	**30**

Egy vándor a sivatag szélén egy őrbódéhoz érkezett. Az őrbódétól két út indult tovább. Az egyik út a sivatag közepébe vezetett, ahonnan még senki nem jött vissza. A másik út egy oázishoz vitt. Az őrbódéban különböző őrök lehetnek. Lehet igazmondó, aki mindig igazat mond, lehet hazudós, aki mindig hazudik, és lehet szeszélyes, aki hol igazat mond, hol hazudik. A vándor eldöntendő kérdéseket tehet fel az őröknek, az őrök csak „igen”-nel vagy „nem”-mel felelhetnek. Milyen kérdéssel, illetve kérdésekkel tud a vándor biztosan eljutni az oázisba?

1.50. A bódéban két őr van, az egyik igazmondó, a másik hazug, és a vándor egy kérdést tehet fel.

1.51. A bódéban egy őr van, aki vagy igazmondó vagy hazug (nem tudjuk, melyik), és a vándor egy kérdést tehet fel.

1.52. A bódéban három őr van, egy igazmondó, egy hazug és egy szeszélyes, és a vándor két kérdést tehet fel.

1.53. A bódéban négy őr van, két igazmondó és két szeszélyes, és a vándor akárhány kérdést feltehet.

1.54. Oldjuk meg az előző feladatokat úgy, hogy az őrök ugyan értik a kérdést, de a vándor által nem ismert saját nyelvükön felelnek: csak „ukk” vagy „mukk” lehet a válaszuk, ahol a két válasz közül az egyik igent, a másik pedig nemet jelent.

Valós számok

2.1. Racionális és irracionális számok

2.1. Definíció: Azokat a valós számokat, amelyeket felírhatunk két egész szám hányadosaként **racionális** számoknak nevezzük.
A racionális számok halmazát $\mathbb{Q}$-val jelöljük.

Példák racionális számokra: $2, -1, 0, \frac{1}{2}, -\frac{3}{4}$

2.2. Tétel: Két racionális szám összege, különbsége, szorzata, és ha a nevező nem 0, akkor a hányadosa is racionális.
Bizonyítás: Legyenek $m \neq 0, n, k, l \neq 0$ egész számok. Ekkor

$$\frac{n}{m} + \frac{k}{l} = \frac{nl + km}{ml}, \qquad \frac{n}{m} - \frac{k}{l} = \frac{nl - km}{ml}, \qquad \frac{n}{m} \cdot \frac{k}{l} = \frac{nk}{ml}.$$

Ha $k \neq 0$, akkor

$$\frac{\frac{n}{m}}{\frac{k}{l}} = \frac{nl}{mk}.$$

2.3. Definíció: Azokat a valós számokat, amelyeket nem írhatunk fel két egész szám hányadosaként **irracionális** számoknak nevezzük.

2.4. Tétel: $\sqrt{2}$ irracionális.
Bizonyítás indirekt módon: (ld. Indirekt bizonyítás)
Tegyük fel, hogy $\sqrt{2}$ racionális, azaz vannak olyan n és m egész számok, amelyekre igaz, hogy $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Egyszerűsítsük az $\frac{m}{n}$ törtet úgy, hogy az eredmény számlálója és nevezője már relatív prímek legyenek: $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, ahol p és q legnagyobb közös osztója 1.

Az indirekt feltevés miatt $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Ebből $2 = \frac{p^2}{q^2}$, vagyis $2q^2 = p^2$. Ez csak úgy teljesülhet, ha p páros, legyen $p = 2k$. Ekkor $2q^2 = (2k)^2 = 4k^2$, vagyis $q^2 = 2k^2$. Ez csak úgy teljesülhet, ha q is páros. Így viszont q is páros, és p is páros, ami ellentmond annak, hogy p és q relatív prímek.
Ellentmondásra jutottunk, ezért $\sqrt{2}$ irracionális.

Példák irracionális számokra: $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{3}$

2.5. Tétel: Végtelen sok irracionális szám van.

Bizonyítás: Ha $n \neq 0$ egész szám, akkor $n\sqrt{2}$ irracionális. Tegyük fel indirekt, hogy $n\sqrt{2} = \frac{k}{l}$, ahol k és l egész számok. Ekkor $\sqrt{2} = \frac{k}{nl}$, tehát $\sqrt{2}$ racionális lenne, ami ellentmond az előző tételnek.

Megjegyzés: Nem csak az $n\sqrt{2}$ alakú számok irracionálisak, ezeken kívül is még végtelen sok irracionális szám van.
Minden valós szám vagy racionális vagy irracionális szám.

Jelölések:

— $\mathbb{R}$, **a valós számok halmaza.**

— $\mathbb{Q}$, **a racionális számok halmaza.**

— $\mathbb{Z}$, **az egész számok halmaza.**

— $\mathbb{N}^+$, **a természetes számok halmaza (analízisben ez a pozitív egészek halmaza).**

— $\mathbb{N}$, **a nemnegatív egész számok halmaza.**

2.2. Egyenlőtlenségek: tulajdonságok, algebrai megoldások

Az analízis feladatok megoldása közben nagyon gyakran kell egyenlőtlenségeket megoldani. Ezért (is) fontos, hogy tudjuk az egyenlőtlenségek tulajdonságait, hogy ne kövessünk el hibákat a megoldás során, és az is, hogy könnyen és gyorsan tudjunk egyenlőtlenségeket megoldani. A technikát sok gyakorlással lehet elsajátítani, a hibák elkerülésében pedig segít a grafikus megoldás.

Helyes lépések egyenlőtlenségek megoldása közben:

— Nem változik az egyenlőtlenségjel iránya, ha az egyenlőtlenség mindkét oldalához ugyanazt a számot hozzáadjuk: ha $a < b$, akkor $a + c < b + c$.

— Nem változik az egyenlőtlenségjel iránya, ha az egyenlőtlenség mindkét oldalából ugyanazt a számot kivonjuk: ha $a < b$, akkor $a - c < b - c$.

— Nem változik az egyenlőtlenségjel iránya, ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát ugyanazzal a **pozitív** számmal megszorozzuk vagy elosztjuk: ha $a < b$, és $c > 0$, akkor $ac < bc$ és $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

— Nem változik az egyenlőtlenségjel iránya, ha az egyenlőtlenség **mindkét oldala nagyobb vagy egyenlő, mint 0**, és mindkét oldalt négyzetre emeljük.

— Megfordul az egyenlőtlenségjel iránya, ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát ugyanazzal a **negatív** számmal megszorozzuk vagy elosztjuk: ha $a < b$, és $c < 0$, akkor $ac > bc$ és $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

— Megfordul az egyenlőtlenségjel iránya, ha az egyenlőtlenség **mindkét oldala pozitív**, és vesszük mindkét oldal reciprokát.

Ha a fenti állításokban szereplő feltételek nem teljesülnek, akkor a fenti állítások már nem maradnak érvényben. Ha a feltételek nem teljesülnek, az egyenlőtlenségjel iránya bizonyos esetekben megváltozik, más esetekben nem.

Példák:

$$-2 < 5 \text{ és } (-2)^2 < 5^2, \text{ de } -7 < 5 \text{ és } (-7)^2 > 5^2$$

$$-2 < 2 \text{ és } \frac{1}{-2} < \frac{1}{2}, \text{ de } -2 < -1 \text{ és } \frac{1}{-2} > \frac{1}{-1}$$

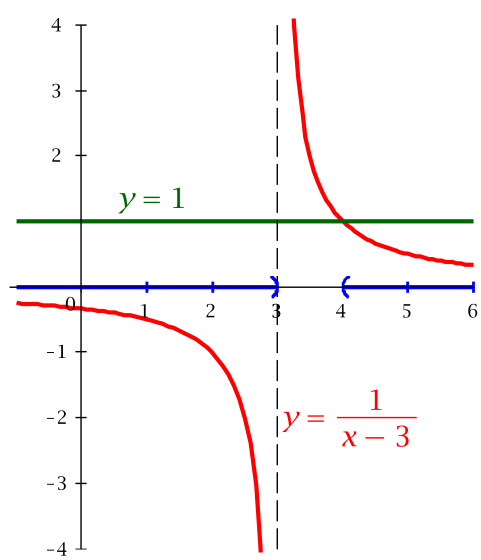
Fontos: Különösen figyeljünk a megoldások közben olyankor, amikor nem tudhatjuk az egyenlőtlenség oldalain szereplő kifejezések előjelét, vagy ha nem tudhatjuk annak a kifejezésnek az előjelét, amelyikkel az egyenlőtlenség mindkét oldalát szorozzuk. Ilyenkor segíthet az esetszétválasztás, vagy olyan megoldási technika alkalmazása, amikor az előjeleknek nincs szerepük.

Példák:

— Oldjuk meg az $\frac{1}{x-3} < 1$ egyenlőtlenséget!

Ha mindkét oldalból kivonunk 1-et, közös nevezőre hozás után a $\frac{4-x}{x-3} < 0$ egyenlőtlenséget kapjuk. Tudjuk, hogy egy tört értéke pontosan akkor negatív, ha a számláló és a nevező előjele különböző. Ezt felhasználva a megoldás: $x < 3$ vagy $x > 4$.

A megoldást grafikusan is ellenőrizhetjük.

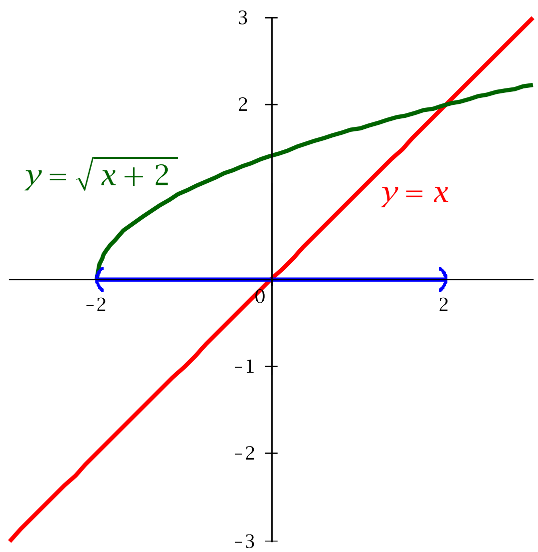


$$\frac{1}{x-3} < 1$$

— Oldjuk meg az $x < \sqrt{x+2}$ egyenlőtlenséget!

Az egyenlőtlenség értelmezési tartománya az $x \geq -2$ halmaz. Mivel $\sqrt{x+2} \geq 0$, ezért, ha $-2 \leq x < 0$, akkor az egyenlőtlenség biztosan teljesül. Ha $x \geq 0$, akkor az egyenlőtlenség mindkét oldalát négyzetre emelhetjük: $x^2 < x+2$. A másodfokú egyenlőtlenség megoldása: $-1 < x < 2$, de a négyzetre emelést az $x \geq 0$ feltétel mellett végeztük el, így ennek az esetnek a megoldása: $0 \leq x < 2$. A két eset együttes megoldása: $-2 \leq x < 2$.

A megoldást grafikusan is ellenőrizhetjük.



$\boldsymbol{x < \sqrt{x+2}}$

2.3. Nevezetes közepek, egyenlőtlenségek a közepek között

A matematikában többféle átlagot, közepet definiálunk.

2.6. Definíció: Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok **számtani** vagy **aritmetikai közepe**

$$A(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

2.7. Definíció: Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nemnegatív számok **mértani** vagy **geometriai közepe**

$$G(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

2.8. Definíció: Az $a_1, a_2, \ldots a_n$ nem 0 számok **harmonikus közepe**

$$H(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}}.$$

2.9. Definíció: Az $a_1, a_2, \dots a_n$ számok **négyzetes** vagy **kvadratikus közepe**

$$Q(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

Most csak az $n = 2$ esetben, azaz két szám esetén hasonlítjuk össze a számokat és a közepeket.

2.10. Tétel: Ha $a < b$, akkor $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Bizonyítás: Ha $a < b$, akkor $a + a < a + b$, amiből $a < \frac{a+b}{2}$. Ugyanígy, ha $a < b$, akkor $a + b < b + b$, amiből $\frac{a+b}{2} < b$.

A tétel szerint, ha veszünk két valós számot, legyenek ezek $a < b$, akkor az $\frac{a+b}{2}$ számtani középük mindig közéjük esik. Ezért **nincsenek szomszédos valós számok**.

2.11. Tétel: Ha $0 < a < b$, akkor $a < \sqrt{ab} < b$.
Bizonyítás: Ha $0 < a < b$, akkor $a \cdot a < a \cdot b$, amiből $a < \sqrt{ab}$. Ugyanígy, ha $0 < a < b$, akkor $a \cdot b < b \cdot b$, amiből $\sqrt{ab} < b$.

Ha a és b pozitív számok, akkor mind a négy közepet értelmezhetjük. Ebben az esetben teljesül a következő tétel:

2.12. Tétel: **A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség.** Ha $0 < a \le b$, akkor $A(a, b) \ge G(a, b)$, és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a = b$.
Bizonyítás: (ld. Direkt bizonyítás) Tudjuk, hogy $(a - b)^2 \ge 0$, és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a = b$. Mivel $(a - b)^2 \ge 0$, ezért $a^2 + b^2 \ge 2ab$, vagyis $a^2 + 2ab + b^2 \ge 4ab$, tehát $(a + b)^2 \ge \left(2\sqrt{ab}\right)^2$, amiből $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$, és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a = b$.

2.13. Tétel: **Egyenlőtlenségek a nevezetes közepek között.** Ha $0 < a \le b$, akkor $H(a, b) \le G(a, b) \le A(a, b) \le Q(a, b)$, és az egyenlőségek pontosan akkor teljesülnek, ha $a = b$.
Bizonyítás:

— Az első egyenlőtlenség bizonyításához alkalmazzuk a **már bizonyított** számtani-mértani közép egyenlőtlenséget az $\frac{1}{a}$ és $\frac{1}{b}$ számokra!

Így $\frac{1/a + 1/b}{2} \ge \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}}$, amiből mindkét oldal reciprokát véve $\frac{2}{1/a + 1/b} \le \sqrt{ab}$.

— A számtani-mértani közép egyenlőtlenséget már bizonyítottuk.

— A harmadik egyenlőtlenség bizonyításához induljunk ki az $(a - b)^2 \ge 0$ egyenlőtlenségből, ahol az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a = b$. Az előbbi egyenlőtlenségből következik, hogy $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \le \frac{a^2 + b^2}{2}$, amiből $\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

Most nem bizonyítjuk, de több tagra is igaz az előző tétel:

2.14. Tétel: Egyenlőtlenségek a nevezetes közepek között:
Ha $0 < a_1, a_2, \ldots, a_n$, akkor $H(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq G(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq A(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq Q(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, és az egyenlőségek pontosan akkor teljesülnek, ha bármelyik i és j esetén $a_i = a_j$.

2.4. Szélsőértékek megkeresése a nevezetes közepek segítségével

A nevezetes közepek közötti egyenlőtlenségek segítségével sok esetben meghatározhatjuk függvények szélsőértékeit.

Példák:

— Határozzuk meg az $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + 1 + x^2$ függvény minimumát!

Megoldás:

Legyen $a = \dfrac{1}{1+x^2}$ és $b = 1 + x^2$. Ekkor $a > 0$ és $b > 0$. Alkalmazzuk a-ra és b-re a számtani-mértani közép egyenlőtlenséget!

$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, azaz $\dfrac{\frac{1}{1+x^2} + 1 + x^2}{2} \geq \sqrt{\dfrac{1}{1+x^2} \cdot (1+x^2)} = 1$. Tehát $f(x) \geq 2$, és az egyenlőség teljesül, ha $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 + x^2$, amiből $x = 0$.

— Mennyi a $K = 400$ hosszúságegység kerületű téglalapok területének a maximuma? Határozzuk meg a maximális területtel rendelkező téglalap oldalainak hosszát!

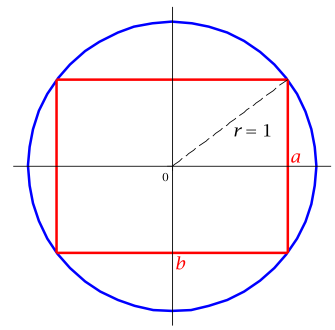
Megoldás:

Jelöljük a téglalap oldalait a-val és b-vel. Ekkor $K = 2a + 2b = 400$, amiből $a + b = 200$. A téglalap területe $T = ab$. A a számtani-mértani közép egyenlőtlenségből $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$, vagyis $T = ab \leq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 = 100^2 = 10000$. Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a = b$, vagyis $a = b = 100$. Tehát a négyzet területe maximális, és a maximális terület értéke 10000 területegység.

— Mennyi az $r = 1$ hosszúságegység sugarú körbe írható téglalapok területének a maximuma? Határozzuk meg a maximális területtel rendelkező téglalap oldalainak hosszát!

Megoldás:

Jelöljük a téglalap oldalait a-val és b-vel. A Pitagorasz-tétel szerint $a^2 + b^2 = (2r)^2$, tehát $a^2 + b^2 = 4$, így $\frac{a^2+b^2}{2} = 2$. A téglalap területe $T = ab$. A nevezetes közepek közötti egyenlőtlenség szerint $G(a,b) \le Q(a,b)$, és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a = b$. Tehát $\sqrt{ab} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \sqrt{2}$. Így $T = ab \le 2$, és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a = b$. Mivel $a = b$, és $a^2 + b^2 = 4$, ezért $a = b = \sqrt{2}$. (Ld. még Megoldás másodfokú függvény segítségével.)



— Bizonyítsuk be, hogy ha $a > 0$, akkor $a + \frac{1}{a} \ge 2$.

Megoldás:

Alkalmazzuk a-ra és $\frac{1}{a}$-ra a számtani-mértani közép egyenlőtlenséget! Ekkor $\frac{a+1/a}{2} \ge \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 1$. Ebből $a + \frac{1}{a} \ge 2$.

2.5. Becslések

Az analízisben gyakran lesz szükség **becslésekre**. A **becslési technikát** egy egyszerű példán keresztül mutatjuk be.

Példa: Adjunk meg olyan A számot, amelyikre teljesül, hogy ha $a > A$, akkor

$$5a^7 + 2a^4 + 3a + 10 > 100.$$

FONTOS: Az előző feladat nem azonos azzal a feladattal hogy „Oldjuk meg az

$$5a^7 + 2a^4 + 3a + 10 > 100$$

egyenlőtlenséget!" Ez utóbbi feladatban az **összes** olyan a számot keressük, amely kielégíti az egyenlőtlenséget. Az eredeti feladatban nem kérdezzük az összes megoldást, csak olyan A számot keresünk (**ilyen A-ból több is van**), amelyik esetén biztosak lehetünk abban, hogy ha $a > A$, akkor az egyenlőtlenség teljesül. Az nem érdekel minket, hogy $a \le A$ esetén teljesül-e vagy sem az egyenlőtlenség. Mivel az eredeti feladat **nem** egy egyenlőtlenség megoldáshalmazának a megkeresése, nem is azzal a módszerrel célszerű dolgozni, amelyikkel az egyenlőtlenségek megoldásakor szoktunk. Az eredeti feladat megoldásához **becsléseket** írunk fel.

Megoldás:

Ha $a > 0$, akkor az $5a^7 + 2a^4 + 3a + 10$ kifejezés monoton nő, vagyis nagyobb a helyeken nagyobb értékeket vesz fel. Sőt, ha $a > 1$, akkor még azt is tudjuk, hogy

$$a^7 > a^6 > a^5 > a^4 > a^3 > a^2 > a > 1.$$

Ezért 1-nél nagyobb A számot keresünk, mert ekkor ha $a > A$, akkor $a > 1$ is teljesül. Azért tehetjük meg, hogy eleve 1-nél nagyobb A számot keresünk, mert **nem kell a legkisebb „jó" *A*-t** megkeresnünk, ha egyáltalán van a „jó" A-k között legkisebb.
Tehát, ha $a > 1$, akkor $5a^7 + 2a^4 + 3a + 10 > 5a + 2a + 3a + 10 = 10a + 10$. Ez azt jelenti, hogy ha $10a + 10 > 100$, azaz $a > 9$, akkor $5a^7 + 2a^4 + 3a + 10 > 100$. Tehát $A = 9$ megoldása a feladatnak. (Sőt, a feladatnak minden 9-nél nagyobb A szám megoldása lesz.)
Megjegyzések:

— Az nem derül ki az előző megoldásból, hogy van-e a feladatnak 9-nél kisebb megoldása, de ez minket nem is érdekel. **Nem a legkisebb megoldást keressük.**

— A megoldás során nem az $5a^7 + 2a^4 + 3a + 10 > 100$ egyenlőtlenséget oldottuk meg. Nem is tudtuk volna megoldani. A **becsléssel** addig egyszerűsítettük a kifejezést, amíg egy könnyen megoldható egyenlőtlenséghez ($10a + 10 > 100$) jutottunk.

Egy kicsit bonyolultabb **példa:**
Adjunk meg olyan A számot, amelyikre teljesül, hogy ha $a > A$, akkor $a^7 - 2a + 10 > 100$.
Megoldás:
Itt nem célravezető a^7-t alulról becsülni a-val, mert akkor az $a^7 - 2a + 10 > a - 2a + 10 = -a + 10$ kifejezéshez jutunk, de erre nem igaz, hogy valamilyen számnál nagyobb a-k esetén nagyobb, mint 100. Tehát a becslés még jó, de nem segít a feladat megoldásában. Ilyenkor kicsit másképpen becslünk. Fel fogjuk használni, hogy ha $a > 4$, akkor $2a < \frac{a^2}{2}$.

$$a^7 - 2a + 10 > a^2 - 2a + 10 > a^2 - \frac{a^2}{2} + 10 = \frac{a^2}{2} + 10 > 100,$$

biztosan teljesül, ha $a > 20$. Tehát $A = 20$ jó megoldás.

Megjegyzések:

— A becslésben a második egyenlőtlenség csak akkor teljesül, ha $a > 4$. Ebben az esetben azért teljesül az egyenlőtlenség, mert $A^7 + 10$-ből $2a$-nál többet vonunk ki, így a különbség kisebb lesz.

— Mivel az eredmény $A = 10$ lett, $a > A = 10$, tehát $a > 4$ is teljesül, ezért a becslés minden egyenlőtlensége igaz.

További **példák:**

— Adjunk meg olyan A számot, amelyikre teljesül, hogy ha $a > A$, akkor $6a^7 + 4a^4 > 100a^2$.

Megoldás: Ha $a > 1$, akkor $6a^7 + 4a^4 > 6a^4 + 4a^4 = 10a^4 > 100a^2$ biztosan igaz, ha $a > 4$. Tehát $A = 4$ jó megoldás.

Megjegyzések:

— Az, hogy $a \leq 4$ esetén igaz-e az egyenlőtlenség, az ebben a feladatban érdektelen.

— Minden 4-nél nagyobb A szám is jó megoldás.

— Adjunk meg olyan A számot, amelyikre teljesül, hogy ha $a > A$, akkor $\dfrac{1}{1+a^2+a^8} < \dfrac{1}{100}$.

Megoldás: $\dfrac{1}{1+a^2+a^8} < \dfrac{1}{a^2} < \dfrac{1}{100}$ biztosan igaz, ha $a > 10$, tehát $A = 10$ jó megoldás.

— Adjunk meg olyan A számot, amelyikre teljesül, hogy ha $a > A$, akkor $\left|1 - \dfrac{a^4+2}{a^4+7}\right| < \dfrac{1}{100}$.

Megoldás:

$$\left|1 - \frac{a^4+2}{a^4+7}\right| = \left|\frac{a^4+7-a^4-2}{a^4+7}\right| = \left|\frac{5}{a^4+7}\right| = \frac{5}{a^4+7} < \frac{5}{a^4} < \frac{1}{100}$$

biztosan igaz, ha $a > 5$, tehát $A = 5$ jó megoldás.

Eddig a megoldásoknál lényegében csak az $a^n \quad (n \in \mathbb{N}^+)$ monotonitását használtuk fel. További becslést írhatunk fel a **binomiális tétel** felhasználásával.

2.15. Tétel: Binomiális tétel:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Másképpen írva

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + nab^{n-1} + b^n.$$

Ha $a = 1$, akkor $(1+b)^n = 1 + nb + \dfrac{n(n-1)}{2}b^2 + \cdots + nb^{n-1} + b^n$.
Ha $b > 0$, akkor az előző kifejezés mindegyik tagja pozitív, tehát $n > 1$ esetén a kifejezés szigorúan csökken amikor (pozitív) tagokat elhagyunk:
$(1+b)^n = 1 + nb + \dfrac{n(n-1)}{2}b^2 + \cdots + nb^{n-1} + b^n > 1 + nb$.
Tehát **pozitív** b esetén $(1+b)^n \geq 1 + nb$, ahol $n \in \mathbb{N}^+$), és ha $n > 1$, akkor $(1+b)^n > 1 + nb$.

Példák:

— Bizonyítsuk be, hogy $2^n > n \quad (n \in \mathbb{N}^+)$.

Megoldás: Legyen $b = 1 > 0$ (a tétel feltételét mindig ellenőrizni kell), és alkalmazzuk az előző tételben szereplő egyenlőtlenséget: $(1+1)^n \geq 1 + n \cdot 1 > n$.

— Adjunk meg olyan N számot, amelyikre teljesül, hogy ha $n > N$, akkor $1{,}1^n > 100$.

Megoldás: Legyen $b = 0{,}1 > 0$, (a tétel feltételét mindig ellenőrizni kell),és alkalmazzuk az előző tételben szereplő egyenlőtlenséget: $1{,}1^n = (1+0{,}1)^n > 1 + 0{,}1n > 0{,}1n > 100$ biztosan igaz, ha $n > 1000$, tehát $A = 1000$ jó megoldás.

Megjegyzés: Az állítás, miszerint **pozitív** b esetén $(1+b)^n \geq 1 + nb$, ahol $n \in \mathbb{N}^+$), a **Bernoulli-egyenlőtlenség** leszűkítése arra az esetre, amikor $b > 0$.

2.16. Tétel: **Bernoulli-egyenlőtlenség:** $(1+b)^n \geq 1 + nb$, ha $n \in \mathbb{N}$ és $b > -1$. Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $b = 0$ vagy $n = 0$ vagy $n = 1$.

A Bernoulli-egyenlőtlenséget most nem, de a következő félévben bizonyítjuk.

2.6. Feladatok

2.1. Bizonyítsuk be, hogy két racionális szám összege racionális!

2.2. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{2}$ irracionális!

2.3. Bizonyítsuk be, hogy

(a) $3+\sqrt{2}$ **(b)** $3\sqrt{2}$

irracionális!

Bizonyítsuk be, hogy a következő számok irracionálisak!

2.4. $\sqrt{3}$ **2.5.** $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ **2.6.** $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ **2.7.** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

2.8. Lehet-e

(a) két irracionális szám összege racionális?

(b) két racionális szám hányadosa irracionális?

2.9. Igaz-e, hogy egy racionális és egy irracionális szám összege irracionális?

2.10. Lehet-e két irracionális szám hányadosa racionális?

2.11. Igaz-e, hogy egy racionális és egy irracionális szám szorzata irracionális?

Igaz-e, hogy ha

2.12. $a \notin \mathbb{Q}$ és $b \in \mathbb{Q}$, akkor $a+b \notin \mathbb{Q}$?

2.13. $a+b \notin \mathbb{Q}$, akkor az a és b számok közül az egyik racionális, a másik irracionális?

2.14. Oldjuk meg a $\sqrt{x-2}+\sqrt{9x+10}+\sqrt{7-2x}=0$ egyenletet a valós számok halmazán!

Oldjuk meg algebrai úton és grafikusan is a következő egyenlőtlenségeket!

2.15. $\dfrac{2}{x+2} \geq 1$

2.16. $\sqrt{x+3} - 1 > 1$

2.17. $\left|3 - \dfrac{6}{x}\right| < 7$

2.18. $-x^2 - x + 6 < 0$

2.19. Oldjuk meg a következő két feladatot!

(a) Oldjuk meg az $y^2 > 25$ egyenlőtlenséget!

(b) Keressünk meg azokat az y értékeket, amelyekre igaz az, hogy ha $x > y$, akkor $x^2 > 25$.

Azonos-e a két feladat megoldáshalmaza? Megoldása-e az (a), illetve a (b) feladatnak az $y = -7$? Ekvivalens-e az (a) és a (b) feladat?

2.20. Oldjuk meg a következő két feladatot!

(a) Oldjuk meg az $\dfrac{1}{y^2} < \dfrac{1}{100}$ egyenlőtlenséget!

(b) Keressünk meg azokat az Y értékeket, amelyekre igaz az, hogy ha $y < Y$, akkor $\dfrac{1}{y^2} < \dfrac{1}{100}$.

Azonos-e a két feladat megoldáshalmaza? Megoldása-e az (a), illetve a (b) feladatnak az $Y = 17$? Ekvivalens-e az (a) és a (b) feladat?

2.21. Van-e olyan x_0 szám, amelyre teljesül, hogy ha $x > x_0$, akkor $[x] > 1000$? Ha van, mutassunk ilyen számot! Hány ilyen számot tudunk mutatni?

2.22. Van-e olyan $x_0 > 0$ szám, amelyre teljesül, hogy ha $x > x_0$, akkor $\dfrac{1}{[x]} < \dfrac{1}{1000}$? Ha van, mutassunk ilyen számot! Hány ilyen számot tudunk mutatni?

2.23. Van-e olyan x_0 szám, amelyre teljesül, hogy ha $x > x_0$, akkor $\{x\} < \dfrac{1}{1000}$? Ha van, mutassunk ilyen számot! Hány ilyen számot tudunk mutatni?

2.24. Adjunk meg olyan $\delta > 0$ számot, amelyre igaz, hogy ha $0 < |x| < \delta$, akkor $\dfrac{1}{x^2} > 1000$. Hány megoldása van a feladatnak?

2.25. Adjunk meg olyan K számot, amelyre igaz, hogy ha $x > K$, akkor $\dfrac{1}{\sqrt{x}} < \dfrac{1}{1000}$. Hány megoldása van a feladatnak?

2.26. Adjunk meg olyan K számot, amelyre igaz, hogy ha $x > K$, akkor $x^5+4x^3+2x^2+1 > 1000$. Hány megoldása van a feladatnak?

2.27. Bizonyítsuk be, hogy ha $0 \leq a \leq b$, akkor az a és b számok A számtani és G mértani középére teljesül, hogy $a \leq A \leq b$ és $a \leq G \leq b$.

2.28. Bizonyítsuk be, hogy nincsenek szomszédos valós számok, azaz bármely két (különböző) valós szám között van (mindkettőtől különböző) valós szám.

2.29. Írjuk fel az a, b pozitív számok A számtani és G mértani közepét! Bizonyítsuk be a $G \leq A$ egyenlőtlenséget! Mikor teljesül az egyenlőség?

2.30. Határozzuk meg az $f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x(1-x)$ függvény maximumát!

2.31. Adjunk meg olyan K számot, amelyre igaz, hogy ha $x > K$, akkor

$$\frac{1}{x^5 + 4x^3 + 2x^2 + 1} < \frac{1}{1000}.$$

Hány megoldása van a feladatnak?

2.32. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív x, y valós számra igaz, hogy

$$\sqrt{xy} \geq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}.$$

Mikor teljesül az egyenlőség?

2.33. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív x, y valós számra igaz, hogy

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \frac{x+y}{2}.$$

Mikor teljesül az egyenlőség?

2.34. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges pozitív x szám esetén $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

2.35. Határozzuk meg az $f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x(1-x)$ függvény maximumát!

2.36. Legyen egy téglalap két éle a és b, átlója pedig c. Ekkor a téglalap területe $T = ab$, és a téglalap kerülete $K = 2(a+b)$.

Tehát $$\frac{T}{\frac{K}{2}} = \frac{ab}{\frac{2(a+b)}{2}}.$$

Így $$\frac{2T}{K} - \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{ab}{a+b} - \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

Mivel $0 < a < c$, ezért $$a\left(\frac{2T}{K} - \frac{c}{\sqrt{2}}\right) < c\left(\frac{ab}{a+b} - \frac{c}{\sqrt{2}}\right).$$

Beszorzás után: $$\frac{2Ta}{K} - \frac{ac}{\sqrt{2}} < \frac{abc}{a+b} - \frac{c^2}{\sqrt{2}}.$$

T és K helyébe írjunk ab-t és $2(a+b)$-t: $$\frac{2a^2b}{2(a+b)} - \frac{ac}{\sqrt{2}} < \frac{abc}{a+b} - \frac{c^2}{\sqrt{2}}.$$

Rendezés után: $$\frac{2a^2b}{2(a+b)} - \frac{abc}{a+b} < \frac{ac}{\sqrt{2}} - \frac{c^2}{\sqrt{2}}.$$

Kiemelés után: $$\frac{ab}{a+b}(a-c) < \frac{c}{\sqrt{2}}(a-c).$$

Osztunk $(a-c)$-vel, de $a < c$, így $a - c < 0$ $$\frac{ab}{a+b} > \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

Négyzet esetén $b = a$ és $c = a\sqrt{2}$. $$\frac{a^2}{2a} > \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

Egyszerűsítés és rendezés után: $1 > 2$.

Hol a hiba?

2.37. Határozzuk meg az $f(x) = x^2 + 1 + \dfrac{1}{x^2+1}$ függvény minimumát!

2.38. Határozzuk meg az $f(x) = x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2+1}$ függvény minimumát!

2.39. Határozzuk meg az $f(x) = x^2 + 3 + \dfrac{1}{x^2+2}$ függvény minimumát!

2.40. Az x, y számok kielégítik az $x^2 + y^2 = 1$ feltételt. Határozzuk meg a $2x + 3y$ kifejezés lehetséges legnagyobb és legkisebb értékét! (Pósa Lajos: Matematika Összefoglalás 447. feladat)

2.41. Adott kerületű derékszögű háromszögek közül határozzuk meg a legnagyobb területűt!

2.42. A K kerületű téglalapok közül melyiknek a legnagyobb a területe?

2.43. A T területű téglalapok közül melyiknek a legkisebb a kerülete?

2.44. Az $y = x^2$ egyenletű parabola melyik pontja van legközelebb az $A(0, 1)$ ponthoz? (Pósa Lajos: Matematika összefoglalás 202. feladat.)

2.45. A $10y = x^2$ egyenletű parabola melyik pontja van legközelebb az $A(0, 1)$ ponthoz? (Pósa Lajos: Matematika összefoglalás 203. feladat.)

2.46. Két szám összege egy adott B értékkel egyenlő. Mikor minimális a két szám

(a) négyzetének, **(b)** köbének

az összege? (Pósa Lajos: Matematika összefoglalás 198. feladat.)

2.47. Adott K hosszúságú kerítéssel egy téglalap alakú telket akarunk bekeríteni úgy, hogy kerítést csak a téglalap három oldalára kell építenünk, mert a negyedik oldalt egy folyó határolja. Mekkora a lehető legnagyobb terület, amit így bekeríthetünk? Mekkorák lesznek ebben az esetben a téglalap oldalai?

2.48. Egy négyzet alakú kartonlap oldala a. A kartonból felül nyitott dobozt készítünk úgy, hogy a négy csúcsnál kivágunk egy-egy x oldalú négyzetet, és a lap széleit felhajlítjuk. Legfeljebb mekkora lehet az így kapott doboz térfogata? Határozzuk meg x értékét a maximális térfogat esetén!

Legyen $H = \{x : 0 < x \leq 2\}$ és $K = \{y : 1 \leq y < 2\}$. Melyik állítás igaz, és melyik hamis?

2.49. Minden H-beli x elemhez van olyan $y \in K$, amelyikre igaz, hogy $x < y$.

2.50. Minden H-beli x_1 elemhez van olyan $x_2 \in H$, amelyikre igaz, hogy $x_1 > x_2$.

2.51. Minden K-beli y elemhez van olyan $x \in H$, amelyikre igaz, hogy $x < y$.

2.52. Van olyan H-beli x elem, hogy minden $y \in K$ esetén igaz, hogy $x > y$.

2.53. Fogalmazzuk meg az előző négy feladat (2.49....2.52.) állításainak a tagadását ! A tagadások közül melyik állítás igaz, és melyik hamis?

Legyen $H = \{x : 0 < x \leq 2\}$ és $K = \{y : 1 \leq y < 2\}$. Melyik állítás igaz, és melyik hamis?

2.54. Minden H-beli x elemhez van olyan $y \in K$, amelyikre igaz, hogy $x > y$.

2.55. Minden K-beli y elemhez van olyan $x \in H$, amelyikre igaz, hogy $x > y$.

2.56. Van olyan H-beli x elem, hogy minden $y \in K$ esetén igaz, hogy $x < y$.

2.57. Van olyan K-beli y_1 elem, hogy minden $y_2 \in K$ esetén igaz, hogy $y_1 > y_2$.

2.58. Fogalmazzuk meg az előző négy feladat (2.54....2.57.) állításainak a tagadását! A tagadások közül melyik állítás igaz, és melyik hamis?

Függvények

3.1. A függvény fogalma

Ha az A halmaz **minden** eleméhez hozzárendelünk egy elemet a B halmazból, akkor függvényről beszélünk. Az A halmaz a **függvény értelmezési tartománya**. A **függvény értékkészlete** a B halmaz azon részhalmaza, amelynek elemeit hozzárendeltük az A halmaz elemeihez.
Ha A és B a valós számok részhalmazai, akkor **valós függvényről** beszélünk. A továbbiakban csak valós függvényekkel foglalkozunk.
Fontos: Az értelmezési tartomány minden eleméhez 1, azaz **EGY** elemet rendelünk hozzá. Az értékkészlet bármelyik elemét viszont több elemhez is hozzárendelhetjük.
Jelölés: Az f függvény értelmezési tartományát D_f-fel vagy $D(f)$-fel, az értékkészletét R_f-fel vagy $R(f)$-fel jelöljük.

Példák:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

Értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$
Értékkészlet: a nemnegatív valós számok halmaza.

$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{x^2}$$

Értelmezési tartomány: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
Értékkészlet: a pozitív valós számok halmaza.

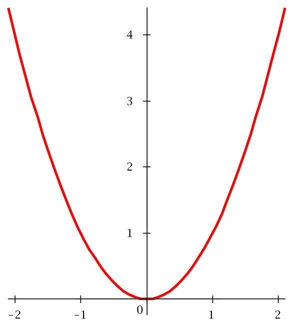
$$h : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = x^2$$

Értelmezési tartomány: $\mathbb{Z}$
Értékkészlet: a négyzetszámok halmaza.

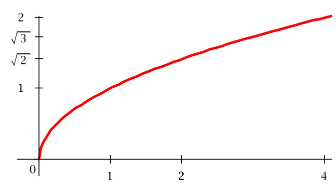
Ha nem jelöljük a függvény értelmezési tartományát, például csak annyit írunk, hogy $f(x) = x^2$ vagy $g(x) = \frac{1}{x}$, akkor az értelmezési tartomány a valós számoknak az a legbővebb részhalmaza, ahol a függvényt megadó képlet értelmes. Tehát f értelmezési tartománya a valós számok halmaza, g értelmezési tartománya a valós számok halmaza kivéve a 0-t.
Az értelmezési tartomány egy elemét **pontnak** vagy **helynek** is hívjuk, az értékkészlet elemei pedig a **függvényértékek** vagy **helyettesítési értékek** vagy **értékek**.

Példa: Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$ függvény $x = 3$ helyhez tartozó helyettesítési értéke $f(3) = 9$.

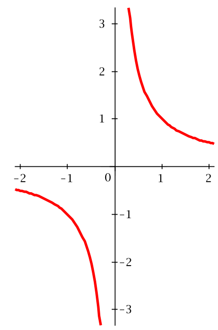
3.1. Definíció: A függvény grafikonja
Az $\boldsymbol{f : A \to B, \quad A, B \subset \mathbb{R}}$ **függvény grafikonja** a $G = \{(x, f(x)) : x \in A\}$ halmaz.
A függvények grafikonját ábrázolhatjuk is. Ilyenkor a Descartes-féle koordinátarendszerben az értelmezési tartomány elemeit az x tengelyen, a függvényértékeket pedig az y tengelyen ábrázoljuk: $y = f(x)$.
Néhány függvényt ábrázoltunk a következő rajzokon:



$\boldsymbol{f(x) = x^2,}$
$\boldsymbol{D_f = \mathbb{R}}$



$\boldsymbol{g(x) = \sqrt{x},}$
$\boldsymbol{D_g = [0, \infty)}$



$\boldsymbol{h(x) = 1/x,}$
$\boldsymbol{D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}}$

3.2. Definíció: Két függvény egyenlő, ha értelmezési tartományuk megegyezik, és minden pontban ugyanazt az értéket veszik fel.
Példa: Az
$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2}{x}$$
és a
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x$$
függvények nem egyenlők egymással, mert az értelmezési tartományuk nem egyezik meg.

3.2. Függvények tulajdonságai

3.3. Definíció: A valós számok bizonyos részhalmazait **intervallumoknak** nevezzük.
A következő intervallumokat értelmezzük ($a, b, x \in \mathbb{R}$):

$[a, b] = \{x : a \le x \le b\}$, **zárt intervallum**;

$(a, b) = \{x : a < x < b\}$, **nyílt intervallum**;

$(a, b] = \{x : a < x \le b\}$, **balról nyílt, jobbról zárt intervallum**;

$[a, b) = \{x : a \le x < b\}$, **balról zárt, jobbról nyílt intervallum**;

$[a, \infty) = \{x : a \le x\}$, **balról zárt félegyenes**;

$(a, \infty) = \{x : a < x\}$, **balról nyílt félegyenes**;

$(-\infty, b] = \{x : x \leq b\}$, **jobbról zárt félegyenes**;

$(-\infty, b) = \{x : x < b\}$, **jobbról nyílt félegyenes**;

$(-\infty, \infty) = \{x : x \in \mathbb{R}\}$, **számegyenes**.

Megjegyzés: Az intervallumok jelölésében a középiskolás tankönyvekben szokásos „kifele szögletes" zárójel helyett kerek zárójelet használunk.

3.4. Definíció: Azokat a helyeket, ahol a függvény 0-t vesz fel, **zérushelyeknek** nevezzük.
Példák:

— Az $f(x) = 8 - x^3$ függvény zérushelye $x = 2$.

— A $g(x) = x^2 + 1$ függvénynek nincs zérushelye.

3.5. Definíció: A **függvények monotonitási szakaszai** azok az intervallumok, amelyeken a függvény végig monoton nő, és azok az intervallumok, amelyeken a függvény végig monoton csökken.

— Ha az f függvény értelmezve van az I intervallumon, és az intervallum bármely két x, y elemére teljesül, hogy ha $x < y$, akkor $f(x) \leq f(y)$, akkor ***f* monoton nő** az I intervallumon.

— Ha az f függvény értelmezve van az I intervallumon, és az intervallum bármely két x, y elemére teljesül, hogy ha $x < y$, akkor $f(x) < f(y)$, akkor ***f* szigorúan monoton nő** az I intervallumon.

— Ha az f függvény értelmezve van az I intervallumon, és az intervallum bármely két x, y elemére teljesül, hogy ha $x < y$, akkor $f(x) \geq f(y)$, akkor ***f* monoton csökken** az I intervallumon.

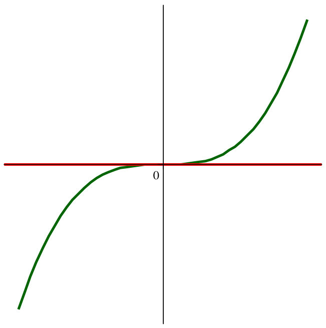
— Ha az f függvény értelmezve van az I intervallumon, és az intervallum bármely két x, y elemére teljesül, hogy ha $x < y$, akkor $f(x) > f(y)$, akkor ***f* szigorúan monoton csökken** az I intervallumon.

Példák:

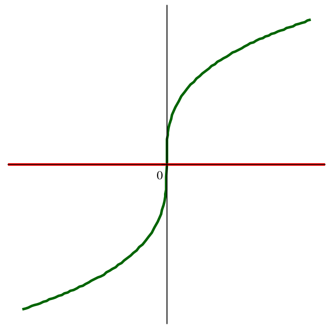
— Az $f(x) = x^2$ függvény szigorúan monoton csökken a $(-\infty, 0]$ intervallumon, szigorúan monoton nő a $[0, \infty)$ intervallumon, de nem monoton az egész számegyenesen.

— A $g(x) = 3$ függvény monoton nő az egész számegyenesen, és monoton csökken az egész számegyenesen.

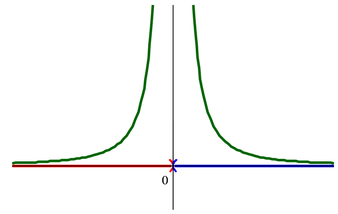
Ábrázoltunk néhány függvényt, pirossal jelölve a monoton növő, kékkel pedig a monoton csökkenő szakaszait.



$f(x) = x^3$



$g(x) = \sqrt[3]{x}$



$h(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Megjegyzés: Van olyan függvény, amelyik semmilyen intervallumban sem monoton.

3.6. Definíció: Szélsőértékek

— Az $M \in \mathbb{R}$ értéket az f függvény **maximumának** vagy **abszolút maximumának** vagy **maximum értékének** nevezzük, ha f értelmezési tartományában van olyan x hely, amelyre $f(x) = M$, és f sehol nem vesz fel M-nél nagyobb értéket.

— Azokat a helyeket, ahol f helyettesítési értéke M, **maximumhelyeknek** nevezzük.

— Az $m \in \mathbb{R}$ értéket az f függvény **minimumának** vagy **abszolút minimumának** vagy **minimum értékének** nevezzük, ha f értelmezési tartományában van olyan x hely, amelyre $f(x) = m$, és f sehol nem vesz fel m-nél kisebb értéket.

— Azokat a helyeket, ahol f helyettesítési értéke m, **minimumhelyeknek** nevezzük.

A maximum- és minimumhelyek közös neve: **szélsőértékhelyek**, a maximum és minimum értékek közös neve: **szélsőértékek**.

Példák:

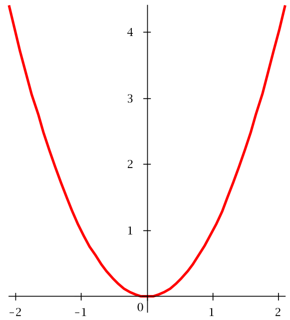
— A $\cos x$ függvény maximuma 1, maximumhelyei: $x_k = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

— A $\cos x$ függvény minimuma -1, minimumhelyei: $x_n = \pi + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$.

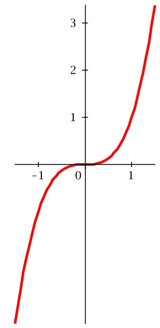
— Az x^2 függvény minimuma 0, minimumhelye $x = 0$. Az x^2 függvénynek nincs maximuma.

— Az x^3 függvénynek nincs se minimuma, se maximuma.

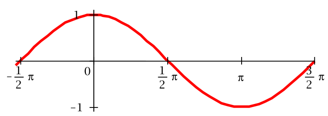
— A $\{x\}$ (törtrész x vagy x törtrésze) függvény minimuma 0, minimumhelyei az egész számok. A $\{x\}$ függvénynek nincs maximuma.



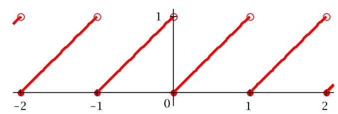
x^2



x^3



$\cos x$



$\{x\}$

3.7. Definíció: Periodikus függvények

Az f függvényt **periodikusnak** nevezzük, ha van olyan $p \neq 0$ szám, hogy f értelmezési tartományának minden x elemére teljesül a következő két állítás:

(i) $x + p$ és $x - p$ is eleme f értelmezési tartományának,

(ii) $f(x + p) = f(x)$.

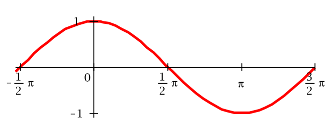
A definícióban levő p számot a függvény **periódusának** nevezzük.

3.8. Állítás: Ha p periódusa az f függvénynek, akkor minden $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$ esetén kp is periódusa f-nek.

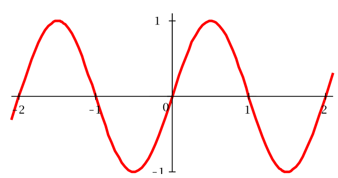
Példák:

— A $\sin x$ függvény periodikus, periódusai $2\pi, -2\pi, 4\pi, -4\pi, \ldots$. A $\sin x$ függvény legkisebb pozitív periódusa 2π.

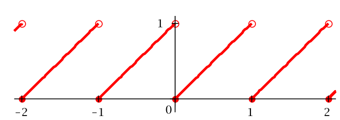
— Az x^2 függvény nem periodikus.



$\cos x,\ p = 2\pi$



$\sin \pi x,\ p = 2$



$\{x\},\ p = 1$

Megjegyzés: Van olyan periodikus függvény, amelyiknek nincs legkisebb pozitív periódusa.

3.9. Definíció: Páros és páratlan függvények

— Az f függvényt **párosnak** nevezzük, ha az értelmezési tartomány minden x elemére teljesül a következő két állítás:

(i) $-x$ is benne van az értelmezési tartományban, és

(ii) $f(-x) = f(x)$.

A páros függvények grafikonja szimmetrikus az y tengelyre.

— Az f függvényt **páratlannak** nevezzük, ha az értelmezési tartomány minden x elemére teljesül a következő két állítás:

(i) $-x$ is benne van az értelmezési tartományban, és

(ii) $f(-x) = -f(x)$.

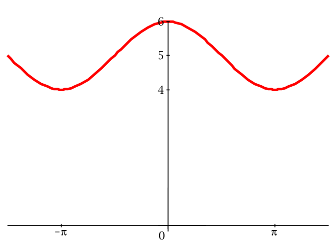
A páratlan függvények grafikonja szimmetrikus az origóra.

Példák:

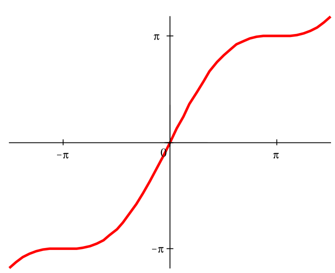
— Az $5 + \cos x$ függvény páros.

— Az $x + \sin x$ függvény páratlan.

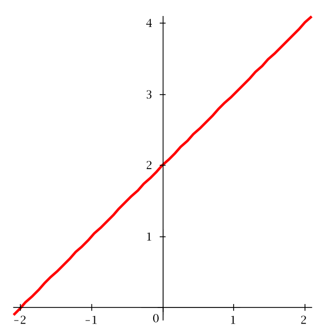
— Az $x + 2$ függvény se nem páros, se nem páratlan.



$5 + \cos x$



$x + \sin x$



$x + 2$

3.3. Műveletek a függvények körében

3.10. Definíció: Algebrai műveletek.

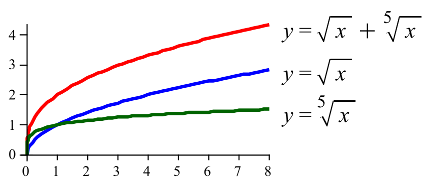
— **Függvények összege:** Ha az f és g függvények értelmezési tartománya megegyezik, jelöljük a közös értelmezési tartományt D-vel, akkor a $h = f + g$ értelmezési tartománya szintén D, és minden $x \in D$ esetén $h(x) = f(x) + g(x)$.

— **Konstanssal való szorzás:** Ha az f függvény értelmezési tartománya D, és c egy valós szám, akkor a $h = cf$ függvény értelmezési tartománya szintén D, és minden $x \in D$ esetén $h(x) = c \cdot f(x)$.

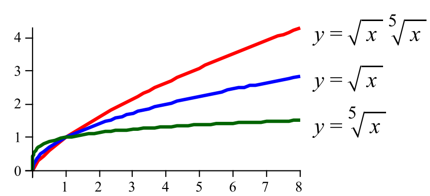
— **Függvények szorzata:** Ha az f és g függvények értelmezési tartománya megegyezik, jelöljük a közös értelmezési tartományt D-vel, akkor a $h = f \cdot g$ értelmezési tartománya szintén D, és minden $x \in D$ esetén $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

— **Függvények hányadosa:** Ha az f és g függvények értelmezési tartománya megegyezik, jelöljük a közös értelmezési tartományt D-vel, és g-nek nincs zérushelye, akkor a $h = \frac{f}{g}$ értelmezési tartománya szintén D, és minden $x \in D$ esetén $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Példák:
A függvények összegének és szorzatának grafikonja az alábbi ábrákon látható:



Két függvény összege



Két függvény szorzata

A függvények körében az algebrai műveleteken kívül van még egy művelet: az **összetétel** vagy **kompozíció.**

3.11. Definíció: Kompozíció. Ha f és g két valós függvény, akkor a $h = f \circ g$ **összetett függvény** értelmezési tartománya

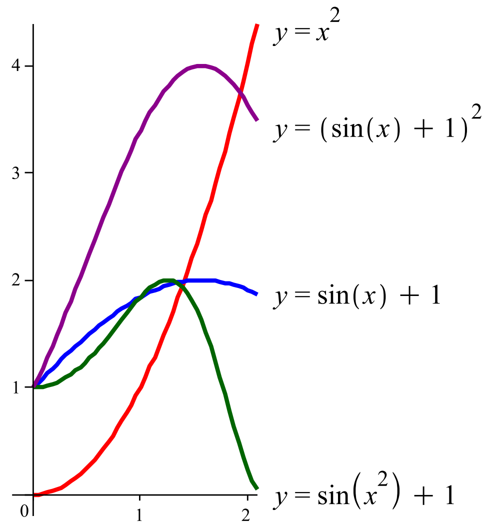
$$D_h = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$$

és minden $x \in D_h$ esetén

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right).$$

Ha $h = f \circ g$, akkor az f az összetett függvény **külső függvénye**, és g a **belső függvénye**.
Megjegyzés:
Előfordulhat, hogy a fenti definíció esetén olyan h függvényt kapunk, amelyre $D_h = \emptyset$, azaz a függvény sehol sincs értelmezve. A továbbiakban ezt az „üres” függvényt (azonosítható az üres halmazzal) nem tekintjük függvénynek.

Példák:
Legyen $f(x) = \sin x + 1$, és $g(x) = x^2$.
Ekkor $h_1(x) = (f \circ g)(x) = \sin(x^2) + 1$, és $h_2(x) = (g \circ f)(x) = (\sin x + 1)^2$.
A függvények kompozíciójánál lényeges a sorrend, nem mindegy, hogy melyik a külső, és melyik a belső függvény.



Megjegyzés: Vannak többszörösen összetett függvények is. Például, ha $f(x) = \sin x, g(x) = x^2$, és $h(x) = 2^x$, akkor $(h \circ f \circ g)(x) = 2^{\sin(x^2)}$.

3.4. Függvénytranszformációk

A függvények ábrázolása sokat segíthet a feladatok megoldásában. A grafikonokról hasznos adatokat tudunk leolvasni. Ha ismerjük a fontosabb elemi függvények grafikonját, akkor a függvénytranszformációkkal újabb függvényeket tudunk ábrázolni.

Legyen az $f(x)$ egy olyan függvény, amelyiknek ismerjük a grafikonját, és legyen $g(x) = ax + b$, ahol a és b rögzített valós számok.

- **Külső** függvénytranszformációról a $h = g \circ f$ ábrázolásakor beszélünk, ekkor $h(x) = g(f(x)) = af(x) + b$.
- **Belső** függvénytranszformációról a $h = f \circ g$ ábrázolásakor beszélünk, ekkor $h(x) = f(g(x)) = f(ax + b)$.
- **Összetett** függvénytranszformáció esetén külső és belső transzformáció is előfordul.

Példák:

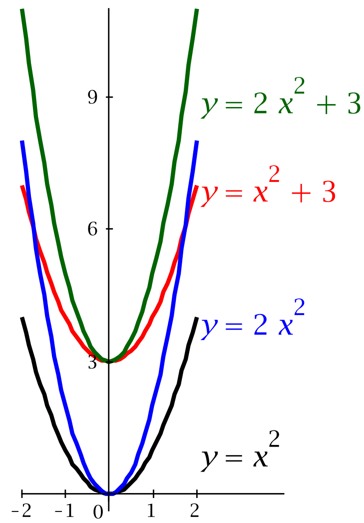
— Legyen $g_1(x) = x + b, g_2(x) = ax, g_3(x) = ax + b$, valamint $h_1(x) = g_1(f(x)) = f(x) + b, h_2(x) = g_2(f(x)) = af(x), h_3(x) = g_3(f(x)) = af(x) + b$.

h_1 ábrázolásához az f függvény grafikonját b-vel toljuk felfele, ha $b > 0$, illetve $|b|$-vel lefele, ha $b < 0$.

h_2 ábrázolásához az f függvény grafikonját az y tengely irányában a-szorosára nyújtjuk, ha $a > 1$, illetve $1/a$-ad részére zsugorítjuk, ha $0 < a < 1$. Ha $a < 0$, akkor a nyújtás vagy zsugorítás mellett a grafikont tükrözzük is az x tengelyre.

h_3 ábrázolásához az f függvény grafikonját az y tengely irányában a-szorosára nyújtjuk, ha $a > 1$, illetve $1/a$-ad részére zsugorítjuk, ha $0 < a < 1$. Ha $a < 0$, akkor a nyújtás vagy zsugorítás mellett a grafikont tükrözzük is az x tengelyre, majd a kapott grafikont b-vel toljuk felfele, ha $b > 0$, illetve $|b|$-vel lefele, ha $b < 0$.

Ha $f(x) = x^2$, $g_1(x) = x + 3$, $g_2(x) = 2x$ és $g_3(x) = 2x + 3$, akkor a grafikonok képei:



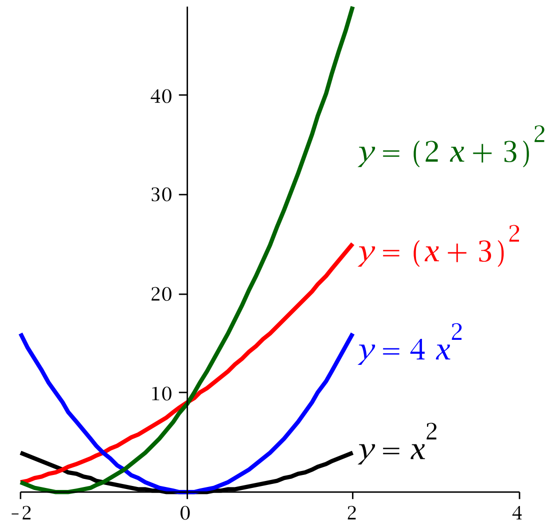
— Legyen $g_1(x) = x + b$, $g_2(x) = ax$, $g_3(x) = ax + b$, valamint $h_1(x) = f(g_1(x)) = f(x + b)$, $h_2(x) = f(g_2(x)) = f(ax)$, $h_3(x) = f(g_3(x)) = f(ax + b)$.

h_1 ábrázolásához az f függvény grafikonját b-vel toljuk balra, ha $b > 0$, és $|b|$-vel toljuk jobbra, ha $b < 0$.

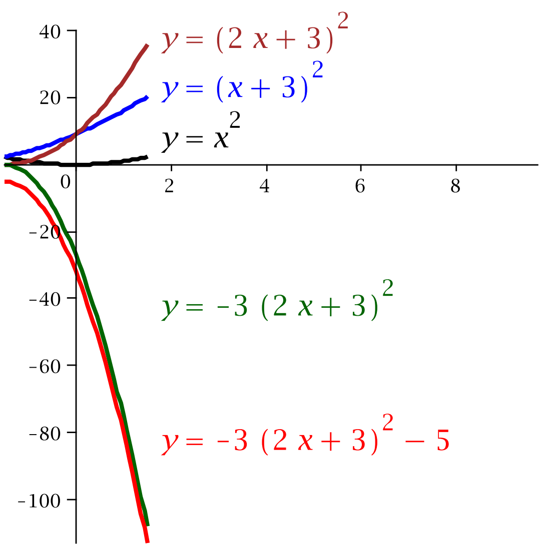
h_2 ábrázolásához az f függvény grafikonját az x tengely irányában $1/a$-szorosára nyújtjuk, ha $0 < a < 1$, illetve a-ad részére zsugorítjuk, ha $a > 1$. Ha $a < 0$, akkor a nyújtás vagy zsugorítás mellett a grafikont tükrözzük is az y tengelyre.

h_3 ábrázolásához az f függvény grafikonját először b-vel toljuk balra, ha $b > 0$, és $|b|$-vel toljuk jobbra, ha $b < 0$, majd a kapott grafikont az x tengely irányában a-szorosára nyújtjuk, ha $a > 1$, illetve $1/a$-ad részére zsugorítjuk, ha $0 < a < 1$. Ha $a < 0$, akkor a nyújtás vagy zsugorítás mellett a grafikont tükrözzük is az y tengelyre.

Ha $f(x) = x^2, g_1(x) = x + 3, g_2(x) = 2x$ és $g_3(x) = 2x + 3$, akkor a grafikonok képei:

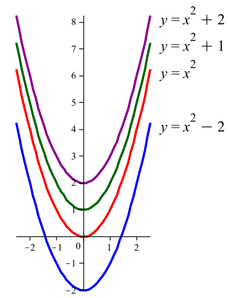


— Legyen $g_1(x) = ax + b, g_2(x) = cx + d$, valamint $h(x) = g_1(f(g_2(x))) = af(cx + d) + b$.
Ekkor $h(x)$ ábrázolásának lépései: $f(x), f(x + d), f(cx + d), af(cx + d), af(cx + d) + b$.
Ha $f(x) = x^2, g_1(x) = -3x - 5$ és $g_2(x) = 2x + 3$, akkor a grafikonok képei:

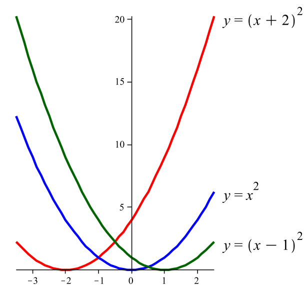


A függvénytraszformációkat a transzformációk szerint is lehet csoportosítani.

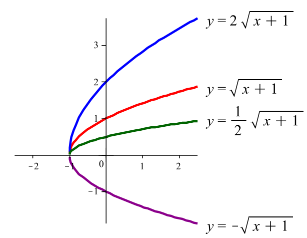
Függőleges eltolás:
Az $y = f(x) + c$ kifejezés az $f(x)$ grafikonját felfelé tolja c-vel, ha $c > 0$ és lefelé $|c|$-vel, ha $c < 0$.



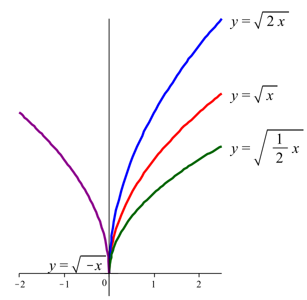
Vízszintes eltolás:
Az $y = f(x + c)$ kifejezés az $f(x)$ grafikonját balra tolja c-vel, ha $c > 0$ és jobbra $|c|$-vel, ha $c < 0$.



Függőleges nyújtás:
Az $y = cf(x)$ kifejezés az $f(x)$ grafikonját az y tengely irányában c-szeresére változtatja. Ha $c > 1$, akkor nyújtja, ha $0 < c < 1$, akkor zsugorítja. Ha pedig $c = -1$, akkor tükrözi az x tengelyre.



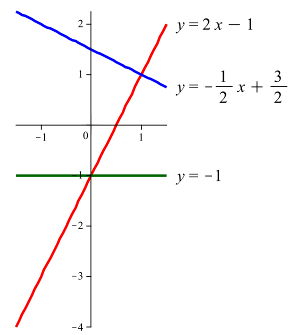
Vízszintes nyújtás:
Az $y = f(cx)$ kifejezés az $f(x)$ grafikonját az x tengely irányában c-szeresére változtatja. Ha $0 < c < 1$, akkor nyújtja, ha $c > 1$, akkor zsugorítja. Ha pedig $c = -1$, akkor tükrözi az y tengelyre.



3.5. Fontosabb elemi függvények: grafikonok, tulajdonságok

Lineáris függvények:

Az $f(x) = mx + b$ vagy $y = mx + b$ alakú függvényeket **lineáris függvényeknek** nevezzük. Itt m és b állandó. Az elnevezést az indokolja, hogy grafikonjuk a síkban egyenes. Itt m az egyenes **meredeksége**, b pedig az y tengellyel való metszéspontja az egyenesnek.
Abban a speciális esetben, amikor $m = 0$, azaz a függvény grafikonja egy vízszintes egyenes, **konstans függvényről** beszélünk.

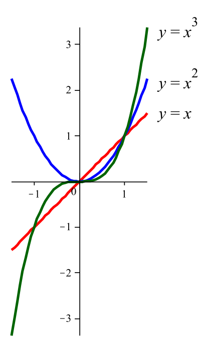


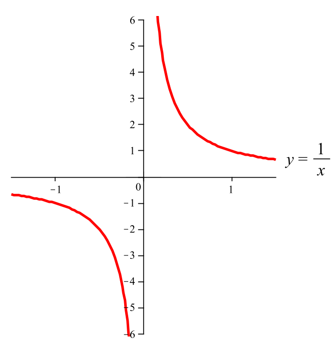
Hatványfüggvények:

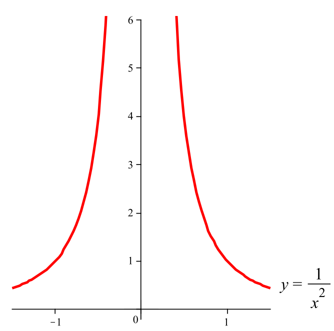
Az $f(x) = x^a$ vagy $y = x^a$ alakú függvényeket **hatványfüggvényeknek** nevezzük. Itt a egy állandó, a hatvány **kitevője**. Egyelőre csak olyan hatványfüggvényekkel foglalkozunk, amelyeknek a kitevője egy nem 0 egész szám. Ha ez a kitevő egy pozitív egész szám, akkor a függvény értelmezési tartománya az egész számegyenes. Ha a kitevő negatív, akkor a függvény nincs értelmezve 0-ban.
A pozitív kitevős hatványfüggvényekből és konstansokból az összeadás és szorzás segítségével előállítható függvényeket **polinomoknak** nevezzük. Minden polinom felírható

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

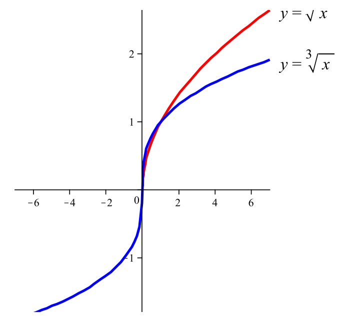
alakban, ahol $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ valós számok, a polinom **együtthatói**. Azt a legnagyobb k indexet, amelyre $a_k \neq 0$, a polinom **fokának** nevezzük. Emiatt szokás a konstans függvényeket 0-ad fokú polinomoknak is nevezni.





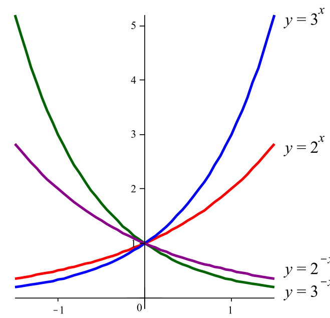


A **törtkitevőjű hatványfüggvények** közül különösen fontos az $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ **négyzetgyökfüggvény** és az $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ **köbgyökfüggvény**. A négyzetgyökfüggvény értelmezési tartománya és értékkészlete a $[0, \infty)$ félegyenes, azaz a nemnegatív valós számok. A köbgyökfüggvény értelmezési tartománya és értékkészlete a $(-\infty, \infty)$ egyenes, azaz az összes valós szám.



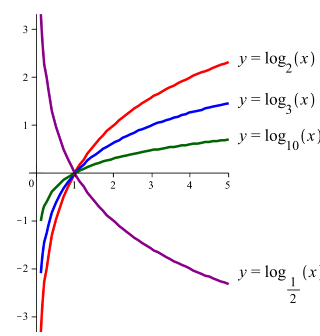
Exponenciális függvények:

Az $f(x) = a^x$ alakú függvényeket a-alapú **exponenciális függvényeknek** nevezzük. Itt az a **alap** csak pozitív, 1-től különböző szám lehet: $a > 0$ és $a \neq 1$. Az exponenciális függvények értelmezési tartománya $(-\infty, \infty)$, értékkészlete pedig $(0, \infty)$.



Logaritmusfüggvények:

Az $f(x) = \log_a x$ alakú függvényeket ***a*-alapú logaritmusfüggvényeknek** nevezzük. Ezek az exponenciális függvények inverzei. Az alap itt is csak pozitív, 1-től különböző szám lehet: $a > 0$ és $a \neq 1$. A logaritmusfüggvények értelmezési tartománya $(0, \infty)$, értékkészlete pedig $(-\infty, \infty)$.



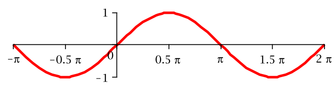
Trigonometrikus függvények:

Az alábbi ábrákon a négy legismertebb trigonometrikus függvény grafikonja látható. Közülük a $\sin x$ és a $\cos x$ mindenütt értelmezve van, értékkészlete a $[-1, 1]$ zárt intervallum és 2π szerint periodikus.

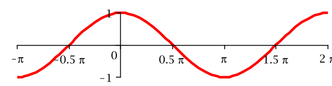
A $\operatorname{tg} x$ függvény nincs értelmezve ott, ahol a $\cos x$ függvény értéke 0, azaz az $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ helyeken, ahol k tetszőleges egész szám.

A $\operatorname{ctg} x$ függvény nincs értelmezve ott, ahol a $\sin x$ függvény értéke 0, azaz az $x = k\pi$ helyeken, ahol k tetszőleges egész szám.

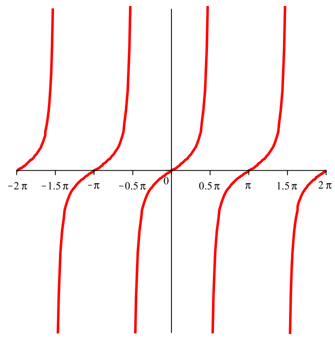
A $\operatorname{tg} x$ és a $\operatorname{ctg} x$ függvény értékkészlete $(-\infty, \infty)$ és π szerint periodikus.



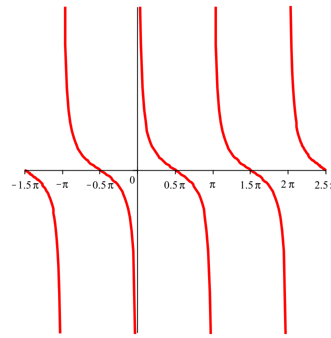
y = sin x



y = cos x



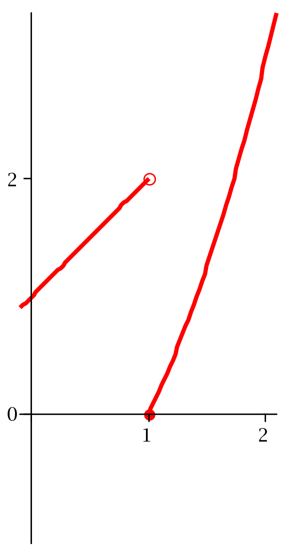
y = tg x



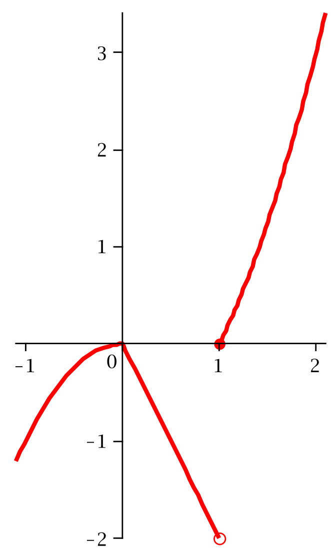
y = ctg x

3.6. Szakaszonként megadott függvények

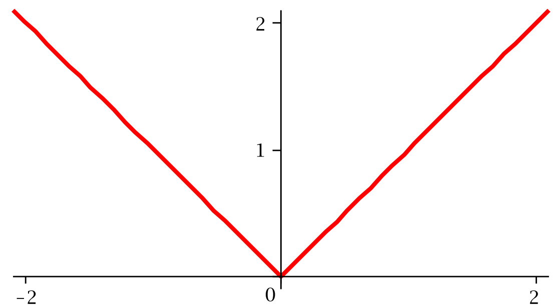
Függvényeket többféle módon lehet megadni. Legtöbbször valamilyen képlettel fogjuk megadni a hozzárendelést.
Ugyanakkor egy függvényt nem feltétlenül egyetlen képlettel adunk meg az egész értelmezési tartományon. Vannak olyan függvények, amelyeket különböző intervallumokon más-más képlet definiál.
Példák:



$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{ha } x < 1 \\ x^2-1, & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}$$



$$g(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{ha } x < 0 \\ -2x, & \text{ha } 0 \leq x < 1 \\ x^2-1, & \text{ha } 1 \leq x \end{cases}$$

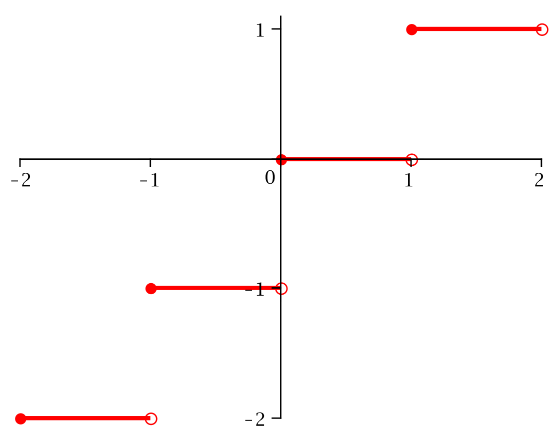


$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Nem adható meg egyetlen képlettel az $[x]$ (x egész része vagy egész rész x) és a $\{x\}$ (x törtrésze vagy törtrész x) függvény sem.

3.12. Definíció: Az x valós szám **egész része**, jele $[x]$, olyan egész szám, amelyre teljesül, hogy $x - 1 < [x] \leq x$.
Példák:
$[2{,}3] = 2, \quad [3{,}9] = 3, \quad [5] = 5, \quad [0] = 0, \quad [-0{,}2] = -1, \quad [-2{,}6] = -3, \quad [-4] = -4.$

3.13. Definíció: Az $[x]$ függvény minden valós számhoz a szám egész részét rendeli.

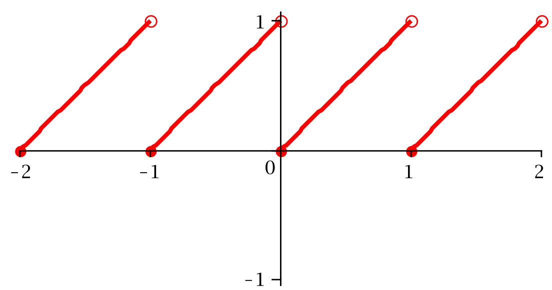


$[x]$

3.14. Definíció: Az x valós szám **törtrészét**, jele $\{x\}$, úgy kapjuk, hogy a számból kivonjuk az egész részét: $\{x\} = x - [x]$.
Példák:

$$\{2{,}3\} = 0{,}3, \quad \{3{,}9\} = 0{,}9, \quad \{5\} = 0, \quad ,\{0\} = 0,$$
$$\{-0{,}2\} = 0{,}8, \quad \{-2{,}6\} = 0{,}4, \quad \{-4\} = 0.$$

3.15. Definíció: Az $\{x\}$ függvény minden valós számhoz a szám törtrészét rendeli.



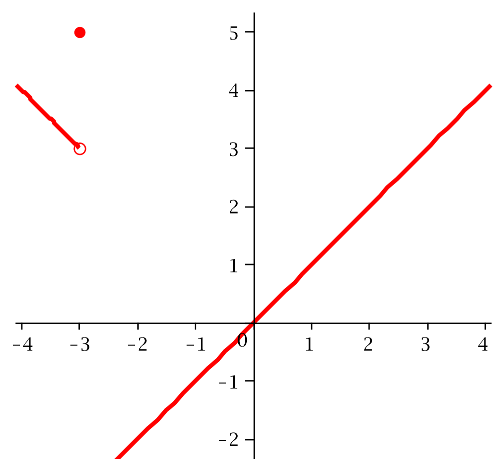
$\{x\}$

Megjegyzés: Egy függvényt nemcsak szakaszonként határozhat meg egy képlet, hanem tetszőleges ponthalmazokon is meg lehet adni értékeket.
Példák:

$$g(x) = \begin{cases} -x, \text{ ha } x < -3 \\ 5, \text{ ha } x = -3 \\ x, \text{ ha } x > -3 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 1, \text{ ha } x \text{ racionális} \\ -1, \text{ ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

Az első példában szereplő függvény grafikonját könnyű lerajzolni, a második példában szereplő függvény grafikonját pedig nem lehet lerajzolni.



$$g(x) = \begin{cases} -x, & \text{ha } x < -3 \\ 5, & \text{ha } x = -3 \\ x, & \text{ha } x > -3 \end{cases}$$

3.7. Egyenlőtlenségek grafikus megoldása

A függvénygrafikonok ábrázolása hasznos módszer az egyenlőtlenségek megoldásakor. Nem feltétlenül helyettesíti a pontos értékek kiszámolásában az algebrai megoldást, de kiegészíti azt, és

segít a hibák elkerülésében.
Mindig érdemes vázolni a grafikonokat, ha az egyenlőtlenségben másodfokú függvény szerepel. Akkor is érdemes vázolni a grafikonokat, ha az egyenlőtlenségben egyszerűbb trigonometrikus, logaritmus vagy exponenciális függvények szerepelnek.

Példák:

— Oldjuk meg az $x^2 > 9$ egyenlőtlenséget!

— Oldjuk meg az $x^2 + x - 6 \geq 0$ egyenlőtlenséget!

— Oldjuk meg az $-2x^2 - 8 < -12x + 2$ egyenlőtlenséget!

— Oldjuk meg a $\sqrt{x} > x^2$ egyenlőtlenséget!

— Oldjuk meg az $|2x - 3| > x$ egyenlőtlenséget!

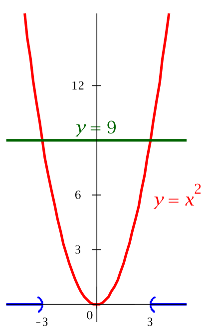
— Oldjuk meg az $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 4$ egyenlőtlenséget!

— Oldjuk meg a $\log_{0,1} x < 1$ egyenlőtlenséget!

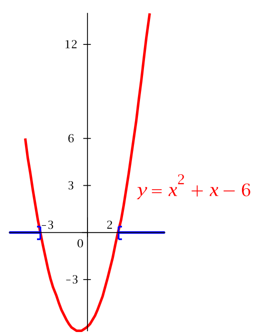
— Oldjuk meg a $\sin x > \frac{1}{2}$ egyenlőtlenséget!

— Oldjuk meg a $\sin x > \cos x$ egyenlőtlenséget!

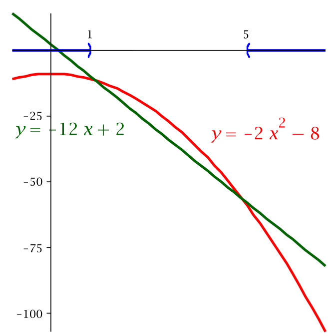
— Oldjuk meg a $\operatorname{tg} x > 1$ egyenlőtlenséget!



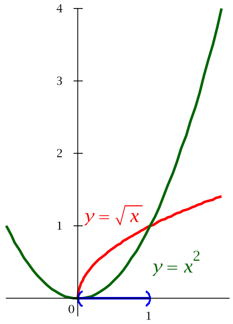
$\boldsymbol{x^2 > 9}$



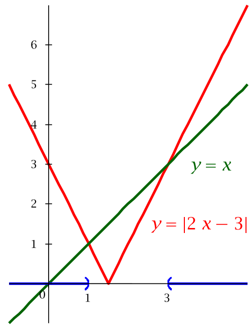
$\boldsymbol{x^2 + x - 6 \geq 0}$



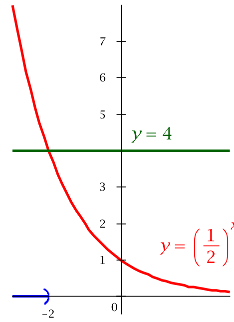
$\boldsymbol{-2x^2 - 8 < -12x + 2}$



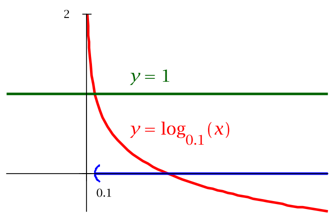
$\sqrt{x} > x^2$



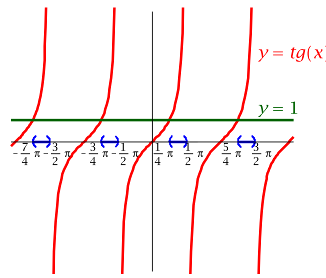
$|2x - 3| > x$



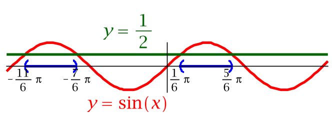
$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 4$



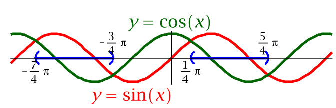
$\log_{0,1} x < 1$



$\operatorname{tg} x > 1$



$\sin x > \frac{1}{2}$



$\sin x > \cos x$

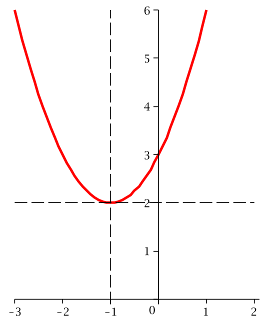
3.8. Szélsőérték-feladatok megoldása másodfokú függvény segítségével

Bizonyos szélsőértékeket könnyen meghatározhatunk a másodfokú függvény segítségével. A legegyszerűbb ilyen feladat valamilyen konkrét másodfokú függvény szélsőértékének a meghatározása. A megoldás során érdemes ábrázolni a függvény grafikonját.

Példák:

— Határozzuk meg az $f(x) = x^2 + 2x + 3$ függvény minimumát!

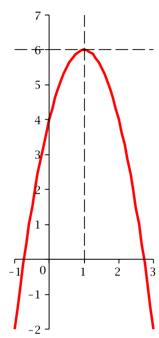
Megoldás: $f(x) = x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2$. A függvény minimumhelye $x = -1$-ben van, és a minimumérték 2.



$\boldsymbol{f(x) = x^2 + 2x + 3}$

— Határozzuk meg az $f(x) = -2x^2 + 4x + 4$ függvény maximumát!

Megoldás: $f(x) = -2x^2+4x+4 = -2\left[x^2 - 2x - 2\right] = -2\left[(x-1)^2 - 3\right] = -2(x-1)^2+6$ A függvény maximumhelye $x = 1$-ban van, és a maximumérték 6.



$\boldsymbol{f(x) = -2x^2 + 4x + 4}$

— Mennyi a $K = 400$ hosszúságegység kerületű téglalapok területének a maximuma? Határozzuk meg a maximális területtel rendelkező téglalap oldalait!

Megoldás: Legyen a téglalap két oldala a és b. Ekkor $K = 2a + 2b = 400$, amiből $b = 200 - a$. A téglalap területe az a oldal függvényében $T(a) = a \cdot (200 - a) = -a^2 + 200a = -[a^2 - 200a] = -\left[(a-100)^2 - 10000\right] = -(a-100)^2 + 10000$.

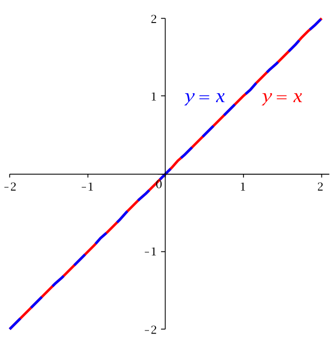
A téglalap területe maximális, ha $a = 100$ hosszúságegység. Ekkor $b = 200 - a = 100$, tehát a téglalap négyzet, és a maximális terület 10000 területegység. (Ld. még Megoldás nevezetes közepekkel.)

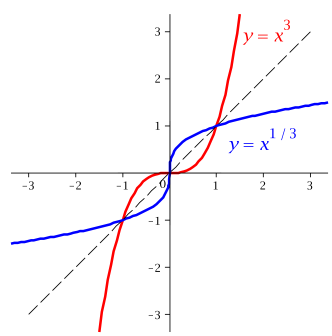
3.9. Függvények inverze

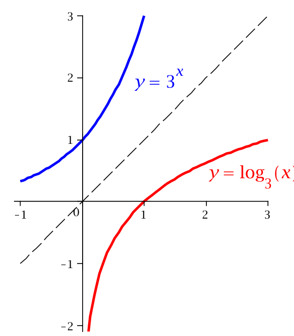
3.16. Definíció: Azt mondjuk, hogy az $f : A \to \mathbb{R}$ valós függvény **egy-egyértelmű** vagy **kölcsönösen egyértelmű**, illetve **invertálható**, ha az f függvény különböző A-beli pontokhoz különböző értékeket rendel.

Példák egy-egyértelmű függvényekre: $x, x^3, \sqrt[3]{x}, \log_3 x, 2^x$.
Nem minden függvény egy-egyértelmű, példák nem egy-egyértelmű függvényekre: $x^2, \sin x, |x|$.

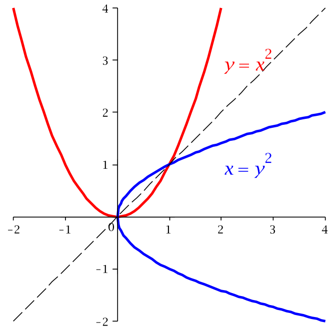
3.17. Definíció: Inverz függvény. Kölcsönösen egyértelmű függvények esetében a hozzárendelés irányát meg lehet fordítani. Ekkor az eredeti függvény értékkészletéből lesz az új függvény értelmezési tartománya, és az eredeti függvény értelmezési tartományából lesz az új függvény értékkészlete. A hozzárendelés megfordításával **invertáljuk** a függvényt. Az előbbi módon kapott új függvény az eredeti függvény **inverze**, illetve az eredeti és az új függvény egymás **inverzei.**
Az f függvény inverzét f^{-1}-gyel jelöljük. Ne keverjük össze az inverz függvényt a függvény reciprokával.
Ha f és g egymás inverzei, akkor f értelmezési tartománya megegyezik g értékkészletével, f értékkészlete megegyezik g értelmezési tartományával, továbbá, ha f értelmezve van az a helyen, és $f(a) = b$, akkor $g(b) = a$.
Példák: Az $f(x) = x$ függvény inverze $f^{-1}(x) = x$, a $g(x) = x^3$ inverze $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, és $\log_3 x$ inverze 3^x.
Fontos: Csak egy-egyértelmű függvénynek van inverze.
Mivel az inverz függvényt a leképezés irányának megfordításával kapjuk, a grafikon ábrázolásakor ez az x és y tengelyek szerepének felcserélését jelenti. Ezért az inverz függvények grafikonjai szimmetrikusak az $y = x$ egyenesre.

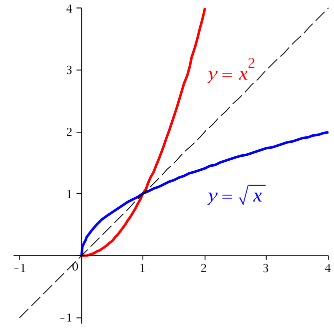






Nincs inverze például az egész számegyenesen értelmezett x^2 függvénynek, mert nem kölcsönösen egyértelmű. Az x^2 függvény grafikonját lehet tükrözni az $y = x$ egyenesre, de az így kapott görbe már nem függvénygrafikon, mert függvények esetében egy helyhez pontosan egy értéket rendelünk. Van viszont inverze az x^2 függvénynek, ha például csak a $(-\infty, 0]$ intervallumon értelmezzük, mert itt egy-egyértelmű.





Az inverz függvény jelölését a zsebszámológépeken is láthatjuk. Például a "sin" gomb felett van a "$\sin^{-1}$" felirat. Az egész számegyenesen a szinusz függvény sem egy-egyértelmű, tehát az egész számegyenesen nincs inverze. Ha viszont csak a $[-\pi/2, \pi/2]$ intervallumon értelmezzük, ott már egy-egyértelmű, és van inverze. Ennek a $[-\pi/2, \pi/2]$ intervallumra megszorított szinusz függvénynek az inverzét jelöljük $\sin^{-1}$-gyel vagy $\arcsin$-szal.

Példa:

Határozzuk meg az $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + x$ függvény inverzét, továbbá adjuk meg az inverz értelmezési tartományát és értékkészletét!

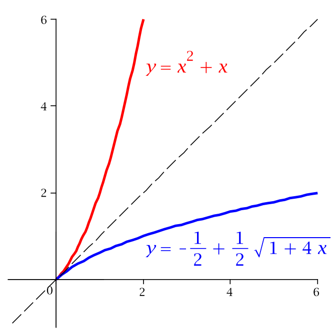
Ha $y = f(x) = x^2 + x$, és a hozzárendelést megfordítjuk, vagyis x és y szerepét felcseréljük, akkor az $x = y^2 + y$ egyenlethez jutunk. Ezt y-ra megoldva:

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4x}}{2} \text{ és az } y_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4x}}{2}$$

eredményeket kapjuk. A két eredmény közül egy konkrét értékpár segítségével tudjuk kiválasztani az eredeti függvény inverzét. Válasszuk az $x = 1$ helyet, és itt $f(1) = 2$. Tehát az inverz függvényre igaz, hogy $f^{-1}(2) = 1$. Az y_1 értéke 2-ben 1, tehát az $f(x) = x^2 + x$ függvény inverze

$$f^{-1} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}.$$

(y_2 értéke 2-ben $-2 \neq 1$, tehát y_2 nem lehet f inverze.) Az inverz értelmezési tartománya $[0, \infty)$ (és nem $[-1/4, \infty)$), értékkészlete pedig $[0, \infty)$.



3.10. Feladatok

Igazak-e a következő állítások?

3.1. Minden $p(x)$ polinom esetén vannak olyan $x < y$ számok, amelyekre teljesül, hogy $p(x) < p(y)$.

3.2. Vannak olyan $x < y$ számok, amelyekre minden polinom esetén teljesül, hogy $p(x) < p(y)$.

3.3. Van-e olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre a

Minden x-hez van olyan $y > x$, amelyikre $f(x) \leq f(y)$.
Van olyan y, hogy minden $x < y$ esetén $f(x) \leq f(y)$.

állítások közül pontosan

(a) 0 **(b)** 1 **(c)** 2

teljesül?

3.4. Fogalmazzuk meg, hogy mit jelent az, hogy egy függvény az $(1, 3)$ intervallumban monoton nő! Fogalmazzuk meg, hogy mit jelent az, hogy egy függvénynek az abszolút minimuma 4.

3.5. Fogalmazzuk meg, hogy mit jelent az, hogy egy függvény a $(-1, 3)$ intervallumban monoton csökken! Fogalmazzuk meg, hogy mit jelent az, hogy egy függvénynek abszolút minimuma van az $x = 4$ pontban!

Indokoljuk az alábbi kérdésekre adott válaszokat!

3.6. Lehet-e két szigorúan monoton növő függvény összege szigorúan monoton csökkenő?

3.7. Lehet-e két szigorúan monoton növő függvény szorzata szigorúan monoton csökkenő?

3.8. Igaz-e, hogy ha az $f + g$ függvény szigorúan monoton növő, akkor f is és g is szigorúan monoton növő függvények?

Adjunk példát olyan szigorúan monoton növő f és g függvényekre, ha vannak ilyenek, amelyeknek az összege

3.9. szigorúan monoton növő.

3.10. szigorúan monoton csökkenő.

Adjunk példát olyan szigorúan monoton növő f és g függvényekre, ha vannak ilyenek, amelyeknek a szorzata

3.11. szigorúan monoton növő.

3.12. szigorúan monoton csökkenő.

Van-e olyan mindenütt értelmezett függvény, amelyiknek

3.13. nincs abszolút minimuma?

3.14. nincs sem abszolút minimuma, sem abszolút maximuma?

3.15. nem monoton az egész számegyenesen, de nincs sem abszolút minimuma, sem abszolút maximuma?

3.16. minden pontban az abszolút minimummal egyezik meg a helyettesítési értéke?

3.17. Van-e olyan minden valós számon értelmezett függvény, amelyik szigorúan monoton csökken a $(-\infty, 0)$ intervallumon, szigorúan monoton nő a $(0, \infty)$ intervallumon, és 0-ban nincs minimuma?

3.18. Van-e olyan minden valós számon értelmezett függvény, amelyik nem vesz fel 2-nél nagyobb értéket, de nincs maximuma?

3.19. Van-e maximuma a $\{x\}$ függvénynek?

Van-e minimuma, illetve van-e maximuma a következő, mindenütt értelmezett függvényeknek?

3.20. $f(x) = |x|$

3.21. $f(x) = x^2$

3.22. $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{ha } x \neq 0 \\ 3, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

3.23. $D(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

3.24. $f(x) = x \sin x$

3.25. $x \cdot D(x)$

3.26. $f(x) = x + \cos x$

3.27. $x + D(x)$

Van-e minimuma, illetve van-e maximuma a következő, mindenütt értelmezett függvényeknek?

3.28. $f(x) = \{x\}$

3.29. $f(x) = [x]$

3.30. $f(x) = \{\sin x\}$

3.31. $f(x) = [\sin x]$

3.32. $f(x) = \{2 \sin x\}$

3.33. $f(x) = [2 \sin x]$

3.34. $f(x) = \left\{\frac{1}{2} \sin x\right\}$

3.35. $f(x) = \left[\frac{1}{2} \sin x\right]$

Keressük meg a következő függvények szélsőértékhelyeit, és adjuk meg a szélsőértéket is!

3.36. $x^2 + x - 6$

3.37. $-x^2 - x - 10$

Keressük meg a következő függvények szélsőértékhelyeit a megadott intervallumokon, és adjuk meg a szélsőértéket is!

3.38. $x^2 + x - 6, \qquad [-3, 10]$

3.39. $-x^2 - x - 6, \qquad [2, 5]$

Határozzuk meg a c paramétert úgy, ha lehet, hogy az $f(x) = x^2 + 2x + c$ függvény

3.40. grafikonja érintse az x-tengelyt!

3.41. minimuma -5 legyen!

3.42. csak negatív értéket vegyen fel!

Határozzuk meg a c paramétert úgy, ha lehet, hogy az $f(x) = x^2 + 2x + c$ függvény

3.43. grafikonja érintse az $y = 3$ egyenest!

3.44. maximuma 7 legyen!

3.45. csak pozitív értéket vegyen fel!

Keressük meg a következő függvények szélsőértékhelyeit, és szélsőértékeit!

3.46. $2x^2 + 8x - 4$

3.47. $-x^2 + 8x + 4$

3.48. $2x^2 + 4x + 16$

3.49. $-x^2 - 4x - 16$

Van-e olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyiknek a grafikonja szimmetrikus az

3.50. y tengelyre?

3.51. x tengelyre?

3.52. $y = x$ egyenesre?

3.53. $x = 2$ egyenesre?

3.54. $y = 2$ egyenesre?

3.55. origóra?

3.56. $(5, 0)$ pontra?

3.57. $(5, 3)$ pontra?

3.58. Fogalmazzuk meg, hogy mit jelent az, hogy egy függvény páros! Fogalmazzuk meg, hogy mit jelent az, hogy egy függvény nem páros!

3.59. Fogalmazzuk meg, hogy mit jelent az, hogy egy függvény páratlan! Fogalmazzuk meg, hogy mit jelent az, hogy egy függvény nem páratlan!

Melyik függvény páros, melyik páratlan, melyik se nem páros, se nem páratlan, melyik páros is, és páratlan is?

3.60. x^3

3.61. x^4

3.62. $x^3 + x^4$

3.63. $\sqrt{x}$

3.64. $2 + \sin x$

3.65. $2 + \cos x$

3.66. 0

3.67. $2^x + 2^{-x}$

3.68. Adjunk példát olyan f páros, és olyan g páratlan függvényekre, amelyek összege

(a) páratlan.

(b) se nem páros, se nem páratlan.

3.69. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tudjuk, hogy $f(5) = f(-5)$. Következik-e ebből, hogy f páros függvény?

3.70. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tudjuk, hogy $f(5) \neq f(-5)$. Következik-e ebből, hogy f nem páros függvény?

Melyik függvény páros, melyik páratlan, melyik se nem páros, se nem páratlan, melyik páros is, és páratlan is?

3.71. $\sqrt[3]{x}$ **3.72.** $\sin x$ **3.73.** $\cos x$ **3.74.** $\log_2 |x|$

3.75. $|\log_2 x|$ **3.76.** 3 **3.77.** $\operatorname{tg} x$ **3.78.** $\{x\}$

Adjunk példát olyan f páros, és olyan g páratlan függvényekre, amelyek összege

3.79. páros.

3.80. páros is, és páratlan is.

3.81. Legyen f egy mindenütt értelmezett függvény, amelyre teljesül, hogy $f(5) = -f(-5)$. Következik-e ebből, hogy f páratlan függvény?

3.82. Legyen f egy mindenütt értelmezett függvény, amelyre teljesül, hogy $f(5) = -f(-5)$. Lehet-e f páros?

3.83. Legyen f egy mindenütt értelmezett függvény, amelyre teljesül, hogy $f(5) \neq -f(-5)$. Következik-e ebből, hogy f nem páratlan függvény?

Igaz-e, hogy egy páros és egy páratlan függvény összege

3.84. páros?

3.85. páratlan?

3.86. se nem páros, se nem páratlan?

3.87. páros is és páratlan is?

Lehet-e egy páros és egy páratlan függvény összege

3.88. páros?

3.89. páratlan?

3.90. se nem páros, se nem páratlan?

3.91. páros is és páratlan is?

3.92. Bizonyítsuk be, hogy minden $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény felbontható egy páros és egy páratlan függvény összegére!

3.93. Van-e olyan függvénygrafikon, amelynek végtelen sok

(a) szimmetriatengelye **(b)** szimmetria-középpontja

van?

3.94. Van-e olyan függvénygrafikon, amelynek pontosan 3

(a) szimmetriatengelye **(b)** szimmetria-középpontja

van?

3.95. Van-e olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyikre a

Minden x-hez van olyan $p \neq 0$ szám, hogy $f(x+p) = f(x)$.
Van olyan $p \neq 0$ szám, hogy minden x esetén $f(x+p) = f(x)$.

állítások közül pontosan

(a) 0 **(b)** 1 **(c)** 2

teljesül?

3.96. Fogalmazzuk meg, mit jelent az, hogy egy függvény periodikus! Fogalmazzuk meg, mit jelent az, hogy egy függvény nem periodikus!

3.97. Fogalmazzuk meg, mit jelent az, hogy a 3 periódusa egy függvénynek! Fogalmazzuk meg, mit jelent az, hogy a 3 nem periódusa egy függvénynek!

3.98. Van-e olyan függvény, amelyiknek pontosan

(a) 0 **(b)** 1 **(c)** 2

periódusa van?

3.99. Adjuk meg a $\sin 2x + \cos 3x$ függvény legkisebb pozitív periódusát!

Periodikusak-e a következő függvények? Ha igen, adjunk meg egy periódust!

3.100. $\{x\}$ **3.101.** $[x]$ **3.102.** x^2 **3.103.** $|x|$

3.104. $[\sin x]$ **3.105.** $\sin^2 x$ **3.106.** $|\cos x|$ **3.107.** 3

3.108. $\sin x^2$ **3.109.** $\{x\}^2$ **3.110.** $[x]^2$ **3.111.** $1 + \sin x$

3.112. Periódusa-e a $\{x\}$ függvénynek

(a) az 1, **(b)** a 2, **(c)** a 3?

Van-e $\{x\}$-nek 1-nél kisebb pozitív periódusa?

3.113. Bizonyítsuk be, hogy a $D(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ függvény periodikus, és minden nem 0 racionális szám a periódusa. Van-e a pozitív periódusok között legkisebb?

Legyen $f(x) = \sin x$ és $g(x) = x^2$. Írjuk fel az alábbi összetett függvényeket:

3.114. $f(g(x))$ **3.115.** $g(f(x))$

Legyen $f(x) = \sin x$ és $h(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. Írjuk fel az alábbi összetett függvényeket:

3.116. $h(f(x))$

3.117. $f(h(x))$

Írjuk fel egyszerű alakban a következő függvényeket, és ábrázoljuk is őket!

3.118. $D(D(x))$

3.119. $[\sin x]$

3.120. $\{\cos x\}$

3.121. Adjunk meg olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, ha van ilyen, amelyre igaz, hogy $f(f(x)) = -x$.

Van-e inverzük a következő függvényeknek? Ha igen, adjuk meg az inverz függvényeket!

3.122. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$

3.123. $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

3.124. $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

3.125. $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = (x+2)^2$

3.126. $f : [-1, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = (x+2)^2$

3.127. $f : [-10, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 4x$

3.128. $f : [2, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 4x$

3.129. $f : (-\infty, 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 4x$

3.130. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 4x + 1$

3.131. $f : [-5, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 4x + 1$

3.132. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 3x, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Keressünk inverz párokat a függvények között!

3.133. 2^x

3.134. x^5

3.135. x^2

3.136. $\log_2 x$

3.137. $\sqrt{x}$

3.138. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

3.139. $\sqrt[5]{x}$

3.140. $\log_{1/2} x$

3.141. Adjunk meg olyan függvényeket, amelyek saját maguk inverzei!

3.142. Igaz-e, hogy ha egy tetszőleges, mindenütt értelmezett függvény grafikonját tükrözzük az $y = x$ egyenesre, akkor megkapjuk az inverz függvény grafikonját?

3.143. Legyen $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ -x, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.
Van-e olyan intervallum, ahol f monoton? Van-e f-nek inverze?

3.144. Adjunk meg olyan intervallumokat, amelyeken az $f(x) = x^2$ függvénynek van inverze! Adjuk meg az inverzeket ezeken az intervallumokon! Adjuk meg az inverzek értelmezési tartományát és értékkészletét!

3.145. Adjuk meg $\frac{1}{2x+3}$ inverzét a $[0, 1]$ intervallumon, és bizonyítsuk be, hogy az inverz függvény monoton! Adjuk meg az inverz értelmezési tartományát és értékkészletét!

3.146. Van-e olyan függvény, amelyiknek a grafikonja a sík összes egyenesét metszi?

3.147. Van-e olyan függvény, amelyik a sík összes egyenesét végtelen sok pontban metszi?

3.148. Van-e olyan függvény, amelyik végtelen sokszor felvesz minden valós értéket?

Lehet-e valamilyen függvény grafikonja

3.149. egy kör?

3.150. egy álló parabola?

3.151. egy fekvő parabola?

3.152. egy vízszintes egyenes?

Lehetnek-e a következő egyenesek valamilyen lineáris függvény grafikonjai? Ha igen, határozzuk meg a lineáris függvények meredekségét!

3.153. $2y - 3x = 4$

3.154. $4y = -12$

3.155. $4x = 24$

Lehetnek-e a következő egyenesek valamilyen lineáris függvény grafikonjai? Ha igen, határozzuk meg a lineáris függvények meredekségét!

3.156. $-3y + 2x = 5$

3.157. $-2y = 8$

3.158. $3y + 5x = 20$

3.159. $2x = 10$

3.160. $5x + 3y = 20$

3.161. $y = 0$

3.162. Írjuk fel az annak az elsőfokú függvénynek a hozzárendelési szabályát $y = mx + b$ alakban, amelyre igaz, hogy átmegy a $P(3;2)$ ponton és a meredeksége 5.

Írjuk fel az annak az elsőfokú függvénynek – ha van ilyen függvény – a hozzárendelési szabályát $y = mx + b$ alakban, amelyre igaz, hogy

3.163. átmegy a $P(2;3)$ ponton és a meredeksége -2!

3.164. átmegy a $P(2;3)$ és $Q(-5;-7)$ pontokon!

3.165. átmegy a $P(-2;3)$ ponton és a meredeksége 5!

3.166. átmegy a $P(2;3)$ és $Q(2;-7)$ pontokon!

Van-e olyan elsőfokú $p(x) = ax + b, a \neq 0$ polinom, amelyre igaz, hogy minden x esetén

3.167. $p(x+2) = 2p(x)$?

3.168. $2p(x) = p(x-1) + p(x+1)$?

3.169. $p(x+1) = p(2x)$?

Határozzuk meg a következő függvények lehető legbővebb értelmezési tartományát, majd ábrázoljuk őket! Határozzuk meg az értékkészletüket! Színezzük pirosra az x tengelyen azokat a szakaszokat, ahol a függvény monoton növő, és kékre azokat, ahol monoton csökkenő! Határozzuk meg a minimum- és maximumhelyeket, ha vannak, és a minimum és maximum értékeket is!

3.170. x^2

3.171. $\sqrt{x}$

3.172. $\dfrac{1}{x}$

3.173. x^3

3.174. $\sqrt[3]{x}$

3.175. $\dfrac{1}{x^2}$

Számoljuk ki a következő számok egész részét és törtrészét!

3.176. 1,3

3.177. 2,9

3.178. 4

3.179. 0

3.180. $-0{,}3$ **3.181.** $-0{,}7$ **3.182.** $-3{,}5$ **3.183.** -6

Határozzuk meg a következő függvények lehető legbővebb értelmezési tartományát, majd ábrázoljuk őket! Határozzuk meg az értékkészletüket! Színezzük pirosra az x tengelyen azokat a szakaszokat, ahol a függvény monoton növő, és kékre azokat, ahol monoton csökkenő! Határozzuk meg a szélsőértékhelyeket, ha vannak, és a szélsőértékeket is!

3.184. $[x]$ **3.185.** $[3x]$

3.186. $-3[x]$ **3.187.** $\{x\}$

3.188. $3\{-x\}$ **3.189.** $\{3x\}$

3.190. $-\left[\frac{x}{2}\right]$ **3.191.** $\frac{1}{2}[x]$

3.192. $\left\{-\frac{x}{2}\right\}$ **3.193.** $\frac{1}{2}\{x\}$

Határozzuk meg a következő függvények lehető legbővebb értelmezési tartományát, majd ábrázoljuk őket! Határozzuk meg az értékkészletüket! Színezzük pirosra az x tengelyen azokat a szakaszokat, ahol a függvény monoton növő, és kékre azokat, ahol monoton csökkenő! Határozzuk meg a szélsőértékhelyeket, ha vannak, és a szélsőértékeket is!

3.194. $\sqrt{-x}$ **3.195.** $-\sqrt[3]{x}$ **3.196.** $-\frac{1}{x^2}$

3.197. $(-x)^3$ **3.198.** $-x^2$ **3.199.** $-\sqrt{|x|}$

Határozzuk meg a következő függvények lehető legbővebb értelmezési tartományát, majd ábrázoljuk őket! Határozzuk meg az értékkészletüket! Színezzük pirosra az x tengelyen azokat a szakaszokat, ahol a függvény monoton növő, és kékre azokat, ahol monoton csökkenő! Határozzuk meg a szélsőértékhelyeket, ha vannak, és a szélsőértékeket is!

3.200. $\sin x$ **3.201.** $\cos x$ **3.202.** $\operatorname{tg} x$ **3.203.** $\operatorname{ctg} x$

Határozzuk meg a következő függvények lehető legbővebb értelmezési tartományát, majd ábrázoljuk őket! Határozzuk meg a függvények legkisebb pozitív periódusát is!

3.204. $\sin \pi x$

3.205. $-3\sin\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right) + 2$

Határozzuk meg a következő függvények lehető legbővebb értelmezési tartományát, majd ábrázoljuk őket! Határozzuk meg a függvények legkisebb pozitív periódusát is!

3.206. $\cos(x+\pi)$

3.207. $2\sin\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$

3.208. $\cos(2x+2)$

3.209. $-3\cos(2x-4)$

3.210. $\cos\left(\frac{x}{2} - \pi\right)$

3.211. $\frac{1}{2}\sin(-2x+\pi)+3$

3.212. Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = \sin^2 x$ és a $g(x) = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ függvények egyenlők!

Felhasználva az előző egyenlőséget, adjuk meg a következő kifejezések értékét trigonometrikus függvények használata nélkül!

3.213. $\sin^2 \frac{\pi}{8}$

3.214. $\sin^2\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

3.215. Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = \cos^2 x$ és a $g(x) = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ függvények egyenlők!

Felhasználva az előző egyenlőséget, adjuk meg a következő kifejezések értékét trigonometrikus függvények használata nélkül!

3.216. $\cos^2 \frac{5\pi}{12}$

3.217. $\cos^2 \frac{9\pi}{8}$

3.218. Számítsuk ki $\sin^2 x$ és $\cos^2 x$ értékét, ha $\operatorname{tg} x = t$.

Adjuk meg a következő számok értékét minél egyszerűbb, logaritmust nem használó alakban!

3.219. $8^{2/3}$

3.220. $\log_3 27$

3.221. $4^{\log_2 1}$

3.222. $\log_{1/2} 8$

Adjuk meg a következő számok értékét minél egyszerűbb alakban logaritmus használata nélkül!

3.223. $32^{-3/5}$ **3.224.** $\lg 0{,}0001$ **3.225.** $5^{\log_{25} 3}$ **3.226.** $\log_{1/3} 3$

Határozzuk meg a következő függvények lehető legbővebb értelmezési tartományát, majd ábrázoljuk őket! Határozzuk meg az értékkészletüket! Színezzük pirosra az x tengelyen azokat a szakaszokat, ahol a függvény monoton növő, és kékre azokat, ahol monoton csökkenő! Határozzuk meg a szélsőértékhelyeket, ha vannak, és a szélsőértékeket is!

3.227. 2^x **3.228.** $\log_2 x$ **3.229.** 2^{-x} **3.230.** $\log_2(-x)$

3.231. $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ **3.232.** $\log_{1/2} x$ **3.233.** $-\log_{1/2} x$ **3.234.** $|\lg x|$

Határozzuk meg a következő függvények lehető legbővebb értelmezési tartományát! Vannak-e a függvények között egyenlők?

3.235. $\sqrt{x^2}$ **3.236.** $\left(\sqrt{x}\right)^2$ **3.237.** $\log_2 2^x$

3.238. $2^{\log_2 x}$ **3.239.** $\sqrt[3]{x^3}$ **3.240.** $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3$

3.241. Hol van a hiba a következő levezetésben?

$$\log_7 \frac{4}{5} = \log_7 \frac{4}{5}$$

$3 > 2$, ezért

$$3\log_7 \frac{4}{5} > 2\log_7 \frac{4}{5}.$$

A logaritmus azonosságát felhasználva:

$$\log_7 \left(\frac{4}{5}\right)^3 > \log_7 \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

Tehát:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^3 > \left(\frac{4}{5}\right)^2,$$

azaz

$$\frac{64}{125} > \frac{16}{25} = \frac{80}{125}.$$

Ábrázoljuk a következő függvényeket!

3.242. $|x|$

3.243. $|x-3|+2$

3.244. $|x^2-3|$

Ábrázoljuk a következő függvényeket!

3.245. $||x|-3|$

3.246. $(||x|-3|)^2$

3.247. $|[x]|$

Ábrázoljuk a következő függvényeket! Határozzuk meg az értékkészletüket! Színezzük pirosra az x tengelyen azokat a szakaszokat, ahol a függvény monoton növő, és kékre azokat, ahol monoton csökkenő! Határozzuk meg a szélsőértékhelyeket, ha vannak, és a szélsőértékeket is!

3.248. $\begin{cases} x, & \text{ha } x < 1 \\ x^2, & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}$

3.249. $\begin{cases} -x^2+1, & \text{ha } x < 0 \\ -x+1, & \text{ha } 0 \leq x < 1 \\ (x-1)^2, & \text{ha } 1 \leq x \end{cases}$

Határozzuk meg a következő függvények értelmezési tartományát, majd ábrázoljuk őket! Határozzuk meg az értékkészletüket! Színezzük pirosra az x tengelyen azokat a szakaszokat, ahol a függvény monoton növő, és kékre azokat, ahol monoton csökkenő! Határozzuk meg a szélsőértékhelyeket, ha vannak, és a szélsőértékeket is! Vannak-e a függvények között párosak, páratlanok, periodikusak?

3.250. $\left[\frac{1}{x}\right]$

3.251. $x \cdot \left[\frac{1}{x}\right]$

3.252. $\frac{1}{[x]}$

3.253. $x \cdot \frac{1}{[x]}$

3.254. $\left\{\frac{1}{x}\right\}$

3.255. $x \cdot \left\{\frac{1}{x}\right\}$

3.256. $\frac{1}{\{x\}}$

3.257. $x \cdot \frac{1}{\{x\}}$

3.258. Legyen $f(x) = 2x-3$, és $g(x)$ egy mindenütt értelmezett függvény. Milyen függvénytranszformációval tudjuk ábrázolni az $f(g(x))$ és a $g(f(x))$ függvényeket $g(x)$ grafikonjából kiindulva?

Oldjuk meg grafikusan a következő egyenlőtlenségeket!

3.259. $x^2-4 \geq 0$

3.260. $\sqrt[3]{x+3}+8 < 0$

Oldjuk meg grafikusan a következő egyenlőtlenségeket!

3.261. $x^2 - 3 < 0$

3.262. $(x-3)^2 - 5 \geq 0$

3.263. $\sqrt{x+3} + 4 > 5$

3.264. $\sqrt[3]{x+3} - 1 \geq 0$

3.265. $\dfrac{1}{x-2} + 3 > 4$

3.266. $\dfrac{1}{(x+2)^2} + 5 \leq 6$

Oldjuk meg algebrailag is, és grafikusan is a következő egyenlőtlenségeket!

3.267. $\left|\dfrac{1}{x} - 2\right| < 4$

3.268. $\left|\dfrac{1}{x^2} - 4\right| > 6$

Oldjuk meg algebrailag is, és grafikusan is a következő egyenlőtlenségeket!

3.269. $\left|\dfrac{1}{x}\right| - 1 \geq 1$

3.270. $\dfrac{1}{x^2} + 1 < 2$

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket algebrai úton is, és grafikusan is!

3.271. $\log_2 x < 8$

3.272. $\log_{0,1} x > -2$

3.273. $2^{-x} < 64$

3.274. $\sin x \geq \dfrac{1}{2}$

3.275. $\cos x \leq \dfrac{1}{2}$

3.276. $\operatorname{tg} x < 1$

Ábrázoljuk a számegyenesen a következő egyenlőtlenségek megoldáshalmazát!

3.277. $|x-2| > 5$

3.278. $|x+5| \geq 4$

Ábrázoljuk a számegyenesen a következő egyenlőtlenségek megoldáshalmazát!

3.279. $|4-x| \leq 3$

3.280. $|7+x| < 3$

3.281. Írjuk fel a kör területét a kör kerületének függvényében! (Például a kör területe a sugár függvényeben $T(r) = r^2\pi$.) Határozzuk meg a függvény értelmezési tartományát!

3.282. Írjuk fel a kör területét egy feleakkora sugarú kör területének, illetve kerületének a függvényében! Jelöljük a függő és a független változót! Határozzuk meg a függvény értelmezési tartományát!

3.283. Írjuk fel a gömb felszínét a gömb térfogatának függvényében! Határozzuk meg a függvény értelmezési tartományát! Jelöljük a függő és a független változót!

3.284. Adjuk meg a kocka térfogatát és felszínét a testátló függvényeben! Jelöljük a függő és a független változót! Határozzuk meg a függvények értelmezési tartományát!

3.285. Adjuk meg a kocka testátlóját a kocka térfogatának függvényeben! Jelöljük a függő és a független változót! Határozzuk meg a függvény értelmezési tartományát!

3.286. Egy kerékpáros egy r sugarú, kör alakú pályán megy körbe-körbe állandó v kerületi sebességgel. Az elfordulás φ szögét a kör középpontját az induló kerékpárossal összekötő sugártól mérjük pozitív irányban. Adjuk meg a kerékpáros által megtett utat φ függvényében!

3.287. Írjuk fel az r sugarú körcikk területét a középponti szög függvényében!

3.288. Egy téglatest alakú, $250\ \mathrm{m}^2$ alapterületű medencébe egy csapból 500 liter/perc sebességgel folyik be a víz. Adjuk meg a víz h magasságát az idő függvényében, ha a medence kezdetben üres volt, és a csapot délben nyitották ki! Mikor telik meg a medence a $3/4$ részéig, ha a mélysége 2 méter?

3.289. Egy a élű kocka csúcsai egy gömbön vannak. Adjuk meg a gömb R sugarát az a élhosszúság függvényeben!

3.290. Egy a élű kocka éleit érinti az R sugarú gömb. Adjuk meg az kocka a élét az R sugár függvényében!

3.291. Egy h magasságból leeső kő sebessége az idő függvényében $v(t) = gt$, ahol a g állandó a gravitációs gyorsulás. A kő által megtett út az idő függvényében $s(t) = \dfrac{1}{2}gt^2$. Adjuk meg a kő által megtett utat a sebesség függvényében!

3.292. Egy ablak egy l szélességű téglalap, és a téglalapon nyugvó félkör. Készítsünk rajzot, írjuk be az ábrába a jelöléseket! Adjuk meg az ablak kerületét és területét a téglalap h magasságának a függvényében! Jelöljük a függő és a független változót!

3.293. Írjuk fel a gömb felszínét egy kétszer akkora sugarú gömb térfogatának a függvényében! Jelöljük a függő és a független változót!

3.294. Egy téglatest alakú tartály alapterülete T, magassága h. A tartály 12 órakor tele van, pont ekkor kezd a vízszint egyenletes v sebességgel csökkenni. Adjuk meg a tartályban levő víz térfogatát az idő függvényében, ha az időt 12 órakor kezdjük mérni!

3.295. Adjunk meg olyan mindenütt értelmezett függvényt, amelyikre teljesül, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Van-e olyan mindenütt értelmezett függvény, amelyikre minden $x \in \mathbb{R}$ esetén igaz, hogy

3.296. $f(x) - f(-x) = 5$;

3.297. $f(x) - f(-x) = x$;

3.298. $f(x) - f(-x) = x^2$;

3.299. $2f(x) + 3f(1-x) = 5$?

3.300. Ábrázoljuk a derékszögű koordinátarendszerben azokat a pontokat, amelyek koordinátáira teljesül, hogy $\sin y = \sin x$.

Sorozatok

4.1. Sorozatokról általában

A **sorozatok** a pozitív egész számokon értelmezett függvények. Mivel az értelmezési tartomány a természetes számok halmaza, a sorozatoknak mindig végtelen sok tagja van. Ha az értékkészlet része a valós számhalmaznak, valós számsorozatról beszélünk. Mi a továbbiakban mindig valós számsorozatokkal foglalkozunk.
A sorozatok jelölése: $(a_n), (b_n), \ldots$, a sorozatok n-edik tagjának jelölése: $a_n, b_n, \ldots$.
A sorozatokat a tagjaik meghatározásával adjuk meg. A továbbiakban, ha mást nem mondunk, az i, j, k, l, m, n betűk pozitív egészeket jelölnek.

Példák:

— Legyen a_n az n-edik pozitív páros szám. így $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 6, \ldots, a_k = 2k, \ldots$

— Legyen $b_n = \dfrac{n}{n+1}$ Tehát $b_1 = \dfrac{1}{2}, b_2 = \dfrac{2}{3}, \ldots, b_l = \dfrac{l}{l+1}, \ldots$

4.2. Rekurzív sorozatok

Az előző példákban a sorozat n-edik tagját ki tudtuk számolni közvetlenül n-ből.
A következő példákban a sorozat valamelyik tagjának kiszámolásához ismernünk kell a sorozat előző tagját vagy tagjait. Ezt a megadást **rekurziónak** hívjuk.

Példák:

— Legyen $a_1 = 2$, és $a_{n+1} = (-1)^{a_n} + n$. Ekkor

$$a_1 = 2, a_2 = (-1)^2+1 = 2, a_3 = (-1)^2+2 = 3, a_4 = (-1)^3+3 = 2, a_5 = (-1)^2+4 = 5 \ldots$$

Itt nem tudjuk közvetlenül n segítségével megadni a sorozat n-edik tagját.

— Legyen $a_1 = 0, a_2 = 1$ és $a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$. Most

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1/2, a_4 = 3/4, a_5 = 5/8, \ldots$$

— Legyen $a_1 = 0, a_2 = 1$ és $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$. Most

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 2, a_5 = 3, a_6 = 5, \ldots$$

Sokszor a feladatok megoldásához hasznos, ha a **rekurzióval** megadott sorozatokat átírjuk olyan alakba, ahol a sorozat tagjait közvetlenül ki tudjuk számítani az indexükből.

Példa: Legyen $a_1 = 2$, és $a_{n+1} = (-1)^{a_n} + 2$. Határozzuk meg a sorozat tagjait közvetlenül az index segítségével!
Megoldás: Az ilyen típusú feladatokban célszerű kiszámolni a sorozat első tagjait:

$$a_1 = 2, a_2 = (-1)^2 + 2 = 3, a_3 = (-1)^3 + 2 = 1, a_4 = (-1)^1 + 2 = 1, a_5 = (-1)^1 + 2 = 1.$$

Ezután az a **sejtésünk**, hogy $n > 2$ esetén $a_n = 1$. Ezt a **sejtést** például teljes indukcióval bizonyíthatjuk be.
Kiinduló tag: $n = 3, \quad a_3 = 1$
Indukciós feltevés: Tegyük fel hogy valamilyen $n \geq 3$ esetén $a_n = 1$.
Ekkor $a_{n+1} = (-1)^{a_n} + 2 = (-1)^1 + 2 = 1$, tehát a sorozat 3-nál nagyobb indexű összes tagja 1.
Megjegyzés: A matematikában az axiómák kivételével minden állítást bizonyítani kell. Az egyszerű vagy egyszerűnek látszó állításokat is. Bizonyítás közben felhasználhatjuk az axiómákat és a már korábban bizonyított állításokat. Ahhoz, hogy tudjuk, hogy mit akarunk bizonyítani sejtésekre van szükségünk. A sejtésekhez rajzokkal, konkrét értékek kiszámításával juthatunk el. Nagyon fontos, hogy meg tudjuk különböztetni a sejtéseket a bizonyított állításoktól.

4.3. Speciális sorozatok: számtani és mértani sorozatok

4.1. Definíció: Ha egy sorozatban a szomszédos tagok különbsége állandó, akkor a sorozatot számtani sorozatnak nevezzük.

4.2. Definíció: Ha egy sorozatban a szomszédos tagok hányadosa állandó, akkor a sorozatot mértani sorozatnak nevezzük.

Megjegyzés: A legtöbb sorozat se nem számtani, se nem mértani sorozat.
Példa: Melyik sorozat számtani, melyik mértani a következő sorozatok közül?

$$a_n = \frac{3}{2^n}, \qquad b_n = \frac{1}{n}$$

Megoldás:

$$a_2 - a_1 = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}, \text{ és } a_3 - a_2 = \frac{3}{8} - \frac{3}{4} = -\frac{3}{8},$$

tehát a szomszédos tagok különbsége nem állandó, tehát a sorozat nem számtani sorozat.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3/2^{n+1}}{3/2^n} = \frac{1}{2}$$

állandó, tehát (a_n) mértani sorozat.
Megjegyzés: Ahhoz elég két, egymástól eltérő különbséget mutatni, hogy biztosan megállapíthassuk, hogy a szomszédos tagok különbségei nem állandók. Annak bizonyításához, hogy a szomszédos tagok hányadosai állandók viszont nem elég két, egymással megegyező hányadost mutatni.

Ebben az esetben az összes hányadost ellenőrizni kell, és ezt úgy tudjuk megtenni, ha a hányadost általánosan írjuk fel.

$$b_2 - b_1 = \frac{1}{2} - 1 \neq \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = b_3 - b_2,$$

tehát a szomszédos tagok különbsége nem állandó, tehát a sorozat nem számtani sorozat.

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{1/2}{1} \neq \frac{1/3}{1/2} = \frac{b_3}{b_2},$$

tehát a szomszédos tagok hányadosa nem állandó, tehát a sorozat nem mértani sorozat.

4.4. Feladatok

Adjuk meg a következő sorozatok első 6 tagját, valamint a k-adik és $(k+1)$-edik tagot!

4.1. n^2

4.2. $1+2+3+\cdots+n$

4.3. $a_1 = 1$, és $a_{n+1} = na_n$, ha $n \geq 1$.

4.4. $\begin{cases} 2, & \text{ha } 2 \mid n \\ n, & \text{ha } 2 \nmid n \end{cases}$

Adjuk meg a következő sorozatok első 6 tagját, valamint a k-adik és $(k+1)$-edik tagot!

4.5. n^2+1

4.6. $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$

4.7. $\begin{cases} -\sqrt{n}, & \text{ha } n \text{ prím} \\ n+3, & \text{egyébként} \end{cases}$

4.8. $\begin{cases} [\cos n\pi], & \text{ha } n > 3 \\ \{\sin n\pi\}, & \text{ha } n \leq 3 \end{cases}$

4.9. $\begin{cases} \cos n\pi, & \text{ha } n \leq 3 \\ \sin n\pi, & \text{ha } n > 3 \end{cases}$

4.10. $a_1 = 3$, és $a_{n+1} = \dfrac{1}{a_n+1}$, ha $n \geq 1$.

4.11. $a_1 = 0, \quad a_2 = 1$, és $a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$, ha $n \geq 1$.

4.12. $a_1 = 0 \quad a_2 = 1$, és $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, ha $n \geq 1$.

4.13. Adjuk meg az első n tag összegét a következő sorozatok közül azoknál, amelyek számtani, illetve mértani sorozatok!

(a) $\dfrac{1}{n}$ **(b)** $3n-7$ **(c)** $\cos 2n\pi$ **(d)** n^2

(e) $3\cdot 2^n$ **(f)** $5\cdot 2^{-n}$ **(g)** $\log_2 n$ **(h)** $\sin\left(n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$

4.14. Legyen $a_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$. Számítsuk ki az első n tag összegét!

4.15. Mutassunk olyan N pozitív egész számot, amelyre igaz az, hogy ha $n > N$, akkor $4n^5 + 3n^2 + 100 > n^4$. Hány megoldása van a feladatnak?

4.16. Legyen $a_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n^2}$.
Van-e olyan tagja a sorozatnak, amelyik nagyobb, mint 100?

4.17. Adjunk meg olyan N számot, hogy minden $n > N$ esetén teljesüljön az $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} < \dfrac{1}{100}$ egyenlőtlenség!

4.18. Mutassunk olyan N pozitív egész számot, amelyre igaz az, hogy ha $n > N$, akkor $3n^4 + 2n^2 + 1 > n^3 + 1000$. Hány megoldása van a feladatnak?

4.19. Mutassunk olyan N pozitív egész számot, amelyre igaz az, hogy ha $n > N$, akkor $3n^4 - 2n^3 > n^3 + 1000$. Hány megoldása van a feladatnak?

Van-e a következő sorozatoknak 100-nál nagyobb tagjuk? Van-e olyan $N \in \mathbb{N}^+$, amelyre teljesül, hogy minden $n > N$ esetén $a_n > 100$? Van-e a sorozatoknak 10-nél kisebb tagjuk? Van-e olyan $M \in \mathbb{N}^+$, amelyre teljesül, hogy minden $n > M$ esetén $a_n < 10$?

4.20. $a_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n}$

4.21. $a_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{1+2+3+\cdots+n}$

4.22. $a_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\cdots+\sqrt{2n}}{1+2+3+\cdots+n}$

4.23. $a_n = \dfrac{20\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}\right)}{n^2}$

4.24. $a_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

4.25. $a_n = \dfrac{20\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}\right)}{n\sqrt{n}}$

4.26. $a_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}$

Van-e olyan $n \in \mathbb{N}^+$, amelyre $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ nagyobb, mint

4.27. 1 **4.28.** 100 **4.29.** $\sqrt{n}$

4.30. $\frac{n}{2}$ **4.31.** n **4.32.** $\frac{n}{2}+1$

4.33. Bizonyítsuk be a binomiális tétel segítségével, hogy minden pozitív egész n számra igaz, hogy $2^n > n$.

4.34. Bizonyítsuk be a binomiális tétel segítségével, hogy minden pozitív c, és minden pozitív egész n számra igaz, hogy $(1+c)^n > nc$.

Adjunk meg olyan N számot, hogy minden $n > N$ esetén teljesüljön, hogy

4.35. $1{,}01^n > 100$ **4.36.** $0{,}9^n < \frac{1}{100}$ **4.37.** $\sqrt[n]{2} < 1.01$

Sorozatok versenyfutása: Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat a versenyfutásban legyőzi a (b_n) sorozatot, ha van olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy minden $n > N$ esetén $a_n > b_n$. Határozzuk meg, hogy a következő feladatokban melyik sorozat nyeri a versenyfutást!

4.38. $a_n = n^{15} + 3n^6 - 2n + 500, \quad b_n = 1000n^4 + 100n^3 + 1$

4.39. $a_n = 1000n^5 + 100n^3 + 6, \quad b_n = n^{40} + \frac{1}{n}$

4.40. $a_n = 1000n^4 + 100n^3 + 1, \quad b_n = n^5 - \sqrt{n} - 300$

4.41. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad b_n = 0{,}0001$

4.42. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad b_n = \frac{1}{n}$

4.43. $a_n = \sqrt{n^2+n} - n, \quad b_n = 1$

4.44. $a_n = \sqrt{n^2+n} - n, \quad b_n = \frac{1}{2}$

4.45. $a_n = 1{,}001^n, \quad b_n = 1000$

4.46. $a_n = \sqrt[n]{2}, \quad b_n = 1 + \frac{1}{n}$

4.47. $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{50}, \quad b_n = 1 + \dfrac{50}{n} + \dfrac{2500}{n^2}$

4.48. Vannak-e olyan (a_n) és (b_n) sorozatok, amelyek közül egyik sem győzi le a másikat? Vannak-e olyan (a_n) és (b_n) sorozatok, amelyek közül mindkettő legyőzi a másikat?

4.49. Vannak-e olyan (a_n) és (b_n) különböző sorozatok, amelyek közül mindegyik legyőzi a $c_n = n$ sorozatot, de (a_n) és (b_n) versenyfutásában nincs győztes?

4.50. Legyen (a_n) és (b_n) két pozitív tagú sorozat! Határozzuk meg a versenyfutás lehetséges eredményeit a_n és b_n, illetve $\dfrac{a_n + b_n}{2}$ és $\sqrt{a_n b_n}$ között.

4.51. Tegyük fel, hogy van olyan $K \in \mathbb{N}^+$, hogy minden $n > K$ esetén $a_n > b_n$, és hogy van olyan $L \in \mathbb{N}^+$, hogy minden $n > L$ esetén $x_n > y_n$. Melyik sorozat nyeri a versenyfutást: $a_n x_n + b_n y_n$ vagy $a_n y_n + b_n x_n$?

4.52. Bizonyítsuk be, hogy $n > 100$ esetén $n^5 + 3n + 2 > 10n^3 + 3n^2 + 1$. Igaz-e, hogy az $n^5+3n+2 > 10n^3+3n^2+1$ egyenlőtlenséget minden 100-nál nagyobb egész szám kielégíti? Igaz-e, hogy az $n^5 + 3n + 2 > 10n^3 + 3n^2 + 1$ egyenlőtlenség megoldása az egész számok halmazán $n > 100$?

Tegyük fel, hogy van olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy minden $n > N$ esetén $a_n > b_n$. Következnek-e ebből a következő feladatok állításai?

4.53. Minden $n < N$ esetén $a_n < b_n$.

4.54. Van olyan $n < N$, hogy $a_n < b_n$.

4.55. Az $a_n > b_n$ egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha $n > N$.

Tegyük fel, hogy van olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy minden $n > N$ esetén $a_n > b_n$. Lehetnek-e igazak a következő feladatok állításai?

4.56. Minden $n < N$ esetén $a_n < b_n$.

4.57. Van olyan $n < N$, hogy $a_n < b_n$.

4.58. Az $a_n > b_n$ egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha $n > N$.

Mi a következő állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

4.59. **P:** A versenyfutásban az (a_n) sorozat legyőzi a (b_n) sorozatot.
Q: Végtelen sok $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n > b_n$.

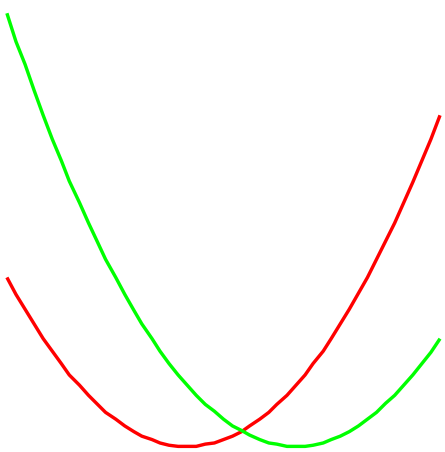
4.60. **P:** A versenyfutásban az (a_n) sorozat legyőzi a (b_n) sorozatot.
Q: Az $a_n < b_n$ egyenlőtlenség csak véges sok $n \in \mathbb{N}^+$ esetén teljesül.

Vegyes feladatok

5.1. Képrejtvények

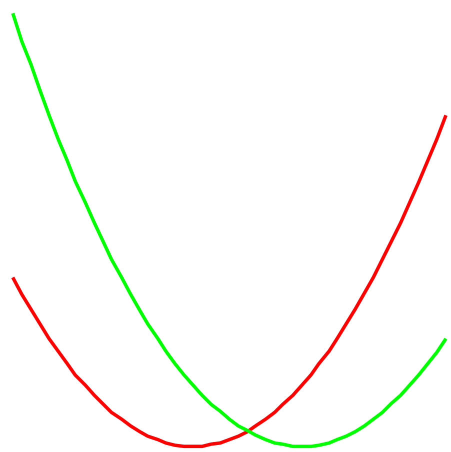
5.1. Ábrázoltunk néhány függvényt, minden koordinátarendszerben kettőt, de nem rajzoltuk ki a koordinátarendszereket. Találjuk ki, hogy melyik képlethez tartozik a zöld, és melyikhez a piros grafikon!

(a)



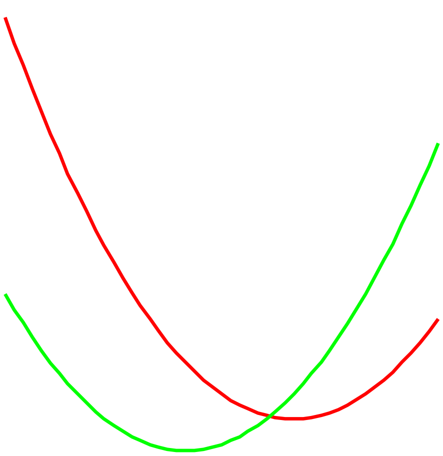
x^2 **és** $(x-3)^2$

(b)



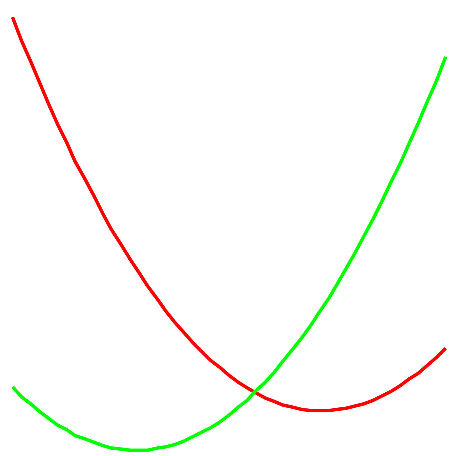
x^2 **és** $(x+5)^2$

(c)



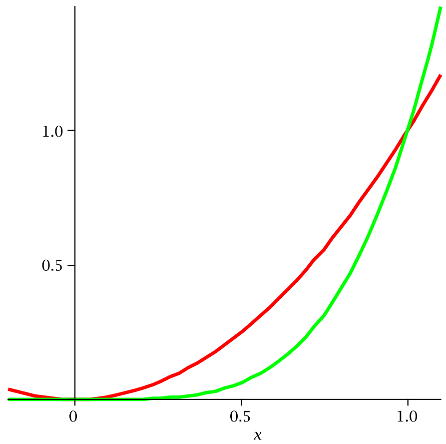
x^2-5 **és** $(x-3)^2$

(d)



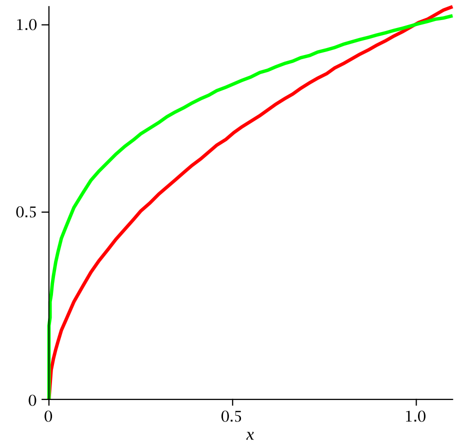
$(x-3)^2+5$ **és** $(x+3)^2-5$

(e)



x^2 **és** x^4

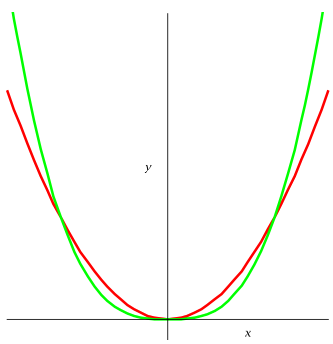
(f)



$\sqrt{x}$ **és** $\sqrt[4]{x}$

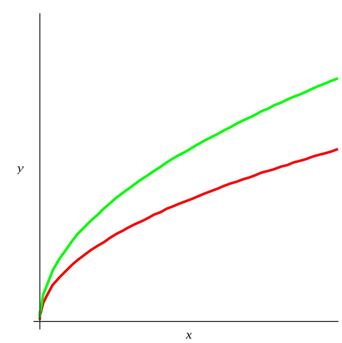
5.2. Ábrázoltunk néhány függvényt, minden koordinátarendszerben kettőt. Találjuk ki, hogy melyik képlethez tartozik a zöld, és melyikhez a piros grafikon!

(a)



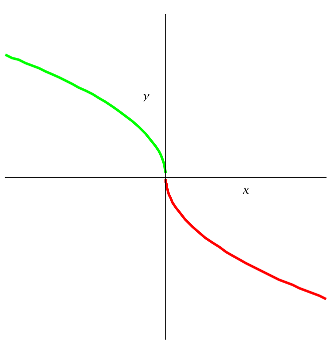
x^2 **és** $|x^3|$

(b)



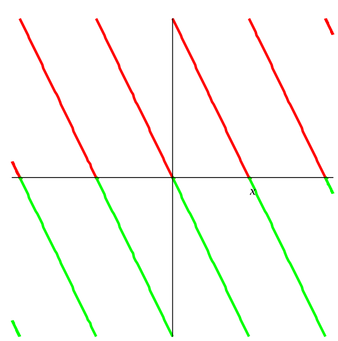
$2\sqrt{x}$ **és** $\sqrt{2x}$

(c)



$-\sqrt{x}$ **és** $\sqrt{-x}$

(d)

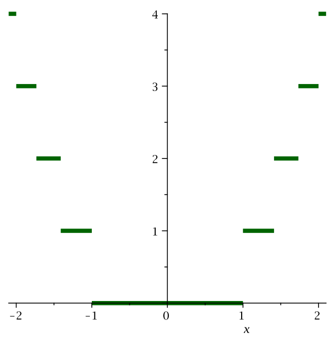


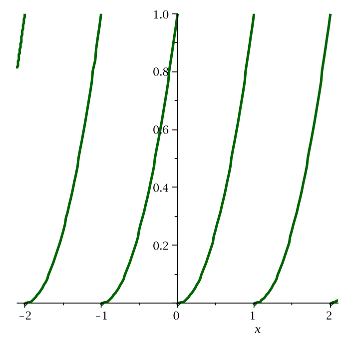
$\{-x\}$ **és** $-\{x\}$

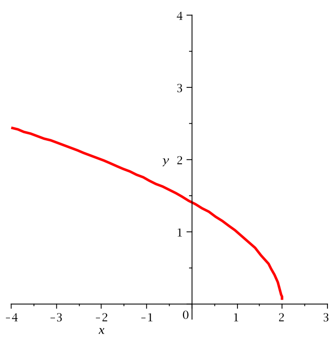
5.3. A következő függvények közül ábrázoltunk néhányat. Találjuk meg az ábrákhoz tartozó függvényeket!

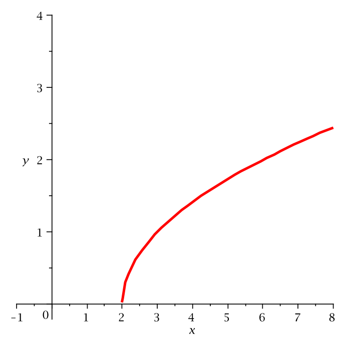
$\sqrt{x-2}$; $\sqrt{x+2}$; $\sqrt{2-x}$; $-\sqrt{x+2}$;

$[x]^2$; $[x^2]$; $\{x^2\}$; $\{x\}^2$.

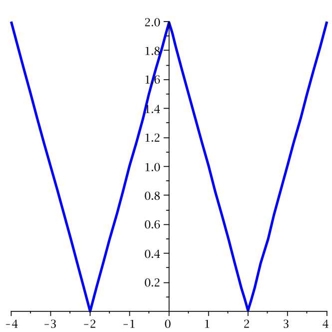


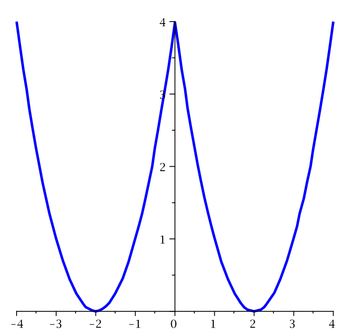






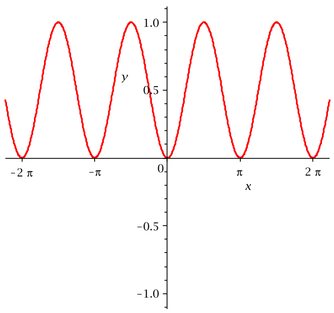
5.4. Adjuk meg a grafikonokhoz tartozó függvényeket!

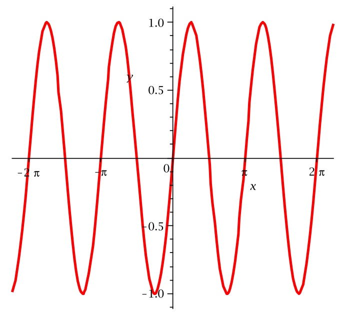


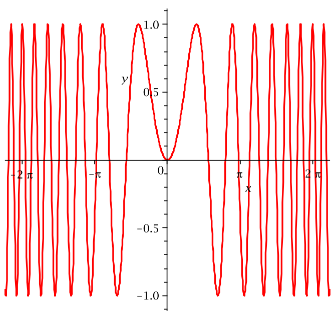


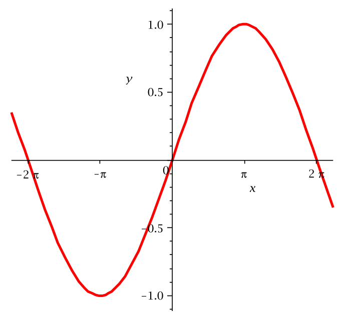
5.5. A következő függvények közül ábrázoltunk néhányat a $[-7, 7]$ intervallumon. Találjuk meg az ábrákhoz tartozó függvényeket!

$\sin x/2$	$\sin 2x$	$\sin^2 x$
$\sin x^2$	$\sin x$	$\sin(-x)$



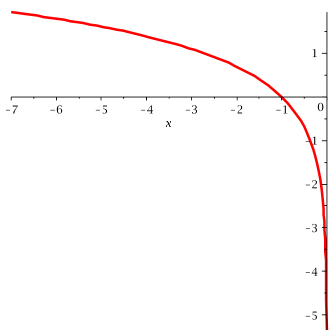


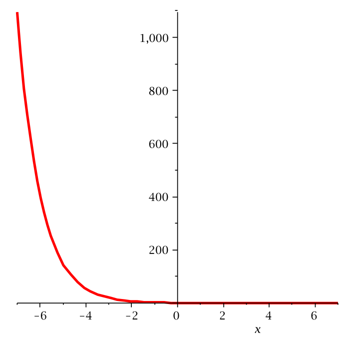


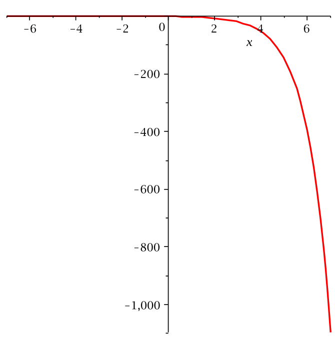


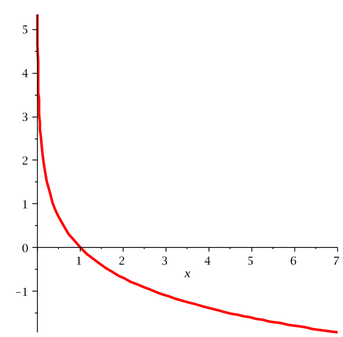
5.6. A következő függvények közül ábrázoltunk néhányat. Találjuk meg az ábrákhoz tartozó függvényeket!

$\log_2 x$	$\log_2(-x)$	$-\log_2 x$
2^x	2^{-x}	-2^x

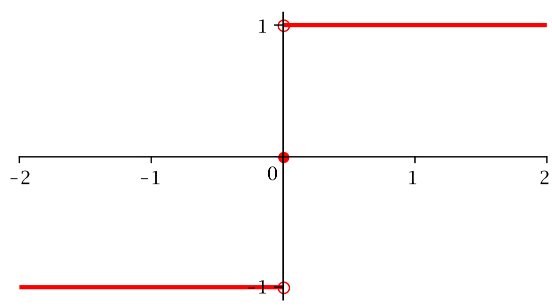


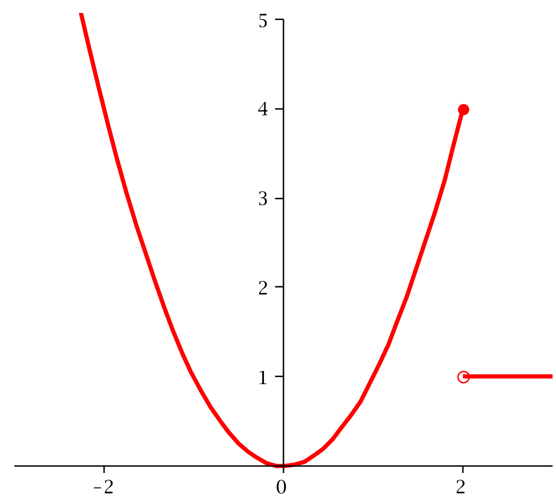


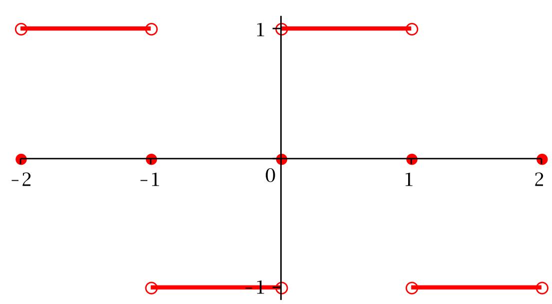




5.7. Adjunk meg formulákat a következő függvénygrafikonokhoz!



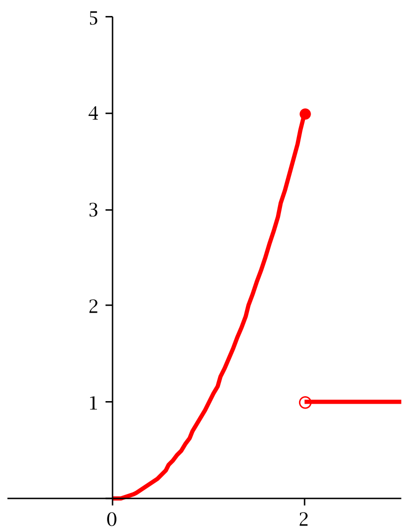


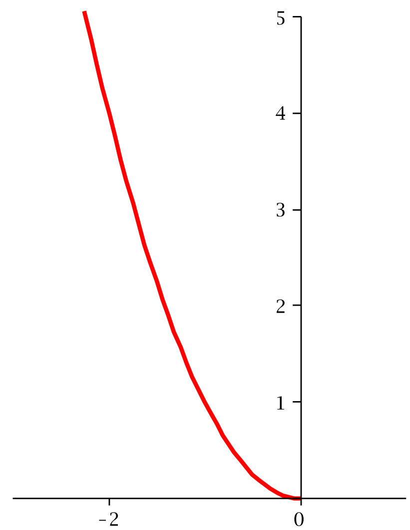


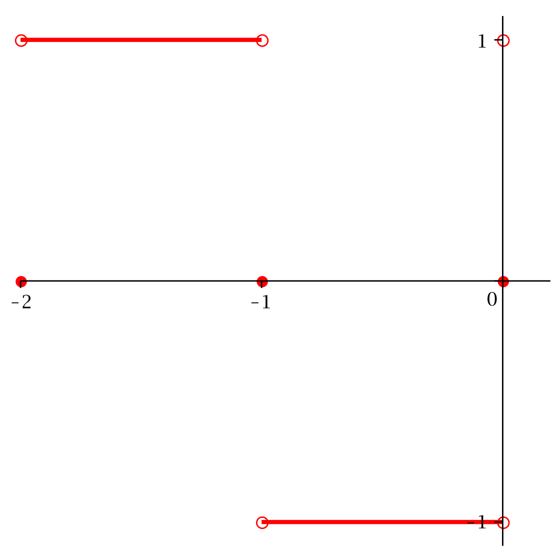
5.8. Adjunk meg formulákat a következő „fél” függvénygrafikonokhoz úgy, hogy a formula

(a) páros **(b)** páratlan

függvényt határozzon meg!

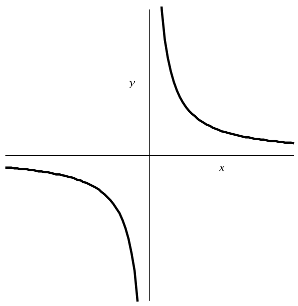




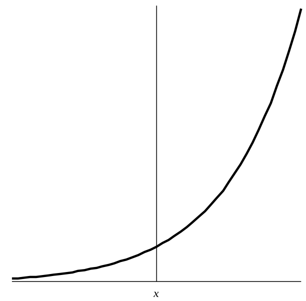


5.9. Keressünk inverz párokat a grafikonok között!

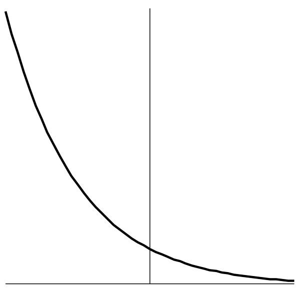
(a)



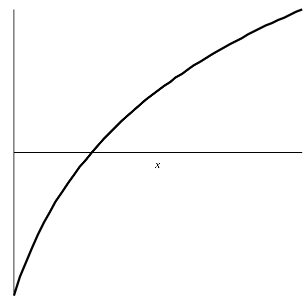
(b)



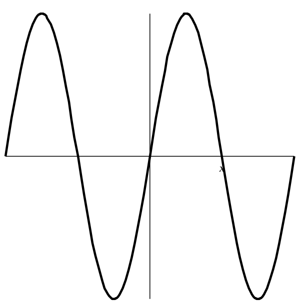
(c)



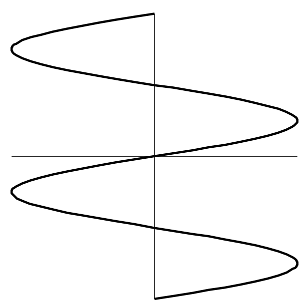
(d)



(e)



(f)



5.2. Igaz–hamis kérdések

Melyik állítás igaz, melyik hamis minden olyan x esetén, ahol az adott részfeladatban minden képlet értelmes? (A választ mindig indokoljuk meg!)

5.10. $\sqrt{x^2+1} = |x| + 1$

5.11. $\sqrt[3]{x^9-8} = x^3 - 2$

5.12. $\frac{1}{x} < \frac{1}{x^2}$

5.13. $\frac{1}{x^2} < \frac{1}{x}$

5.14. $x < x^3$

5.15. $x^2 > x^4$

5.16. $x > \frac{1}{x}$

5.17. $x > \sqrt{x}$

5.18. $\frac{1}{x} < \sqrt{x}$

5.19. $\sqrt{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x}$

Melyik állítás igaz, melyik hamis minden olyan x esetén, ahol az adott részfeladatban minden képlet értelmes? (A választ mindig indokoljuk meg!)

5.20. $\left|x^2-2\right| = x^2+2$

5.21. $|x+2| = |x| + 2$

5.22. $|2x| = 2\,|x|$

5.23. $|x+2| \geq |x| + 2$

5.24. $2[x] = [2x]$

5.25. $2\{x\} = \{2x\}$

5.26. $\{3x\} = 3x - [3x]$

5.27. $\{-x\} = -\{x\}$

5.28. $[-x] = -[x]$

5.29. $\{x\} + [x] = x$

5.30. $\{-x\} = \{x\}$

5.31. $|\{x\}| = \{x\}$

Melyik állítás igaz, melyik hamis, amennyiben minden képlet értelmes? A válaszokat indokoljuk!

5.32. $\sin 3x$ egyik periódusa 6π.

5.33. $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$

5.34. $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

5.35. $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

5.36. $\sin x = \sin(-x)$

5.37. $\cos x = \cos(-x)$

5.38. $180 = \pi$

5.39. $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} x}$

5.40. $\sqrt{5}$ irracionális.

5.41. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ irracionális.

Melyik állítás igaz, melyik hamis, amennyiben minden képlet értelmes? A válaszokat indokoljuk! A hamis állításoknak írjuk le a tagadását!

5.42. Ha $ab \in \mathbb{Q}$, akkor $a \in \mathbb{Q}$ és $b \in \mathbb{Q}$.

5.43. Ha $ab \notin \mathbb{Q}$, akkor $a \notin \mathbb{Q}$ vagy $b \notin \mathbb{Q}$.

5.44. Ha $ab \notin \mathbb{Q}$, akkor $a \notin \mathbb{Q}$ és $b \notin \mathbb{Q}$.

5.45. $2^{-x} = -2^x$

5.46. $-\log_2 x = \log_2(-x)$

5.47. Ha $\sin x < \dfrac{1}{2}$, akkor $x < \dfrac{\pi}{6}$.

5.48. Ha $2^x = 2^3$, akkor $x = 3$.

5.49. Ha $\cos x = \cos\dfrac{\pi}{6}$, akkor $x = \dfrac{\pi}{6}$.

5.50. $\log_5 2 + \log_5\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right) + \log_5\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right) + \log_5\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = 0$

Melyik állítás igaz? A válaszokat indokoljuk! A hamis állításoknak írjuk le a tagadását!

5.51. Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény páros, akkor nem lehet az egész számegyenesen szigorúan monoton.

5.52. Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az egész számegyenesen szigorúan monoton növő, akkor f nem lehet páros.

5.53. Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény páratlan, akkor nem lehet az egész számegyenesen szigorúan monoton.

5.54. Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az egész számegyenesen szigorúan monoton növő, akkor f nem lehet páratlan.

5.55. Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény páratlan, akkor az egész számegyenesen szigorúan monoton.

5.56. Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény periodikus, akkor végtelen sok periódusa van.

5.57. A konstans függvénynek nincs legkisebb pozitív periódusa.

5.58. $\sin 2x + \cos 3x$ legkisebb pozitív periódusa 6π.

5.59. Ha $f(x) = \sin x$ és $g(x) = \log_2 x$, akkor $f(g(x))$ legbővebb lehetséges értelmezési tartománya $(0, \infty)$.

5.60. Ha $f(x) = \sin x$ és $g(x) = \log_2 x$, akkor $g(f(x))$ legbővebb lehetséges értelmezési tartománya $\mathbb{R}$.

5.61. Ha egy függvénygrafikonnak van szimmetriatengelye, akkor a függvény páros.

5.62. Ha egy függvénygrafikonnak van szimmetria-középpontja, akkor a függvény páratlan.

Melyik állítás igaz, amikor a feladatban szereplő összes képlet értelmes? A válaszokat indokoljuk! A hamis állításoknak írjuk le a tagadását!

5.63. Ha $x^2 > 25$, akkor $x > 5$.

5.64. Ha $x > 5$, akkor $x^2 > 25$.

5.65. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ minden olyan valós a, b valós számokra, amelyekre az egyenlőtlenség mindkét oldala értelmes.

5.66. Van olyan függvény, amelyik egyszerre monoton nő és monoton csökken a $(0, 1)$ intervallumon.

5.67. Ha az f függvény nem monoton növő $(0, 1)$-en, akkor monoton csökkenő $(0, 1)$-en.

5.68. Minden függvénynek van inverze.

5.69. Minden páros függvénynek van inverze.

5.70. Minden páratlan függvénynek van inverze.

5.71. Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény páros, akkor nincs inverze.

5.72. Ha az f függvény páratlan, akkor van inverze.

5.73. Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek van inverze, akkor a függvény nem páros.

5.74. Ha az f függvénynek van inverze, akkor a függvény páratlan.

Melyik állítás igaz? A válaszokat indokoljuk! A feladatokban A, B és C a valós számok részhalmazai, P, Q és R pedig állítások.

5.75. Ha $A \subset B$ és $B \subset C$, akkor $A \subset C$.

5.76. Ha $a \in A$ és $A \subset B$, akkor $a \in B$.

5.77. Ha $A \cup B = C$, akkor $C \setminus B = A$.

5.78. Ha $A \setminus B = \emptyset$, akkor $A = B$.

5.79. Ha $A \cap B = C$, akkor $A \subset C$.

5.80. Ha **P** $\Longrightarrow$ **Q** és **Q** $\Longrightarrow$ **R**, akkor **P** $\Longrightarrow$ **R.**

5.81. Ha **P** igaz, és **Q** hamis, akkor a **P** állításból nem következik a **Q** állítás.

5.82. Ha minden olyan esetben, amikor **P** igaz, **Q** is igaz, akkor a **P** állításból következik a **Q** állítás.

5.83. Ha **P** $\Longrightarrow$ **Q**, és **P** $\Longrightarrow$ **R**, akkor a **Q** és **R** állítások ekvivalensek.

Melyik állítás igaz, melyik hamis, ha a feladatokban szereplő képletek értelmesek? (A választ mindig indokoljuk meg!)

5.84. $\sin 3x$ egyik periódusa 6π

5.85. $\operatorname{tg} \frac{x}{3}$ egyik periódusa $\frac{\pi}{6}$

5.86. Van olyan függvény, amelyik páros és szigorúan monoton növő.

5.87. Van olyan függvény, amelyik páratlan vagy szigorúan monoton növő.

5.88. Van olyan függvény, amelyiknek a grafikonja kör.

5.89. Ha egy függvény grafikonja nem metszi az x tengelyt, akkor a függvény minden helyettesítési értéke egyforma előjelű.

5.90. Minden sorozat számtani vagy mértani sorozat.

5.91. Van olyan sorozat, amelyik nem számtani sorozat.

5.92. Van olyan sorozat, amelynek végtelen sok 100-nál nagyobb, és végtelen sok 10-nél kisebb tagja van.

5.93. Ha egy sorozat monoton nő, akkor a sorozatnak van 100-nál nagyobb tagja.

5.3. Szövegértés, szövegalkotás

5.94. Ugyanazt jelentik-e a következő mondatok? Ha van eltérés a jelentések között, adjunk olyan példákat, amelyek jól mutatják az eltérő jelentéseket! A feladatban f mindenütt értelmezett valós függvényt jelöl.

(a) f értékkészlete a $[-2, 2]$ intervallum.

(b) f mindenhol -2-nél nagyobb vagy egyenlő és 2-nél kisebb vagy egyenlő értékeket vesz fel.

(c) f sehol nem vesz fel -2-nél kisebb értéket, és sehol nem vesz fel 2-nél nagyobb értéket.

5.95. Ugyanazt jelentik-e a következő mondatok? Ha van eltérés a jelentések között, adjunk olyan példákat, amelyek jól mutatják az eltérő jelentéseket! A feladatban f mindenütt értelmezett valós függvényt jelöl.

(a) f monoton csökken a $(-\infty, 0]$ intervallumon, és monoton nő a $[0, \infty)$ intervallumon.

(b) f monoton csökken és monoton nő a $(-\infty, \infty)$ intervallumon.

(c) f monoton a $(-\infty, \infty)$ intervallumon.

5.96. Fogalmazzunk meg igaz állításokat a

(a) $\sin x$ **(b)** x^3 **(c)** $[x]$ **(d)** x^4

függvények monotonitási szakaszairól, és a függvény értékkészletéről!

5.97. Ugyanazt jelentik-e a következő kérdések? Válaszoljunk a kérdésekre!

(a) Melyik körbe írható maximális területű téglalap?

(b) Melyik a körbe írható maximális területű téglalap?

(c) Melyik körbe írható a maximális területű téglalap?

5.98. Ugyanazt jelentik-e a következő kérdések? Válaszoljunk a kérdésekre! (Az is lehet válasz, hogy a kérdés nem értelmes.)

(a) Van-e olyan mindenütt értelmezett függvény, amelyik kétszer vesz fel minden pozitív értéket?

(b) Van-e olyan mindenütt értelmezett függvény, amelyik minden pozitív értéket felvesz kétszer?

(c) Van-e olyan mindenütt értelmezett függvény, amelyik minden pozitív értéket felvesz legalább kétszer?

(d) Van-e olyan mindenütt értelmezett függvény, amelyik minden pozitív értéket felvesz legfeljebb kétszer?

(e) Van-e olyan mindenütt értelmezett függvény, amelyik minden pozitív értéket felvesz pontosan kétszer?

(f) Van-e olyan mindenütt értelmezett függvény, amelynek az értékkészletében minden pozitív szám kétszer szerepel?

5.99. Ugyanazt jelentik-e a következő kérdések? Válaszoljunk a kérdésekre! (Az is lehet válasz, hogy a kérdés nem értelmes.)

(a) Az oldalvonal melyik pontjából látjuk a legnagyobb szögben a futballpálya kapuját?

(b) Melyik oldalvonal pontjaiból látjuk a legnagyobb szögben a futballpálya kapuját?

(c) Az oldalvonal pontjából melyik kaput látjuk a legnagyobb szögben?

(d) A kapuból melyik oldalvonalon levő pontot látjuk a legnagyobb szögben?

5.100. Ugyanazt jelentik-e a következő kérdések? Válaszoljunk a kérdésekre!

(a) Van-e olyan mindenütt értelmezett függvény, amelyik minden értéket felvesz kétszer?

(b) Van-e olyan mindenütt értelmezett függvény, amelyik minden értéket felvesz legalább kétszer?

(c) Van-e olyan mindenütt értelmezett függvény, amelyik minden értéket felvesz pontosan kétszer?

Melyik mondat helyes a matematikában, melyik nem? A helyes mondatok közül melyik igaz állítás?

5.101. $x + y$ tényezői x és y.

5.102. $x + y$ tagjai x és y.

5.103. xy tényezői x és y.

5.104. xy tagjai x és y.

5.105. Pozitív tagok esetén szabad tagonként gyököt vonni.

5.106. Pozitív tényezők esetén szabad tényezőnként gyököt vonni.

5.107. Az 5 eleme a $\{k : k \in \mathbb{N}^+, 5 \mid k\}$ halmaznak.

5.108. Az 5 tagja a $\{k : k \in \mathbb{N}^+, 5 \mid k\}$ halmaznak.

5.109. Az 5 eleme az $a_k = 5k, \quad k \in \mathbb{N}^+$ sorozatnak.

5.110. Az 5 tagja az $a_k = 5k, \quad k \in \mathbb{N}^+$ sorozatnak.

5.111. Fogalmazzunk meg olyan értelmes szöveges szélsőérték-feladatokat, amelyeket a tanult módszerekkel meg tudunk oldani! A feladatok szövege legyen egyértelmű, a kérdés legyen értelmes! Adjuk meg a feladatok megoldását is!

5.4. Számítógépes feladatok

Ábrázoljuk számítógépen közös koordináterendszerben az egy részfeladatban szereplő függvényeket a megadott intervallumokban! Vizsgáljuk meg, hogy melyik intervallumban melyik függvény a nagyobb!

5.112. $x^2, x^3, x^4, \quad [-0.2, 1.2]$

5.113. $x^2, x^3, x^4, \quad [0.8, 2.2]$

5.114. $x^2, x^3, x^4, \quad [-0.2, 2.2]$

5.115. $x^2, \sqrt{x}, \quad [0, 1.2]$

5.116. $x^2, \sqrt{x}, \quad [0.8, 2]$

5.117. $\sqrt{x}, \sqrt[3]{x}, \quad [0, 1.2]$

5.118. $\sqrt{x}, \sqrt[3]{x}, \quad [0.8, 5]$

5.119. $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \quad [0.1, 2]$

Oldjuk meg grafikusan a következő egyenlőtlenségeket úgy, hogy az egyenlőtlenség jobb és bal oldalán álló függvényeket közös koordinátarendszerben ábrázoljuk számítógéppel!

5.120. $x^2 > x^4$

5.121. $x^2 < x^3$

5.122. $\sqrt{x} > \sqrt[3]{x}$

Határozzuk meg a következő feladatokban a függvények értelmezési tartományát! Ábrázoljuk számítógépen közös koordináterendszerben az egy részfeladatban szereplő függvényeket! Az ábrázoláshoz olyan intervallumokat válasszunk, amelyben jól látszanak a függvények, illetve a különbségek a függvények között!

5.123. $|x|, \quad x^2$

5.124. $\sqrt{x}, \quad \frac{\sqrt{x}}{2}$

5.125. $\sqrt{-x}, \quad 2\sqrt{-x}$

5.126. $\{-x\}, \quad -\{x\}$

5.127. $\{x\}, \quad 2\{x\}, \quad \{2x\}$

5.128. $\{x\}+2, \quad \{x+2\}$

Határozzuk meg a következő feladatokban a függvények értelmezési tartományát! Ábrázoljuk számítógépen közös koordináterendszerben az egy részfeladatban szereplő függvények közül az elsőt, majd vázoljuk kézzel a füzetben a második függvényt! Magyarázzuk el, hogy miért az a második függvény grafikonja, amit lerajzoltunk! Ellenőrzésképpen rajzoljuk ki a második függvény grafikonját a géppel is!

5.129. $\sin x^2, \quad 3 + \sin x^2$

5.130. $\sin x + x^2, \quad \sin(x+2) + (x+2)^2$

5.131. $\cos x, \quad \cos \pi x$

5.132. $\sqrt{x-1}, \quad \sqrt{1-x}$

5.133. $\sqrt{x-1}, \quad -\sqrt{x-1}$

5.134. $x \sin x, \quad 3 + (x-2)\sin(x-2)$

5.135. $x \lg x, \quad -3 + (2x)\lg(2x)$

5.136. $x\,(\lg x)^2, \quad (-x)\,(\lg(-x))^2$

Oldjuk meg grafikusan a következő egyenlőtlenségeket úgy, hogy az egyenlőtlenség jobb és bal oldalán álló függvényeket közös koordinátarendszerben ábrázoljuk számítógéppel!

5.137. $x^2 < |x|$

5.138. $\{x\} < \frac{1}{2}$

5.139. $\sqrt{x} > x^2$

Határozzuk meg a következő függvények értelmezési tartományát, és ábrázoljuk őket! Vannak-e a függvények közt egyenlők?

5.140. $\sin x$

5.141. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

5.142. $|\sin x|$

5.143. $\frac{1}{\sin x}$

5.144. $1 + \operatorname{ctg}^2 x$

5.145. $\{\sin x\}$

5.146. $[\sin x]$

5.147. $\sin^2 x$

Oldjuk meg a következő egyenleteket és egyenlőtlenségeket grafikusan!

5.148. $\log_2 x = 1024$

5.149. $\log_2 x < \log_{0,5} x$

5.150. $\sin x = \cos x$

5.151. $\sin x < \cos x$

5.152. $\log_{1/2} x > 64$

5.153. $\cos x \leq \frac{1}{2}$

5.154. $\sin x \geq \frac{1}{2}$

5.155. $\operatorname{tg} x > 1$

Ábrázoljuk a következő, szakaszonként megadott függvényeket!

5.156. $\begin{cases} x^2 - 1, \text{ ha } x < 0 \\ x - 1, \text{ ha } 0 \le x < 1 \\ (x+1)^2, \text{ ha } 1 \le x \end{cases}$

5.157. $\begin{cases} \log_2(-x), \text{ ha } x < 0 \\ \log_2 x, \text{ ha } x > 0 \end{cases}$

Határozzuk meg a következő összetett függvények értelmezési tartományát és értékkészletét, és ennek megfelelően készítsük el a megfelelő grafikonokat! Sejtsük meg a grafikonok alapján, hogy melyik függvény páros, melyik páratlan, és melyik periodikus, majd bizonyítsuk is be a sejtést!

5.158. $\log_2(\sin x)$ **5.159.** $\sin(\log_2 x)$ **5.160.** $\sin\left(\cos x^2\right)$ **5.161.** $\cos\left(\cos x^2\right)$

Számítsuk ki a következő sorozatok 10-edik, 25-ödik és 50-edik tagját! Hova közelednek az értékek? A tapasztalat szerint hányadik tagtól kezdve nem változik az eredmény 5-ödik tizedesjegye az egyes sorozatoknál?

5.162. $\sqrt[n]{2}$

5.163. $\sqrt[n]{n}$

5.164. $a_1 = 5$, és $a_{n+1} = \dfrac{a_n + \dfrac{5}{a_{n+1}}}{2}$

5.165. $a_1 = 0$, $\quad a_2 = 1$, és $a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$

Végezzünk számítógépes kísérleteket! A tapasztalat alapján sejtsük meg, hogy van-e a sorozatoknak 100-nál nagyobb tagja! Bizonyítsuk a sejtést!

5.166. $a_n = \dfrac{2\left(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n}\right)}{n\sqrt{n}}$

5.167. $a_n = \dfrac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n}}{n + \sqrt{n}}$

Írjunk olyan programot, amelyik bekéri az a, b, c valós számokat, és kirajzolja az $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvény grafikonjának azt a szakaszát, ha van ilyen, amelyikre igaz, hogy ott minden $f(x)$ függvényértékre teljesül, hogy

5.168. $-2 \le f(x)$ és $f(x) \le 2$

5.169. $-2 \le f(x)$ vagy $f(x) \le 2$

Hogyan tanuljunk?

6.1. A feladatok megértése, és a megoldások megfogalmazása

Az élet minden területén fontos a jó kommunikáció. A hallott és olvasott szövegek megértését, a helyes fogalmazást nagymértékben segíti a sok szépirodalom olvasása.
A matematikai szövegek megértését, és a megoldások helyes és érthető megfogalmazását a matematika könyvek olvasása segíti. Középiskolában ezt nem igazán várják el a tanulóktól, az egyetemen viszont nagy szerepet kap az előadásokon, gyakorlatokon való jegyzetelés, a könyvekből, jegyzetekből való önálló tanulás.

Néhány tanács:

— Az előadásokon, gyakorlatokon való jegyzeteléskor ne csak a képletekre koncentráljunk (mert azok valószínűleg benne vannak minden könyvben), hanem a magyarázatokra is. A hangsúlyozottan elmondott magyarázatokat mindenképpen érdemes leírni, akkor is, ha nem kerülnek fel a táblára. Úgy kell jegyzetelni, hogy a jegyzetből 2 hónappal később is meg lehessen érteni az anyagot. Ehhez szükséges a magyarázatok leírása.

— Az órákon, amikor valaki figyel, hajlamos belefeledkezni a magyarázatokba, gondolkodásba, de ilyenkor is fontos a jegyzetelés. Könnyebb megosztani a figyelmet, ha értjük a tananyagot. Érdemes felkészülten érkezni az órákra, átnézni az előző órák anyagát. A befektetett munka mindig megtérül.

— Írott szövegek (jegyzetek, könyvek) olvasásakor érdemes külön papíron végigszámolni a leírt levezetéseket, főleg akkor, ha azok tömörek, nem írnak le minden lépést.

— Olvasás közben, ha valami nem érthető, érdemes felírni minden kérdést, aztán elolvasva újra, meg kell próbálni válaszolni a kérdésekre. Ha nem sikerül, meg kell kérdezni a tárgy oktatóját.

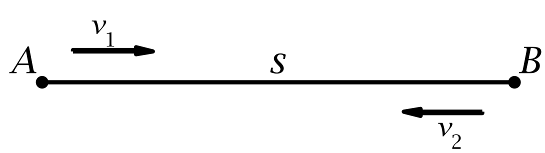
— Az írott anyagból való tanulás során is meg kell érteni minden részletet. Tudni kell (definiálni), hogy melyik matematikai szakkifejezés mit jelent, és tudni kell, hogy egy állításból hogyan és miért következik egy másik állítás.

Egy matematika tanárnak különösen fontos, hogy a matematika tanulásának folyamatát is értse, mert akkor majd jobban tud segíteni a diákjainak.
Itt most két dologra térünk ki részletesebben: a szöveges feladatok megértésére, és a megoldások helyes megfogalmazására.

Hogyan oldjunk meg szöveges feladatokat?

A szöveges feladatokat érdemes többször is elolvasni. Még a megoldás kezdete előtt világosan kell látnunk, hogy miről szól a feladat, mire vonatkozik a kérdés. Olvasás közben alá is húzhatjuk a fontosabb információkat. A feladat szövegét a megoldás alatt is érdemes akár többször újra elolvasni, mert lehet, hogy nem minden információt vettünk észre. A megoldás végén pedig azért kell elolvasni a szöveget megint, hogy ellenőrizzük, hogy a kérdésre válaszoltunk-e, és hogy válaszoltunk-e minden kérdésre.
A megoldás kezdetekor, ha a feladat lehetővé teszi, érdemes rajzot készíteni, és a rajzon bejelölni a fontosabb adatokat, kiemelve azokat, amelyeket megadott a feladat, illetve, amit kérdez.
Fontos írásban rögzíteni, hogy mit mivel jelölünk.
Érdemes összegyűjteni a feladattal kapcsolatos tudásunkat még akkor is, ha nem feltétlenül használjuk fel mindet.
Végig kell gondolni, hogy milyen megoldási módszerek jöhetnek számításba.
A végeredmény kiszámítása után meg kell gondolni, hogy a végeredmény reális-e.
Ha bármilyen hibára gyanakszunk a megoldás során, nagyon alaposan át kell nézni az egész megoldást. Sajnos, ha az ember egyszer elkövet egy hibát, akkor elköveti az utólagos ellenőrzéskor is. Ezért sokszor érdemes a megoldásokat teljesen újrakezdeni.

Példa szöveges feladat megoldására:
Az A és B városok egymástól $s = 150$km távolságra vannak. Egy autó v_1 sebességgel elmegy A-ból B-be, majd v_2 sebességgel azonnal visszamegy A-ba. Az autó a teljes utat 5 óra alatt teszi meg. Milyen v_1 és v_2 mellett a legkisebb a v_1 és v_2 sebességek számtani közepe?
Megoldás:
A feladatot először meg kell érteni, ehhez rajzot is készíthetünk.



Össze kell gyűjteni a feladattal kapcsolatos ismeretanyagot is.
Tudjuk (ha nem tudjuk, utána kell nézni), hogy egyenes vonalú egyenletes mozgás esetén a sebesség $v = \frac{s}{t}$, ahol s a megtett út, t pedig a megtételhez szükséges idő.
A sebességek átlaga vagy számtani közepe: $\frac{v_1 + v_2}{2}$.
Ez utóbbi kifejezést nem szabad összekeverni az **átlagsebesség** fogalmával: az átlagsebesség kiszámolásához pedig el kell osztanunk az **összes** utat a megtételhez szükséges **összes** idővel.
A feladat az **átlagsebesség** kiszámolásához szükséges adatokat adta meg: az összes utat ($2 \cdot 150 = 300$km), és az összes időt (5 óra). Ebből nem tudjuk a sebességek átlagát kiszámolni.
Gondoljuk végig azt, amit ki tudunk számolni, vagy ki tudunk fejezni az ismert adatokból!
Ha az út A-ból B-be $t_1 = \frac{s}{v_1}$ ideig, és B-ből A-ba $t_2 = \frac{s}{v_2}$ ideig tart, akkor $t_1 + t_2 = \frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2} = 5$

óra. Tehát az átlagsebesség $\frac{2\cdot 150}{5} = 60 = \frac{2s}{s/v_1 + s/v_2} = \frac{2}{1/v_1 + 1/v_2}$, ami nem más, mint a v_1 és v_2 sebességek harmonikus közepe (ld. harmonikus közép.)
Mi pedig a sebességek számtani közepét akarjuk minimalizálni. Tudjuk, hogy a harmonikus közép kisebb vagy egyenlő, mint a számtani közép, ld, egyenlőtlenségek a nevezetes közepek között.
Tehát $\frac{2}{1/v_1 + 1/v_2} = 60 \leq \frac{v_1 + v_2}{2}$, és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $v_1 = v_2$, tehát az autó végig az átlagsebességével, 60km/h-val megy.

Hogyan fogalmazzunk meg matematikai állításokat helyesen?

Alapvető, hogy a matematikai szakkifejezéseket pontosan használjuk írásban is, szóban is.

— A tizedestörteket helyesen mondjuk ki, például: $0{,}5$ – „nulla egész öt tized”, $0{,}061$ – „nulla egész hatvanegy ezred”.

— Az **összegnek tagjai**, a **szorzatnak tényezői** vannak, például az $5x^2 + 3(a + b)$ **összeg** második **tagja** $3(a + b)$, a $4(a + b)x^2$ **szorzat** második **tényezője** $a + b$.

— A **sorozatnak tagjai**, a **halmaznak elemei** vannak, például az $a_n = n^2$ **sorozat** harmadik **tagja** 3^2, a $H = \{n^2 : n \in \mathbb{N}^+\}$ **halmaznak eleme** a 3^2 szám.

— Használjuk és írjuk a matematikai jelöléseket precízen, például:

$$(-2)^2 \neq -2^2, \quad \log_3 2 \neq \log 32, \quad \frac{\frac{3}{2}}{1500} \neq \frac{3}{\frac{2}{1500}}, \quad (a+b)c \neq a + bc.$$

Ezen a ponton a nem precíz írás matematikai hibákhoz vezethet.

— A pontosságnak része a helyesírás is, a helyesen leírt szöveg könnyebben olvasható, például: periódus, periodikus.

Fogalmazzunk érthetően és értelmesen! **Mindig olvassuk el, amit leírtunk!** Ha nem érthető a mondat, nem hangzik jól (például nem egyezik az alany és az állítmány), javítsuk ki.

Példák helytelen és helyes megfogalmazásokra (hallgatók dolgozatai alapján):

— Helytelen: Az f függvénynél 5-ben már nincs értékfelvétel.
Helyesen: Az f függvény nincs értelmezve 5-ben.

— Helytelen: Felül x^2, alul $x + 1$ van.
Helyesen: A tört számlálója x^2, a nevezője $x + 1$.

— Helytelen: Körzőzünk.
Helyesen: Adott középpontú, adott sugarú kört rajzolunk.

Fogalmazzunk egyértelműen! Matematikában különösen fontos az egyértelmű fogalmazás.

Példák a nem egyértelmű fogalmazásra:

— Hányféleképpen színezhetjük ki egy kocka 6 lapját 6 színnel? (Hányszor használhatunk fel egy színt? Milyen színezéseket tekintünk különbözőnek?)

— Legyen a test sebessége 5. (Mi a mértékegység?)

— Igaz-e, hogy $\sin 3x$ periódusa 6π? (Egyáltalán, a 6π periódusa $\sin 3x$-nek? Melyik periódusa? Egyik periódusa? A legkisebb pozitív periódusa?)

Azt mondjuk, és azt írjuk le, amire gondolunk. A hallgató, az olvasó nem gondolatolvasó. Ne cseréljük fel például „véletlenül” az „értelmezési tartományt” az „értékkészlettel.”
Sokszor bizonyos szavak sorrendjének a felcserélésétől megváltozik a mondat értelme. Ezt mutatják a következő **példák:**

— 1. Minden hallgatóhoz van olyan cukorka, amit szopogatott.
2. Van olyan cukorka, amit minden hallgató szopogatott.

— 1. Minden valós számnál van nagyobb egész szám.
2. Van olyan egész szám, amelyik minden valós számnál nagyobb.

Sokszor egy szó megváltoztatásától teljesen megváltozik a mondat értelme. Ezt mutatják a következő **példák:**

— 1. Melyik körbe írható maximális területű téglalap?
2. Melyik a körbe írható maximális területű téglalap?

— 1. Az n egész szám osztható 4-gyel és 5-tel.
2. Az n egész szám osztható 4-gyel vagy 5-tel.
3. Ha az n egész szám osztható 4-gyel, akkor osztható 5-tel.

Mindig olvassuk el, és gondoljuk át, amit leírtunk!

6.2. A feladatmegoldás lépései

Legegyszerűbb azokat a feladatokat megoldani, amelyeknél előre látjuk a megoldáshoz szükséges lépéseket. A feladatok jelentős része nem ilyen.

Néhány tanács:

— A feladatok megoldását akkor is el kell kezdeni, ha nem látjuk előre a megoldás végét. Az biztosan nem vezet eredményre, ha várjuk, hogy eszünkbe jusson a megoldás összes lépése. Elég nagy optimizmussal bele kell kezdeni a megoldásba.

— Bízzunk abban, hogy ha a megoldás során nem követünk el hibát, akkor a helyes megoldást írjuk le. Ha bizonytalanok vagyunk, akkor át kell gondolni a lépéseket, és meg kell indokolni minden egyes lépést. Csak azt fogadjuk el helyes lépésnek, amit meg tudunk indokolni. Indoklás közben ne csapjuk be saját magunkat azzal, hogy bizonyítás helyett bizonygatunk valamit. Viszont, ha valamit meg tudunk indokolni, bízzunk meg az indoklásban.

— Ha teljesen világos, hogy a végeredmény helytelen, például negatív eredményt kaptunk egy távolságra, akkor nézzük át a megoldást, lehet, hogy csak egy egyszerű másolási, számolási vagy átalakítási hibát követtünk el. Ezeket a hibákat nehéz észrevenni, sokszor az a célravezető, ha nagyon gondosan újra leírjuk a megoldást anélkül, hogy az elrontott megoldásból másolnánk.

— Ha egy megoldásban elakadunk, akkor érdemes a megoldást vagy annak egy részét valamilyen más módon megközelíteni. Teljesen természetes, hogy egy megoldást akár többször is elrontunk, és akár többször is újrakezdünk. A „elrontás – újrakezdés” módszer sokkal célravezetőbb, mint a „bele sem kezdünk, amíg nem vagyunk biztosak az egészben” módszer.

— Egy megoldás akkor van kész, ha le tudjuk írni, és szóban is el tudjuk mondani értelmesen néhány perc alatt.

— Ne felejtsük el, hogy minden tárgyból mindenki olyan feladatokat kap, amelyek többségét kellő munka, tanulás és gyakorlás után meg tudja oldani.

Pólya György A gondolkodás iskolája című könyvében így írja le a megoldás lépéseit:

Hogyan oldjunk meg feladatokat?

ELŐSZÖR

Értsd meg a feladatot.

A FELADAT MEGÉRTÉSE

- Mit keresünk? Mi van adva? Mit kötünk ki?
- Kielégíthető-e a kikötés? Elegendő-e a kikötés az ismeretlen meghatározásához? Vagy nem elegendő? Vagy kevesebb is elég volna? Vagy ellentmondás van benne?
- Rajzolj ábrát. Vezess be alkalmas jelölést.
- Válaszd szét a kikötés egyes részeit.

MÁSODSZOR

Keress összefüggést a adatok és az ismeretlenek között. Ha nem találsz közvetlen összefüggést, nézz segédfeladatok után. Végül készítsd el a megoldás tervét.

TERVKÉSZÍTÉS

- Nem találkoztál már a feladattal? Esetleg a mostanitól kissé eltérő formában?
- Nem ismersz valami rokon feladatot? Vagy olyan tételt, aminek hasznát vehetnéd?
- Nézzük csak az ismeretlent! Próbálj visszaemlékezni valami ismert feladatra, amelyben ugyanez – vagy ehhez hasonló – az ismeretlen.
- Itt van egy már megoldott rokon feladat. Nem tudnád hasznosítani? Nem tudnád felhasználni az eredményét? Nem tudnád felhasználni a módszerét? Nem tudnád esetleg valami segédelem bevezetésével felhasználhatóvá tenni?
- Nem tudnád átfogalmazni a feladatot? Nem tudnád másképpen is átfogalmazni? Idézd fel a definíciót!
- Ha nem boldogulsz a kitűzött feladattal, próbálkozzál először egy rokon feladattal. Nem tudnál kigondolni egy könnyebben megközelíthető rokon feladatot? Egy általánosabb feladatot? Vagy egy speciálisabbat? Vagy egy analóg feladatot? Nem tudnád megoldani legalább a feladat egy részét? Tartsd meg a kikötés egyik részét, a többit ejtsd el. Mennyire van így meghatározva az ismeretlen, mennyiben változhat még? Nem tudnál az adatokból valami hasznosat levezetni? Nem tudnál mondani más adatokat, amelyek alkalmasak az ismeretlen meghatározására? Meg tudnád úgy változtatni az ismeretlent vagy az adatokat, vagy ha szükséges, mind a kettőt, hogy az új ismeretlen és az új adatok közelebb essenek egymáshoz?
- Felhasználtál minden adatot? Számításba vetted az egész kikötést? Számbavetted a feladatban előforduló összes lényeges fogalmat?

HARMADSZOR

Hajtsd végre a tervedet.

TERVÜNK VÉGREHAJTÁSA

- Ellenőrizz minden lépést, amikor végrehajtod a tervedet. Bizonyos vagy benne, hogy a lépés helyes? Be is tudnád bizonyítani, hogy helyes?

NEGYEDSZER

Vizsgáld meg a megoldást.

A MEGOLDÁS VIZSGÁLATA

- Nem tudnád ellenőrizni az eredményt? Nem tudnád ellenőrizni a bizonyítást?
- Nem tudnád másképpen is levezetni az eredményt? Nem tudnád az eredményt egyetlen pillantásra belátni?
- Nem tudnád alkalmazni az eredményt vagy a módszert valami más feladat megoldására?

Ajánlott irodalom

Laczkovich Miklós-T. Sós Vera: *Valós Analízis I.*, TypoTex Kiadó, 2012.

Pólya György: *A gondolkodás iskolája*, Gondolat Kiadó, 1977.

Pósa Lajos: *Matematika, Összefoglalás I.*, Országos Oktatástechnikai Központ

Urbán János: *Matematikai logika*, Műszaki Kiadó Kft., 2006.

Megoldások

Halmazok, logika, bizonyítási módszerek

1.30. Egyik állításból sem következik a másik, mivel $x = 2$ nem gyöke az $x^2 - x - 6 = 0$ egyenletnek. Pontosabban:

P $\not\Longrightarrow$ **Q**, mert ha $x = 3$, akkor $3^2 - 3 - 6 = 0$ és $3 \neq 2$

Q $\not\Longrightarrow$ **P**, mert $2^2 - 2 - 6 \neq 0$.

1.31. **P** $\Longrightarrow$ **Q**, azaz $\sqrt{x^2 - 5} < 3 \Longrightarrow x^2 - 5 < 9$, mert ha az egyenlőtlenség mindkét oldala nem negatív, akkor négyzetre lehet emelni az egyenlőtlenséget.

Q $\not\Longrightarrow$ **P**, mert az $x = 0$ egy ellenpélda.

1.32. **P** $\Longrightarrow$ **Q**, azaz $x > 5 \Longrightarrow x^2 > 25$, mert mindkét oldal pozitív.

Q $\not\Longrightarrow$ **P**, mert az $x = -6$ egy ellenpélda.

1.33. **P** $\not\Longrightarrow$ **Q**, azaz $x^2 - x - 6 > 0 \not\Longrightarrow x > 2$, mert $x = -3$ esetén $(-3)^2 - (-3) - 6 = 12 - 6 = 6 > 0$, de $-3 < 2$.

Q $\not\Longrightarrow$ **P**, mert $x = 3$ esetén $3 > 2$, de $3^2 - 3 - 6 = 0 \not< 0$.

1.34. Flóra állítása hamis, erről meggyőzhetjük a bírót, ha mutatunk egy olyan $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvényt, amelynek van minimuma, de a minimumhely 1-nél kisebb és a minimumérték kisebb vagy egyenlő, mint nulla. Legyen például

$$f(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right|, \text{ ha } x > 0.$$

1.35. Hamis Gerzson állítása. Ennek bizonyításához kell keresnünk egy olyan sorozatot, amelynek 6-tól kezdve minden tagja nagyobb, mint 10, de van az első öt tag között is olyan, amelyik egyenlő 200-zal. Legyen például minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n = 200$.

1.36. Gerzson állítása: Van olyan x, hogy $\sin x > 0{,}5$ és $x \leq \pi/6$.

Ez igaz, tehát Gerzsonnak van igaza.

Indoklás: legyen például $x = -\pi/2$.

1.37. Nem igaz Gerzson állítása, az x^2 nem monoton az egész számegyenesen.

A tagadás: Van olyan $a < b$, amelyre $a^2 > b^2$ és van olyan $c < d$ is, amelyre $c^2 > d^2$.

Itt a és b tanúsítja, hogy az x^2 nem monoton csökkenő, c és d pedig azt, hogy x^2 nem monoton növő.

Megjegyzés: egy konjunkció tagadásához elég megmutatni, hogy az állítás egyik „fele” nem igaz.

1.38. Flóra igazat mond, mivel a $\log_2 x$ függvény szigorúan monoton nő.

Megjegyzés: egy diszjunkció bizonyításához elég megmutatnunk, hogy az állítás egyik „fele” igaz.

Valós számok

2.4. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\sqrt{3}$ racionális. Ekkor megadható két egész szám, p és q úgy, hogy

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q}, \qquad 3 = \frac{p^2}{q^2}.$$

Feltehetjük, hogy mindkét egész szám pozitív és a hányadosuk már nem egyszerűsíthető, azaz p és q relatív prím számok. Az egyenlőséget q^2-tel beszorozva

$$3q^2 = p^2.$$

Eszerint p^2 osztható 3-mal. Mivel 3 prímszám ezért p is osztható 3-mal, $p = 3r$, ahol r egy pozitív egész szám.

$$3q^2 = 9r^2, \qquad q^2 = 3r^2.$$

Az előző gondolatmenethez hasonlóan azt kapjuk, hogy q is osztható 3-mal. Ez ellentmond annak, hogy p és q relatív prím.

Megjegyzés: Ugyanez a bizonyítás 3 helyett tetszőleges $n > 0$ prímszámra is elmondható: ha $n > 0$ prímszám, akkor $\sqrt{n}$ irracionális. Valójában n-ről csak azt használtuk ki, hogy nem osztható 1-nél nagyobb négyzetszámmal, azaz n előáll különböző prímszámok szorzataként. A bizonyítást tovább gondolva megkaphatjuk azt a tételt, hogy pozitív egész n esetén n négyzetszám vagy $\sqrt{n}$ irracionális.

2.5. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} = r$ racionális szám. De akkor $1 + \sqrt{3} = 2 \cdot r$ és $\sqrt{3} = 2 \cdot 3 - 1$ is racionális szám. Ez ellentmond az előző (2.4.) feladat állításának!

2.6. Indirekt módon tegyük fel, hogy

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \frac{p}{q}, \qquad p^2 = 2 \cdot 3 \cdot q^2,$$

ahol p és q két relatív prím pozitív egész szám. Mivel 2 és 3 két különböző prímszám, ezért p osztható 6-tal, $p = 2 \cdot 3 \cdot r$. Innen

$$2^2 \cdot 3^2 \cdot r^2 = 2 \cdot 3 \cdot q^2, \qquad q^2 = 2 \cdot 3 \cdot r,$$

és így q is osztható 6-tal, ami ellentmondás.

2.7. Indirekt módon tegyük fel, hogy

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{p}{q}, \qquad \frac{2}{3} = \frac{p^2}{q^2}, \qquad 2q^2 = 3p^2,$$

ahol p és q két relatív prím pozitív egész szám. Innen azt kapjuk, hogy p osztható 2-vel, q pedig osztható 3-mal, azaz

$$p = 2r, \qquad q = 3s,$$

ahol r és s két pozitív egész szám.

$$2 \cdot 3^2 \cdot s^2 = 3 \cdot 2^2 \cdot r^2, \qquad 3s^2 = 2r^2.$$

Innen kapjuk, hogy r, és ezért p is osztható 3-mal, ami ellentmondás.

2.10. Igen lehet, például $a = 2\sqrt{3},\ b = \sqrt{3}$ esetén $a/b = 2$. A 2.4. feladat szerint $\sqrt{3}$ irracionális, de akkor a kétszerese is az. Ez utóbbinál felhasználtuk, hogy ha egy irracionális számot megszorzunk egy nem nulla racionális számmal, akkor irracionális számot kapunk (2.11. feladat).

2.11. Általában nem igaz, például $0 \cdot \sqrt{3}$ esetén. Viszont ha $r \neq 0$ racionális, x irracionális, akkor $r \cdot x$ irracionális! Ezt indirekt módon könnyen beláthatjuk. Tegyük fel, hogy $r \cdot x = s$ racionális. De akkor $x = s/r$ is racionális, mert két racionális szám hányadosa, ha értelmes, racionális szám.

2.12. Igaz, bizonyítsuk be indirekt módon: tegyük fel, hogy $a + b \in \mathbb{Q}$. Mivel két racionális szám különbsége racionális, ezért $a = (a + b) - b \in \mathbb{Q}$, ami ellentmondás.

2.13. Nem igaz. Ellenpélda: $a = 2\sqrt{3},\ b = -\sqrt{3}$.

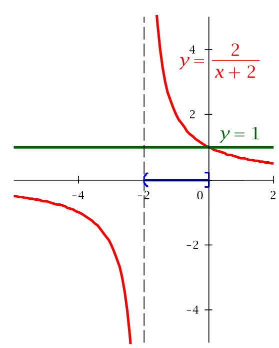
2.15.

$$\frac{2}{x+2} \geq 1 \iff x + 2 > 0 \text{ és } 2 \geq x + 2,$$

azaz

$$x > -2 \text{ és } x \leq 0.$$

Tehát a $\dfrac{2}{x+2} \geq 1$ egyenlőtlenség megoldásai a $(-2, 0]$ intervallum pontjai.

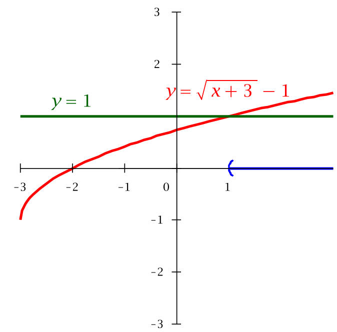


$$\boldsymbol{\frac{2}{x+2} \geq 1}$$

2.16.

$$\sqrt{x+3}-1>1 \iff \sqrt{x+3}>2 \iff x>1.$$

Tehát a $\sqrt{x+3}-1>1$ egyenlőtlenség megoldásai az $(1,\infty)$ félegyenes pontjai.



$$\boldsymbol{\sqrt{x+3}-1>1}$$

2.17. Válasszuk szét az eseteket aszerint, hogy (1) eset:

$$3-\frac{6}{x}\le 0 \iff 0<x\le 2$$

illetve (2) eset:

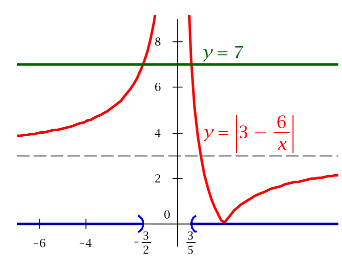
$$3-\frac{6}{x}>0 \iff x<0 \text{ vagy } x>2.$$

Az (1) esetben

$$\left|3-\frac{6}{x}\right|=\frac{6}{x}-3<7 \iff \frac{3}{5}<x\le 2.$$

A (2) esetben

$$\left|3-\frac{6}{x}\right|=3-\frac{6}{x}<7 \iff x<-\frac{3}{2} \text{ vagy } x>2.$$



$$\boldsymbol{\left|3-\frac{6}{x}\right|<7}$$

Tehát az $\left|3-\frac{6}{x}\right|<7$ egyenlőtlenség megoldásai a

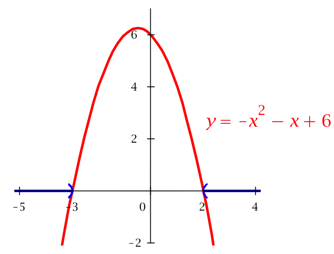
$$(-\infty,-3/2) \text{ és a } (3/5,\infty)$$

félegyenesek pontjai.

2.18. Mivel a $-x^2 - x + 6$ másodfokú polinom főegyütthatója negatív, ezért a függvényértékek a két gyökön kívül negatívok, a parabola „lefelé áll”. A két gyök:

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 2.$$

Tehát a $-x^2 - x + 6 < 0$ egyenlőtlenség megoldásai a $(-\infty, -3)$ és a $(2, \infty)$ félegyenesek pontjai.



$$\boldsymbol{-x^2 - x + 6 < 0}$$

2.22. Mivel $x > 0$, ezért $[x] \geq 0$. Azért, hogy a nevezőben ne 0 legyen, feltesszük, hogy $x \geq 1$. Ezért

$$\frac{1}{[x]} < \frac{1}{1000} \quad \Longleftrightarrow \quad [x] > 1000 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq 1001.$$

Tehát bármely $x_0 \geq 1001$ szám megfelel.

2.23. Nincs ilyen x_0. Ugyanis tetszőleges $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén ha $x = [x_0] + 1.5$, akkor $x > x_0$ és

$$\{x\} = 0{,}5 > \frac{1}{1000}.$$

2.25. Legyen x pozitív.

$$\frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{1}{1000} \iff 1000 < \sqrt{x} \iff 10^6 < x.$$

Tehát minden $K \geq 10^6$ megfelel.

2.26. Legyen $x > 0$.

$$x^5 + 4x^3 + 2x^2 + 1 > 4x^3 > x^3 > 1000, \text{ ha } x > 10,$$

tehát minden $K \geq 10$ megfelel, egy félegyenes minden pontja „jó” K.

Megjegyzés: Ha csak az ötödfokú tagot hagyjuk meg a polinomból, akkor választhattunk volna 10-nél kisebb „jó” (de bonyolult) K-t: $K = \sqrt[5]{1000}$, de így sem kapjuk meg a lehető legjobb K-t. Ehhez ugyanis a $x^5 + 4x^3 + 2x^2 - 999 = 0$ ötödfokú egyenlet (legnagyobb) gyökét kellene kiszámolni, amihez nincs gyökmegoldó képlet.

2.31. Feltehető, hogy x pozitív, és ezért

$$\frac{1}{x^5 + 4x^3 + 2x^2 + 1} < \frac{1}{1000} \quad \Longleftrightarrow \quad x^5 + 4x^3 + 2x^2 + 1 > 1000.$$

Az utóbbi egyenlőtlenség vizsgálatát lásd a 2.26. feladatban.

2.32.

$$\sqrt{xy} \geq \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{xy}} = \sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}}$$

Használjuk a kéttagú számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget az $1/x,\ 1/y$ számokra! Egyenlőség akkor van, ha $x = y$.

Megjegyzés: Az eredeti egyenlőtlenség jobb oldalát a két pozitív szám **harmonikus közepének** nevezzük. Eszerint tehát két pozitív szám harmonikus közepe kisebb vagy egyenlő a mértani közepüknél. Egyenlőség akkor és csak akkor van, ha a két szám megegyezik.

2.33. Az előző feladatban beláttuk, hogy

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy}.$$

Másrészt

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

Mindkét egyenlőtlenségben akkor és csak akkor van egyenlőség, ha $x = y$.

2.35. Mivel x és $1-x$ nem negatív, ha $0 \leq x \leq 1$, ezért alkalmazható az x és $1-x$ számokra a kéttagú számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség.

$$f(x) = 2x(1-x) \leq 2\left(\frac{x+(1-x)}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Egyenlőség pontosan akkor van, ha $x = 1-x$, azaz $x = 1/2$. Tehát a függvény maximuma $1/2$, és ezt az $x = 1/2$ pontban (maximumhely) veszi fel.

2.37.

$$f(x) = x^2+1+\frac{1}{x^2+1} = a+\frac{1}{a},$$

ahol $a = x^2+1$. Alkalmazzuk a-ra és reciprokára a kéttagú számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$\frac{a+\frac{1}{a}}{2} \geq \sqrt{a\cdot\frac{1}{a}} = 1, \qquad a+\frac{1}{a} \geq 2,$$

azaz

$$f(x) = x^2+1+\frac{1}{x^2+1} \geq 2.$$

Egyenlőség akkor van, ha

$$x^2+1=\frac{1}{x^2+1}, \qquad x=0.$$

Tehát az $f(x)$ függvény minimuma 2, minimumhelye 0.

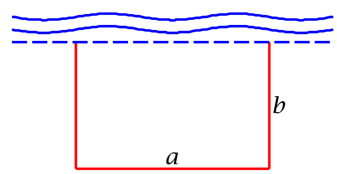
2.43. Ha a téglalap két oldala a és b, akkor $T=ab$, $K=2(a+b)$. Használjuk a kéttagú számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$K=2(a+b)=4\frac{a+b}{2}\geq 4\sqrt{ab}=4\sqrt{T}.$$

A kerület akkor minimális, ha a fenti egyenlőtlenségben egyenlőség teljesül, azaz $a=b$. Tehát az adott T területű téglalapok közül a négyzet kerülete minimális.

2.47. Használjuk az ábra jelöléseit!
A telek területe és a kerítés hossza:

$$T=ab, \qquad K=a+2b.$$



Használjuk a kéttagú számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget, de nem a-ra és b-re, hanem a-ra és $2b$-re!

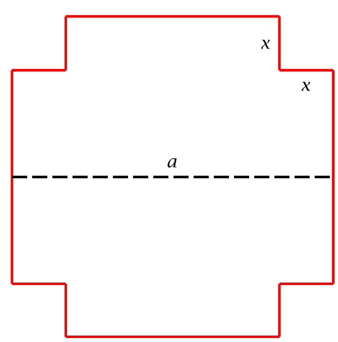
$$2T=2ab=a\cdot 2b=\left(\sqrt{a\cdot 2b}\right)^2\leq\left(\frac{a+2b}{2}\right)^2=\frac{K^2}{4}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $a=2b$. Ebben az esetben

$$a=\frac{K}{2}, \qquad b=\frac{K}{4}, \qquad T=\frac{K^2}{8}.$$

Megjegyzés: Ha a $K=a+2b$ képletből kifejezzük b-t, és behelyettesítjük a terület képletébe, egy másodfokú függvényt kapunk az a változóra. Ennek a parabolának kerestük meg a maximumát!

2.48. Használjuk az ábra jelöléseit!
A doboz térfogata $V=x(a-2x)^2$. Használjuk a háromtagú számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget a $4x,\ a-2x,\ a-2x$ számokra:



$$4V=4x(a-2x)^2\leq\left(\frac{4x+2(a-2x)}{3}\right)^3=\frac{8a^3}{27},$$

$$V\leq\frac{2a^3}{27}.$$

Egyenlőség akkor (és csak akkor) van, ha $4x=a-2x$, azaz $x=\dfrac{a}{6}$.

2.54. Nem igaz, például $x = 1/2$ esetén $x \in H$, de minden $y \in K$-ra $y > 1/2$.

2.55. Igaz, minden $y \in K$ esetén az $x = 2$ „jó”, azaz $y < 2 = x$.

2.56. Igaz, (ld. a 2.54. feladatot), legyen például $x = 1/2$.

2.57. Nem igaz, minden y_1-hez választhatjuk az $y_2 = y_1$-et.

2.58. 2.54. állítás tagadása: van olyan $x \in H$, amelyre minden $y \in K$ esetén $x \leq y$. Ez igaz.
2.55. állítás tagadása: van olyan $y \in K$, amelyre minden $x \in H$ esetén $x \leq y$. Nem igaz.
2.56. állítás tagadása: minden $x \in H$ esetén van olyan $y \in K$, amelyre $x \geq y$. Nem igaz.
2.57. állítás tagadása: minden $y_1 \in K$ esetén van olyan $y_2 \in K$, amelyre $y_1 \leq y_2$. Ez igaz.

Függvények

3.5. Az $f(x)$ függvény monoton csökken a $(-1, 3)$ intervallumban, ha értelmezve van ezen az intervallumon, és minden $a, b \in (-1, 3),\ a < b$ esetén $f(a) \leq f(b)$.

A $g(x)$ függvénynek abszolút minimuma van az $x = 4$ pontban, ha értelmezve van 4-ben, és minden $x \in D_g$ esetén $g(x) \geq g(4)$.

3.9. Például legyen $f(x) = x,\ g(x) = x$.

Megjegyzés: Bármely szigorúan monoton növő f és g megfelel, ugyanis: Ha f és g szigorúan monoton növő, akkor minden $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$ és $g(x_1) < g(x_2)$. A két egyenlőtlenséget összeadva $f(x_1)+g(x_1) < f(x_2)+g(x_2)$, tehát $(f+g)(x_1) < (f+g)(x_2)$.

3.10. Az előző feladat megjegyzése szerint $h = f + g$ szigorúan monoton növő. Mivel egy függvény nem lehet egyszerre szigorúan monoton növő és csökkenő (MIÉRT?), ezért ilyen f és g nincs!

3.11. Például $f(x) = g(x) = 2^x$.

3.12. Például $f(x) = g(x) = -2^{-x}$.

3.19. Az $f(x) = \{x\}$ függvénynek nincs maximuma. Legyen a egy tetszőleges szám. Van olyan n egész szám, amelyikre teljesül, hogy $n \leq a < n + 1$. A függvény a $b = \dfrac{a + (n + 1)}{2}$ helyen nagyobb értéket vesz fel, mint a-ban, tehát a nem lehet maximumhely.
Ennek a b-nek ugyanaz az egész része, tudniillik n, mint a-nak, de közelebb van $n + 1$-hez mint a.

3.43. A c paramétert úgy kell megválasztani, hogy az $f(x) = x^2+2x+c$ parabolának a minimuma 3 legyen. Mivel $f(x)$-et felírhatjuk

$$f(x) = (x - 1)^2 + (c - 1)$$

alakban is, a függvény minimuma mindig az $x = 1$ pontban van. Tehát az

$$f(1) = c - 1 = 3$$

egyenletnek kell teljesülnie. Ez a $c = 4$ választással teljesül, ekkor

$$f(x) = x^2 + 2x + 4.$$

3.44. Mivel tetszőleges c esetén az $f(x) = x^2 + 2x + c$ parabola főegyütthatója pozitív, ezért nincs maximuma.

3.45. Az $f(x) = x^2 + 2x + c = (x-1)^2 + (c-1)$ függvény minimuma tetszőleges c esetén 1-ben van, ezért $f(x)$ akkor vesz fel csak pozitív értékeket, ha

$$f(1) = c - 1 > 0, \qquad c > 1.$$

3.46. Mivel a másodfokú polinom főegyütthatója pozitív, a függvénynek van minimuma és nincs minimuma. Teljes négyzetté kiegészítés után

$$f(x) = 2x^2 + 8x - 4 = 2(x+2)^2 - 12.$$

Az $f(x)$ függvény értéke akkor minimális, ha $(x+2)^2 = 0$, azaz $x = -2$.

A szélsőértékhely -2, a függvény minimuma $f(-2) = -12$.

3.47. Az $f(x) = -x^2 + 8x + 4$ parabola „lefelé áll”, van maximuma, de nincs minimuma.

$$f(x) = -x^2 + 8x + 4 = -(x-4)^2 + 20.$$

A függvény maximuma 4-ben van, értéke $f(4) = 20$.

3.48. Van minimum, de nincs maximum.

$$f(x) = 2x^2 + 4x + 16 = 2(x+1)^2 + 14, \qquad f(-1) = 14.$$

3.49. Van maximum, de nincs minimum.

$$f(x) = -x^2 - 4x - 16 = -(x+2)^2 - 12, \qquad f(-2) = -12.$$

3.71. Az $f(x) = \sqrt[3]{x}$ páratlan, de nem páros:

$$f(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}, \text{ de } 1 = f(1) \neq f(-1) = -1.$$

Megjegyzés: Csak egyetlen olyan függvény van, amelyik egyszerre páros is és páratlan is, az azonosan 0 függvény!

3.72. Az $f(x) = \sin x$ páratlan, de nem páros:

$$\sin(-x) = -\sin x, \text{ de } 1 = \sin\frac{\pi}{2} \neq \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1.$$

3.73. Az $f(x) = \cos x$ páros, de nem páratlan:

$$\cos(-x) = \cos x, \text{ de } f(0) = \cos 0 = 1 \neq 0.$$

3.74. Mivel az $|x|$ függvény páros, ezért az $f(x) = \log_2 |x|$ is páros. Mivel $1 = f(2) \neq -f(-2)$, ezért a függvény nem páratlan.

3.75. Az $f(x) = |\log_2 x|$ függvény se nem páros, se nem páratlan, mivel az értelmezési tartománya nem szimmetrikus az origóra.

3.76. Az $f(x) = 3$ konstans függvény páros, de nem páratlan.

3.77. A $\operatorname{tg} x$ páratlan, de nem páros.

3.78. A $\{x\}$ se nem páros, se nem páratlan:

$$0{,}1 = \{0{,}1\} \neq \{-0{,}1\} = 0{,}9, \qquad 0{,}9 = \{-0{,}1\} \neq -\{0{,}1\} = -0{,}1.$$

3.79. $f(x) = x^2,\ g(x) = 0$

Megjegyzés: Egy páros $f(x)$ és egy páratlan $g(x)$ függvény összege pontosan akkor páros, ha $g(x) \equiv 0$, mert

$$h(x) = f(x) + g(x) = h(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x), \qquad g(x) = -g(x).$$

Hasonlóan kapjuk, hogy az összeg pontosan akkor páratlan, ha $f(x) \equiv 0$.

3.80. $f(x) \equiv 0,\ g(x) \equiv 0.$

3.81. Nem következik, legyen például

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \neq 0 \\ 1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Egy mindenütt értelmezett függvény akkor páratlan, ha minden x valós szám esetén teljesül, hogy $f(x) = -f(-x)$. A fenti példa esetén ez az egyenlőség $x = 0$ esetén nem teljesül.

3.82. $f(x)$ lehet páros, ha $f(5) = 0$, például $f(x) = \sin \pi x$.

3.83. Egy mindenütt értelmezett függvény akkor páratlan, ha minden x valós szám esetén teljesül, hogy $f(x) = -f(-x)$. Ha $f(5) \neq -f(-5)$, akkor $f(x)$ nem páratlan, ezt éppen az $x = 5$ tanúsítja!

3.116. $h(f(x)) = \dfrac{1}{\sin^2 x + 1}$

3.117. $f(h(x)) = \sin \dfrac{1}{x^2+1}$

3.156. $-3y + 2x = 5$ egy egyenes általános egyenlete. Más alakban:

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}.$$

Ezért a meredeksége $m = 2/3$.

3.157. $-2y = 8$ egy vízszintes egyenes egyenlete, meredeksége $m = 0$.

3.158. $3y + 5x = 20$ egy egyenes általános egyenlete. Más alakban:

$$y = -\frac{5}{3}x + \frac{20}{3}.$$

Ezért a meredeksége $m = -5/3$.

3.159. $2x = 10$ egy függőleges egyenes egyenlete, meredeksége „végtelen”, nem függvénygrafikon.

3.160. $5x + 3y = 20$, lásd az 3.158. feladatot.

3.161. $y = 0$ egy vízszintes egyenes, az x-tengely egyenlete, meredeksége $m = 0$.

3.163. Az egyenes meredeksége $m = -2$, ezért

$$y = -2x + b.$$

Mivel az egyenes átmegy a $P(2; 3)$ ponton, ezért ha x helyébe 2-t írunk, akkor $y = 3$:

$$3 = -4 + b.$$

Innen $b = 7$, tehát a keresett egyenlet

$$y = -2x + 7.$$

3.164. Az adott $P(2; 3)$ és $Q(-5; -7)$ pontokon átmenő egyenes egyenlete:

$$y = \frac{3-(-7)}{2-(-5)}(x-2) + 3, \text{ azaz } y = \frac{10}{7}(x-2) + 3.$$

Átalakítás után

$$y = \frac{10}{7}x + \frac{1}{7}.$$

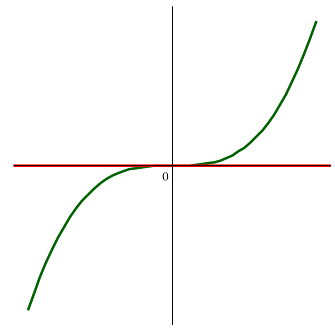
3.165. A $P(-2;3)$ ponton átmenő 5 meredekségű egyenes egyenlete:

$$y = 5x + 13.$$

3.166. A $P(2;3)$ és $Q(2;-7)$ pontokon átmenő egyenes függőleges, mivel a két pont első koordinátái megegyeznek. Ezért az egyenes nem függvénygrafikon, egyenlete

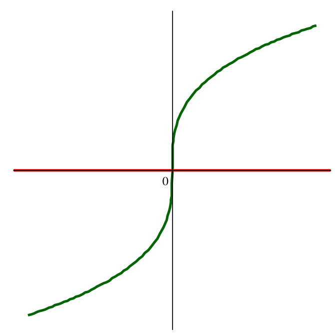
$$x = 2.$$

3.173. $f(x) = x^3$, értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$, értékkészlet: $\mathbb{R}$.
A függvény szigorúan monoton nő az egész számegyenesen, mert ha $x_1 < x_2$, akkor $x_1^3 < x_2^3$.
A függvénynek nincs sem maximuma, sem minimuma. Legyen a egy tetszőleges valós szám. Ha $b > a$, akkor $f(b) > f(a)$, illetve, ha $b < a$, akkor $f(b) < f(a)$, tehát semmilyen a hely nem lehet maximumhely vagy minimumhely.



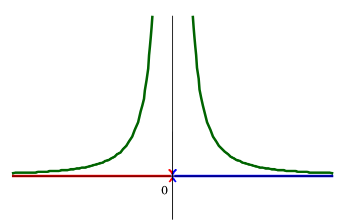
$f(x) = x^3$

3.174. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$, értékkészlet: $\mathbb{R}$.
A függvény szigorúan monoton nő az egész számegyenesen, ezért semmilyen a helyen nem lehet sem maximuma sem minimuma, mert ha $b > a$, akkor $f(b) > f(a)$, illetve, ha $b < a$, akkor $f(b) < f(a)$.



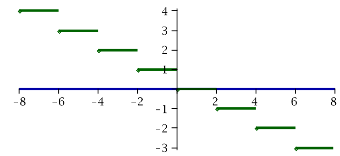
$f(x) = \sqrt[3]{x}$

3.175. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, értelmezési tartomány: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, értékkészlet: $(0, \infty)$.
A függvény szigorúan monoton nő a $(-\infty, 0)$ félegyenesen, mert ha $x_1 < x_2 < 0$, akkor $|x_1| > |x_2|$, tehát $\dfrac{1}{x_1^2} < \dfrac{1}{x_2^2}$. A függvény szigorúan monoton csökken a $(0, \infty)$ félegyenesen. (MIÉRT?)
A függvénynek nincs sem maximuma sem minimuma. Legyen a tetszőleges negatív vagy pozitív szám. Az $\dfrac{1}{x^2}$ függvény a $b = \dfrac{a}{2}$ helyen nagyobb, a $c = 2a$ helyen kisebb értéket vesz fel, mint $f(a)$.



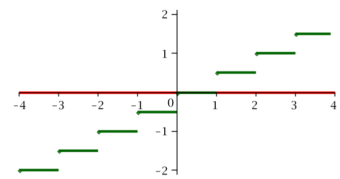
$f(x) = 1/x^2$

3.190. $f(x) = -\left[\dfrac{x}{2}\right]$, értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$, értékkészlet: $\mathbb{Z}$.
A függvény monoton csökken az egész számegyenesen: a $[2n, 2n+2)$ $(n \in \mathbb{Z})$ intervallumon az értéke konstans, itt $f(x) = -n$. A függvény monoton nő a $[2n, 2n+2)$ $(n \in \mathbb{Z})$ alakú intervallumokon.
Nincs sem maximuma sem minimuma, mert a $b = a + 3$ helyen $f(a)$-nál kisebb, a $b = a - 3$ helyen $f(a)$-nál nagyobb értéket vesz fel, tehát semmilyen a hely nem lehet sem maximumhely, sem minimumhely.



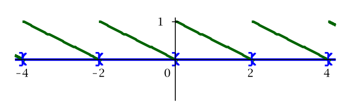
$$f(x) = -\left[\frac{x}{2}\right]$$

3.191. $f(x) = \dfrac{1}{2}[x]$, értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$, értékkészlet: $\mathbb{Z}$.
A függvény monoton nő az egész számegyenesen. Az $[n, n+1)$ $(n \in \mathbb{Z})$ intervallumon az értéke konstans, itt $f(x) = \dfrac{n}{2}$. A függvény monoton csökken $[n, n+1)$ $(n \in \mathbb{Z})$ alakú intervallumokon.
Nincs sem maximuma sem minimuma, $b = a + 2$ helyen $f(a)$-nál nagyobb, a $b = a - 2$ helyen $f(a)$-nál kisebb értéket vesz fel, tehát semmilyen a hely nem lehet sem maximumhely, sem minimumhely.



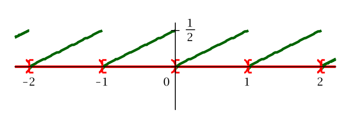
$$f(x) = \frac{1}{2}[x]$$

3.192. $f(x) = \left\{-\dfrac{x}{2}\right\}$, értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$, értékkészlet: $[0, 1)$.
A függvény minden $(2k, 2k+2]$, $k \in \mathbb{Z}$ intervallumon szigorúan monoton csökken. A $(2k, 2k+2]$, $k \in \mathbb{Z}$ intervallumon $f(x) = -\dfrac{x}{2} + k + 1$. Az $x = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ pontokban minimuma van, mert $f(2k) = 0$, és minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $f(x) \geq 0$, tehát a minimumérték 0. A függvénynek nincs maximuma, mert tetszőleges $a \in (2k, 2k+2]$ esetén a $b = \dfrac{a+2k}{2}$ helyen a függvényérték nagyobb, mint $f(a)$.



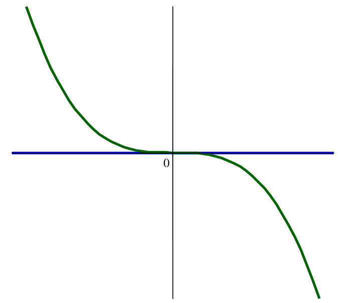
$$f(x) = \left\{-\frac{x}{2}\right\}$$

3.193. $f(x) = \dfrac{1}{2}\{x\}$, értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$, értékkészlet: $[0, 1/2)$. A függvény minden $[k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$ intervallumom szigorúan monoton nő. Az $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$ pontokban minimuma van, mert $f(k) = 0$, és minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $f(x) \geq 0$, tehát a minimumérték 0. A függvénynek nincs maximuma, mert tetszőleges $a \in [k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$ esetén a $b = \dfrac{a+k+1}{2}$ helyen a függvényérték nagyobb, mint $f(a)$.



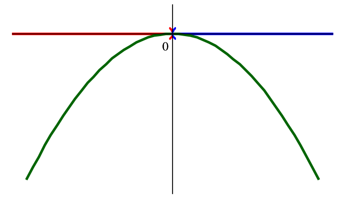
$$f(x) = \frac{1}{2}\{x\}$$

3.197. $f(x) = (-x)^3$, értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$, értékkészlet: $\mathbb{R}$. A függvény szigorúan monoton csökken az egész számegyenesen, nincs sem maximuma, sem minimuma.



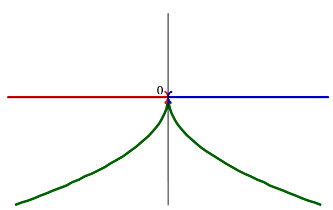
$\boldsymbol{f(x) = (-x)^3}$

3.198. $f(x) = -x^2$, értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$, értékkészlet: $(-\infty, 0]$.
A függvény szigorúan monoton nő a $(-\infty, 0]$ félegyenesen, mert ha $x_1 < x_2 \leq 0$, akkor $x_1^2 < x_2^2$, és szigorúan csökken a $[0, \infty)$ félegyenesen, mert ha $0 \leq x_1 < x_2$, akkor $x_1^2 > x_2^2$. Az $x = 0$ pontban maximuma van, mert 0-ban a függvényérték 0, és a függvény sehol nem vesz fel pozitív értéket. A függvénynek minimuma nincs, mert tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén a $b = 2|a| + 1$ helyen a függvényérték kisebb, mint $f(a)$.



$\boldsymbol{f(x) = -x^2}$

3.199. $f(x) = -\sqrt{|x|}$, értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$, értékkészlet: $(-\infty, 0]$.
A függvény szigorúan monoton nő a $(-\infty, 0]$ félegyenesen és szigorúan csökken a $[0, \infty)$ félegyenesen. Az $x = 0$ pontban maximuma van, mert $f(0) = 0$, és minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $f(x) \leq 0$. A függvénynek nincs minimuma, mert tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén $f(2|a| + 1) < f(a)$.

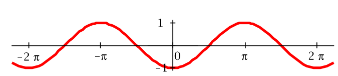


$\boldsymbol{f(x) = -\sqrt{|x|}}$

3.206.

$$f(x) = \cos(x + \pi), \qquad D_f = \mathbb{R}, \qquad R_f = [-1, 1].$$

A függvény periodikus, legkisebb pozitív periódusa 2π.

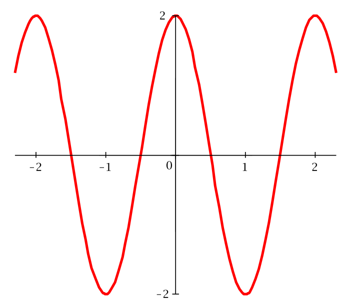


$\boldsymbol{f(x) = \cos(x + \pi)}$

3.207.

$$f(x) = 2\sin\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right), \quad D_f = \mathbb{R}, \quad R_f = [-2, 2].$$

A függvény periodikus, legkisebb pozitív periódusa 2.

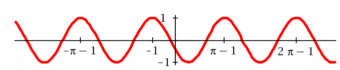


$$f(x) = 2\sin\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$$

3.208.

$$f(x) = \cos(2x + 2), \qquad D_f = \mathbb{R}, \qquad R_f = [-1, 1].$$

A függvény periodikus, legkisebb pozitív periódusa π.

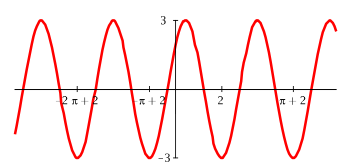


$$f(x) = \cos(2x + 2)$$

3.209.

$$f(x) = -3\cos(2x - 4), \qquad D_f = \mathbb{R}, \qquad R_f = [-3, 3].$$

A függvény periodikus, legkisebb pozitív periódusa π.

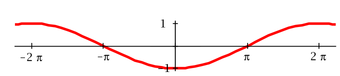


$$f(x) = -3\cos(2x - 4)$$

3.210.

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} - \pi\right), \qquad D_f = \mathbb{R}, \qquad R_f = [-1, 1].$$

A függvény periodikus, legkisebb pozitív periódusa 4π.

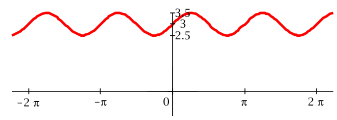


$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} - \pi\right)$$

3.211.

$f(x) = \dfrac{1}{2}\sin(-2x+\pi)+3,\ D_f = \mathbb{R},\ R_f = [-1/2, 1/2].$

A függvény periodikus, legkisebb pozitív periódusa π.



$f(x) = \dfrac{1}{2}\sin(-2x+\pi)+3$

3.215. Használjuk az addíciós képleteket!

$$g(x) = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x) + (\cos^2 x - \sin^2 x)}{2} = \cos^2 x = f(x).$$

3.216. $\cos^2\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{1+\cos\dfrac{5\pi}{6}}{2} = \dfrac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$

3.217. $\cos^2\dfrac{9\pi}{8} = \dfrac{1+\cos\dfrac{9\pi}{4}}{2} = \dfrac{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$

3.218.

$$1+t^2 = 1+\operatorname{tg}^2 x = 1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Innen

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \qquad \sin^2 x = 1-\frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

3.223.

$$32^{-3/5} = \left(2^5\right)^{-3/5} = 2^{-3} = \frac{1}{8}.$$

3.224. A logaritmus definíciója szerint

$$10^{-4} = 0{,}0001 = 10^{\lg 0{,}0001},$$

ezért $\lg 0{,}0001 = -4$.

3.225.

$$5^{\log_{25} 3} = \left(25^{1/2}\right)^{\log_{25} 3} = \left(25^{\log_{25} 3}\right)^{1/2} = 3^{1/2} = \sqrt{3}.$$

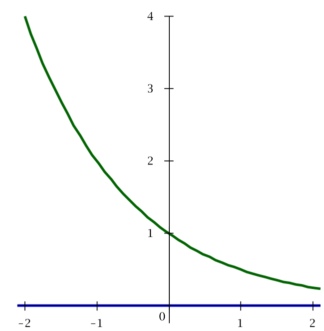
3.226.

$$\log_{1/3} 3 = \log_{1/3}(1/3)^{-1} = -\log_{1/3}(1/3) = -1.$$

3.231.

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \qquad D_f = \mathbb{R}, \qquad R_f = (0, \infty).$$

A függvény szigorúan monoton csökken az egész számegyenesen, nincs sem maximuma sem minimuma.

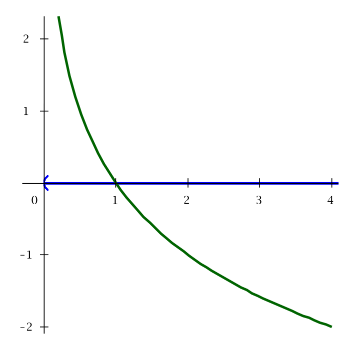


$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

3.232.

$$f(x) = \log_{1/2} x, \qquad D_f = (0, \infty), \qquad R_f = \mathbb{R}.$$

A függvény szigorúan monoton csökken a pozitív félegyenesen, nincs sem maximuma sem minimuma.

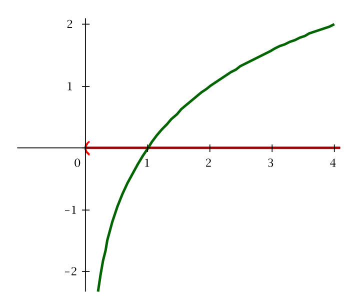


$f(x) = \log_{1/2} x$

3.233.

$$f(x) = -\log_{1/2} x, \qquad D_f = (0, \infty), \qquad R_f = \mathbb{R}.$$

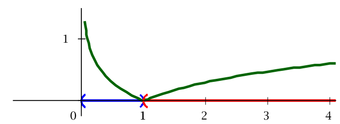
A függvény szigorúan monoton nő a pozitív félegyenesen, nincs sem maximuma sem minimuma.



$f(x) = -\log_{1/2} x$

3.234.

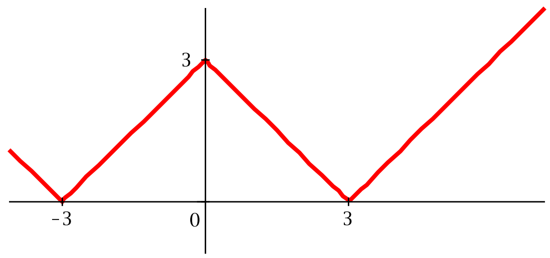
$$f(x) = |\lg x|\,, \qquad D_f = (0, \infty), \qquad R_f = [0, \infty).$$



$f(x) = |\lg x|$

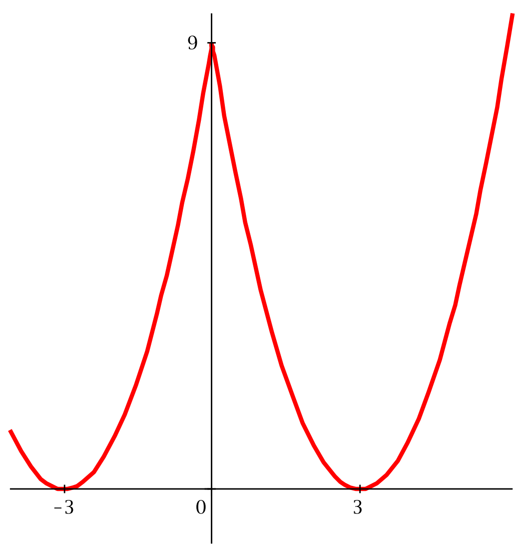
A függvény szigorúan monoton csökken a $(0, 1]$ intervallumon, mert ha $0 < x_1 < x_2 \leq 1$, akkor $\lg x \leq 0$, és ezen az intervallumon a $\lg x$ függvény szigorúan monoton nő, tehát az $|\lg x| = -\lg x$ függvény szigorúan monoton csökken. A függvény szigorúan monoton nő az $[1, \infty)$ félegyenesen. Az $x = 1$ pont minimumhely, mert $f(1) = 0$, és minden $x \in (0, \infty)$ esetén $f(x) \geq 0$. A minimum érték $f(1) = 0$.

3.245.



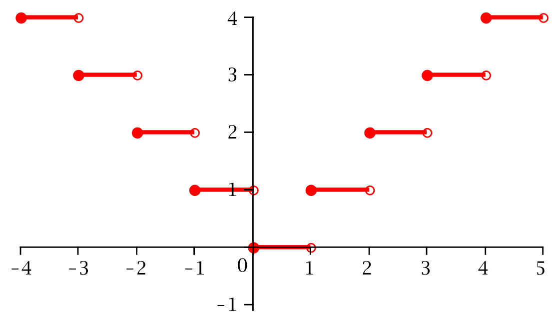
$||x| - 3|$

3.246.



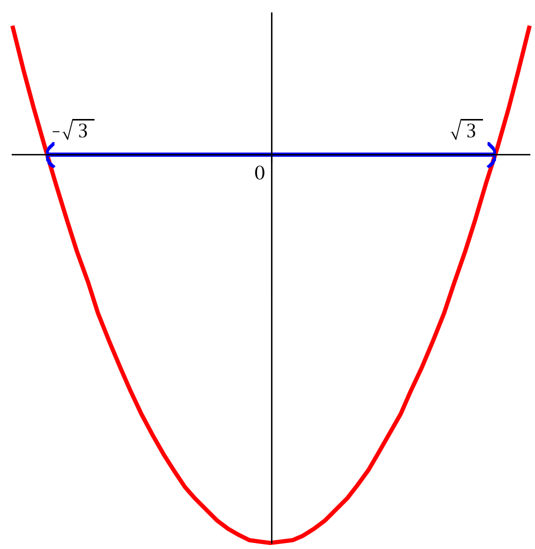
$(||x| - 3|)^2$

3.247.



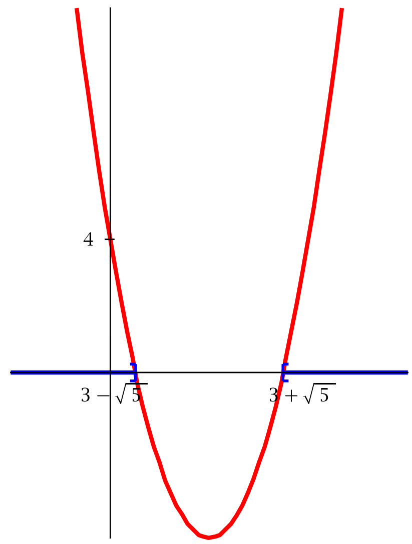
$|[x]|$

3.261.



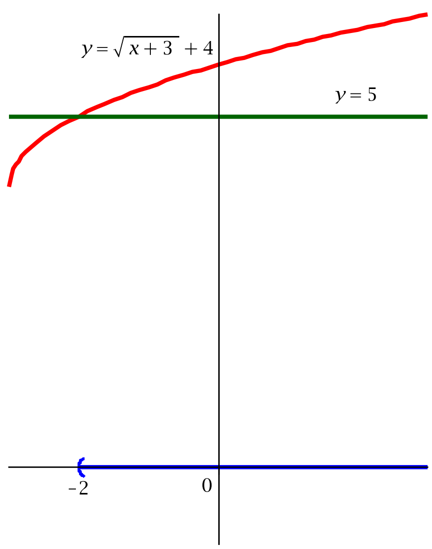
$x^2 - 3 < 0$

3.262.



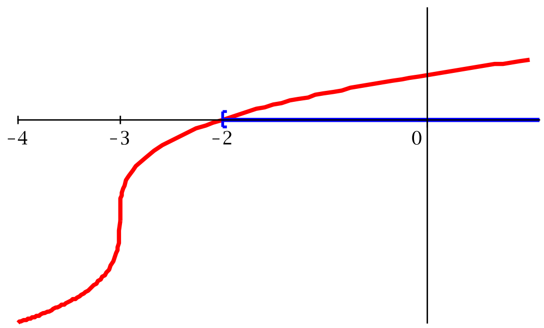
$$(x-3)^2-5 \geq 0$$

3.263.



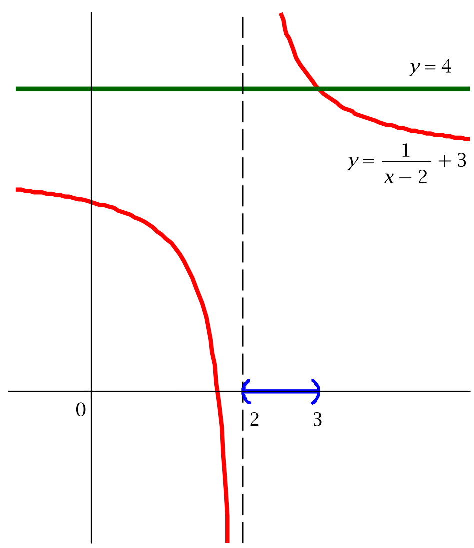
$$\sqrt{x+3}+4>5$$

3.264.



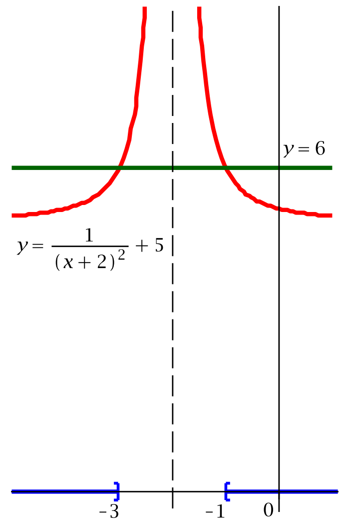
$$\sqrt[3]{x+3}-1\geq 0$$

3.265.



$$\frac{1}{x-2}+3>4$$

3.266.

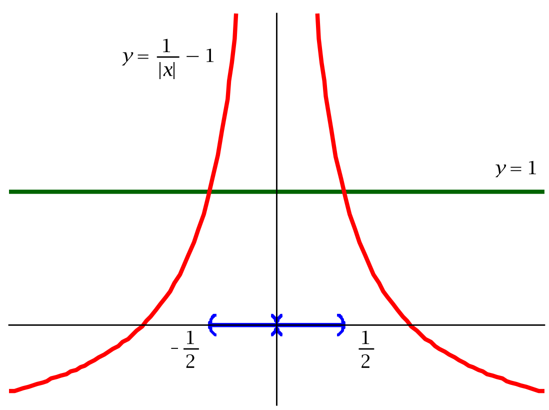


$$\frac{1}{(x+2)^2} + 5 \leq 6$$

3.269.

$$\left|\frac{1}{x}\right| - 1 \geq 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left|\frac{1}{x}\right| \geq 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \neq 0 \text{ és } |x| \leq \frac{1}{2}.$$

Ezért a megoldások halmaza $(-1/2, 0) \cup (0, 1/2)$.

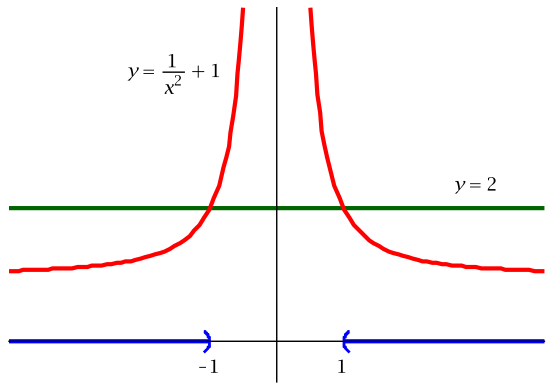


$$\left|\frac{1}{x}\right| - 1 \geq 1$$

3.270.

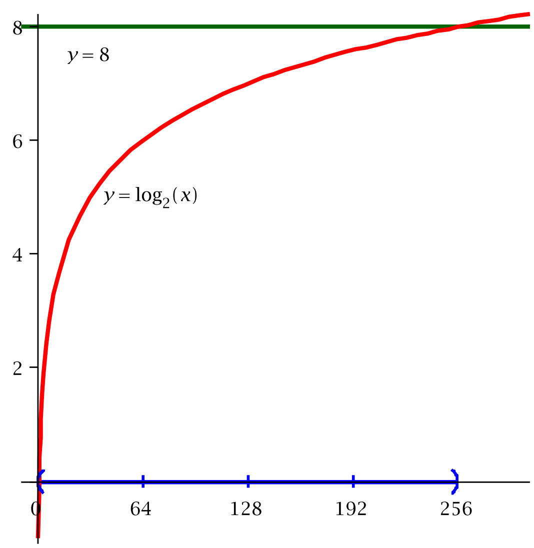
$$\frac{1}{x^2}+1<2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{x^2}<1 \qquad \Longleftrightarrow \quad |x|>1.$$

Ezért a megoldások halmaza $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.



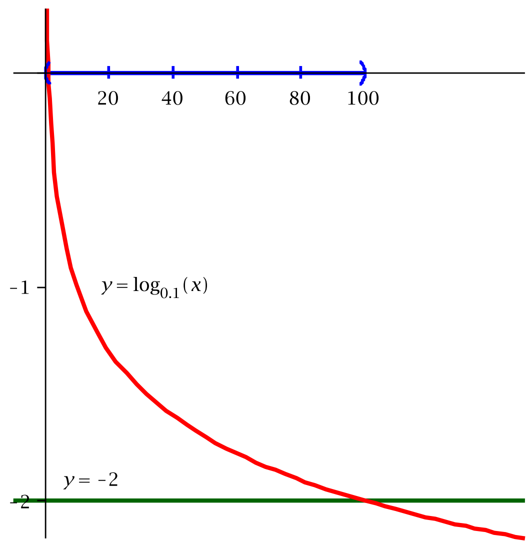
$$\mathbf{\frac{1}{x^2}+1<2}$$

3.271. A $\log_2 x$ függvény szigorúan monoton nő a $(0,\infty)$ félegyenesen, $\log_2 256 = 8$. Ezért a $\log_2 x < 8$ egyenlőtlenség megoldásainak halmaza a $(0,256)$ nyílt intervallum.



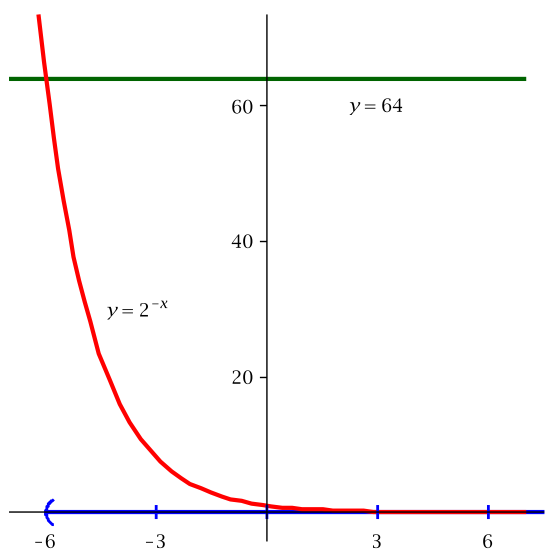
$$\mathbf{\log_2 x < 8}$$

3.272. A $\log_{0,1} x$ függvény szigorúan monoton csökken a $(0, \infty)$ félegyenesen, $\log_{0,1} 100 = -2$. Ezért a $\log_{0,1} x > -2$ egyenlőtlenség megoldásainak halmaza a $(0, 100)$ nyílt intervallum.



$$\log_{0,1} x > -2$$

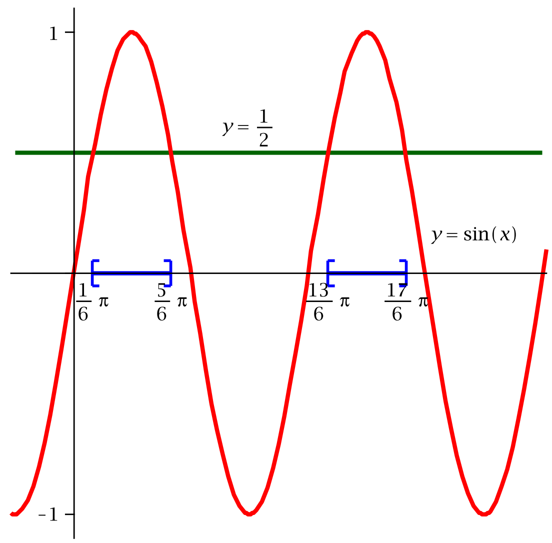
3.273. A $2^{-x} < 64$ függvény szigorúan monoton csökken a számegyenesen, $2^{-(-6)} = 64$. Ezért a $2^{-x} < 64$ egyenlőtlenség megoldásainak halmaza a $(-6, \infty)$ nyílt félegyenes.



$$2^{-x} < 64$$

3.274. A $\sin x$ függvény periodikus, legkisebb pozitív periódusa 2π. A $[0, 2\pi]$ intervallumon belül az $\frac{1}{2}$ értéket az $x_1 = \frac{\pi}{6}$ és az $x_2 = \frac{5\pi}{6}$ helyeken veszi fel. A két pont között a függvényérték nagyobb, mint $\frac{1}{2}$. Tehát a $\sin x \geq \frac{1}{2}$ egyenlőtlenség megoldásai

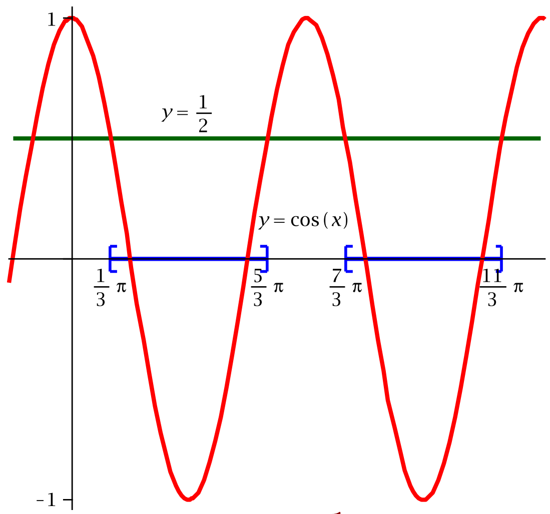
$$\left\{x : \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} [\pi/6 + 2k\pi, 5\pi/6 + 2k\pi].$$



$$\mathbf{\sin x \geq \frac{1}{2}}$$

3.275. A $\cos x$ függvény periodikus, legkisebb pozitív periódusa 2π. A $[0, 2\pi]$ intervallumon belül az $\frac{1}{2}$ értéket az $x_1 = \frac{\pi}{3}$ és az $x_2 = \frac{5\pi}{3}$ helyeken veszi fel. A két pont között a függvényérték kisebb, mint $\frac{1}{2}$. Tehát a $\cos x \leq \frac{1}{2}$ egyenlőtlenség megoldásai

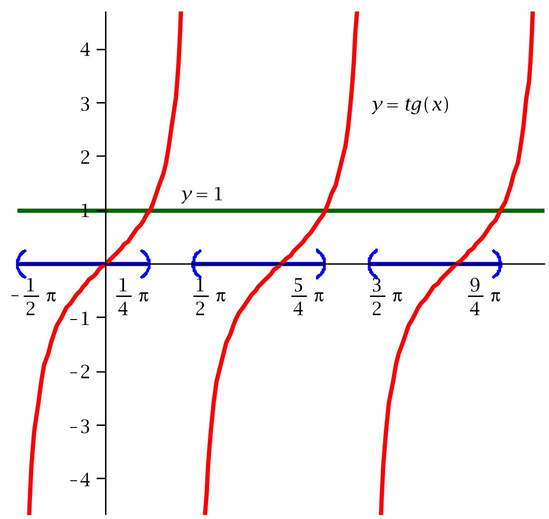
$$\left\{x : \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} [\pi/3 + 2k\pi, 5\pi/3 + 2k\pi].$$



$$\mathbf{\cos x \leq \frac{1}{2}}$$

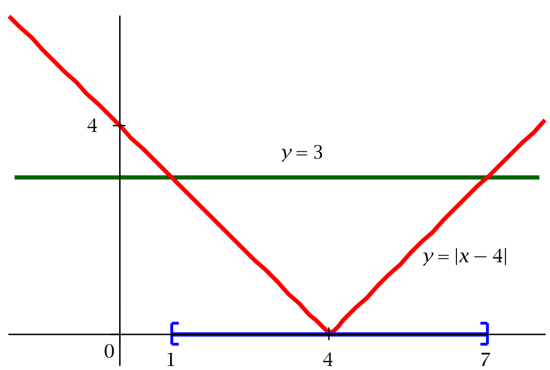
3.276. A $\operatorname{tg} x$ függvény periodikus, legkisebb pozitív periódusa π. Nincs értelmezve a $\frac{\pi}{2} + k\pi$ helyeken. A $[-\pi/2, \pi/2]$ intervallumon belül a $\operatorname{tg} x$ függvény szigorúan monoton nő, az 1 értéket az $x = \frac{\pi}{4}$ helyen veszi fel. A $(-\pi/2, \pi/4)$ intervallumban a függvényérték kisebb, mint 1. Tehát a $\operatorname{tg} x < 1$ egyenlőtlenség megoldásai

$$\left\{x : -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (-\pi/2 + k\pi, \pi/4 + k\pi].$$



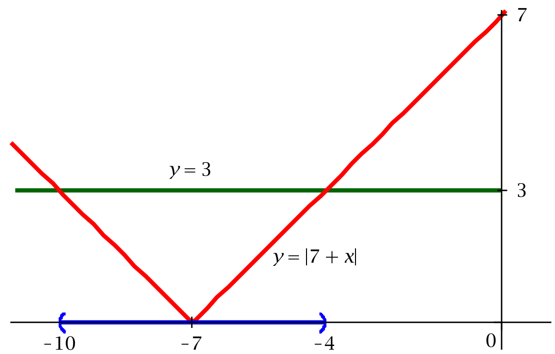
$\mathbf{tg}\, \boldsymbol{x} < \mathbf{1}$

3.279.



$|\mathbf{4} - \boldsymbol{x}| \leq \mathbf{3}$

3.280.



$$\mathbf{|7+x|<3}$$

3.282. Adott r sugarú kör esetén jelölje t, illetve k a feleakkora sugarú kör területét illetve kerületét, T pedig az r sugarú kör területét.

$$T=\pi r^2, \qquad t=\frac{\pi}{4}r^2, \qquad k=\pi r.$$

Innen

$$T=f(t)=4t, \qquad T=g(k)=\frac{k^2}{\pi}.$$

3.283. Ha a gömb sugara r, akkor felszíne

$$A=4\pi r^2,$$

térfogata pedig

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

A térfogat képletéből fejezzük ki r-et, majd helyettesítsük be a felszín képletébe:

$$r=\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}, \qquad A=4\pi\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Tehát a gömb felszíne a gömb térfogatának függvényében

$$A=f(V)=\sqrt[3]{36\pi V^2}.$$

3.284. Ha a kocka élének hossza a, akkor térfogata $V=a^3$, felszíne $A=6a^2$, testátlója pedig $d=a\sqrt{3}$. Így tehát a keresett függvények:

$$V=f(d)=\frac{d^3}{\sqrt{27}}, \qquad A=g(d)=2d^2.$$

Mindkét függvény értelmezési tartománya a $(0,\infty)$ félegyenes (ha nem engedjük meg az elfajult, 0 élhosszúságú kockát).

3.285. Ha a kocka élének hossza a, akkor térfogata $V = a^3$, testátlója pedig $d = a\sqrt{3}$. Így tehát a keresett függvény:

$$d = f(V) = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{V}.$$

A függvény értelmezési tartománya a $(0, \infty)$ félegyenes (ha nem engedjük meg az elfajult, 0 élhosszúságú kockát).

3.287. Az r sugarú, α középponti szögű körcikk területe:

$$T = f(\alpha) = \frac{1}{2} r\alpha.$$

Itt α a független változó, r pedig egy rögzített konstans (paraméter).

3.288. A medencébe percenként 500 liter $= 0.5$ m^3 víz folyik be. Ezért a medence vízének magassága percenként $\frac{0.5}{250} = 0.002$ métert emelkedik. Így a medence vízének h magassága a csap megnyitása után t perccel

$$h(t) = 0.002t.$$

A 2 méter mély medence $3/4$ része $3/2$ métert jelent, így az ehhez szükséges időt (percben mérve) a

$$\frac{3}{2} = 0.002t$$

egyenletből kapjuk. Innen $t = 750$ perc, azaz 12 óra 30 perc. Tehát a délben kinyitott csap esetén éjfél után 30 perccel lesz úszásra alkalmas másfél méter a víz magassága.

3.289. Az a élű kocka testátlója $d = a\sqrt{3}$. Ez éppen a gömb átmérője (ha a gömb középpontja megegyezik a kocka szimmetria középpontjával), azaz

$$R(a) = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$

3.290. Az R sugarú gömb pontosan akkor érinti az a élű kocka éleit, ha a gömb középpontja megegyezik a kocka szimmetria középpontjával és a kocka lapátlója megegyezik a gömb átmérőjével, azaz

$$a\sqrt{2} = 2R, \qquad a = f(R) = R\sqrt{2}.$$

3.291. Fejezzük ki az időt a sebesség függvényeben (a sebesség függvény inverze):

$$v = gt, \qquad t = \frac{v}{g}.$$

Ezt behelyettesítve az utat megadó $s(t) = \frac{1}{2} g t^2$ képletbe

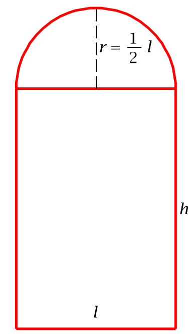
$$s = s(v) = \frac{1}{2} \frac{v^2}{g}.$$

3.292. Használjuk az ábra jelöléseit!
Az ablak területe

$$T(h) = lh + \frac{r^2\pi}{2} = lh + \frac{l^2\pi}{8},$$

kerülete pedig

$$k(h) = 2h + l + r\pi = 2h + l + \frac{l\pi}{2}.$$



3.293. Ha r jelöli a gömb sugarát, akkor a gömb felszíne

$$A = 4\pi r^2.$$

A kétszer akkora sugarú gömb térfogata pedig

$$V = \frac{32\pi r^3}{3}.$$

Az utóbbi képletből fejezzük ki r-et:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{32\pi}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}.$$

Ezt behelyettesítve a felszín képletébe

$$A = A(V) = 2\pi\sqrt[3]{\frac{9V^2}{16\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{9\pi V^2}{2}}.$$

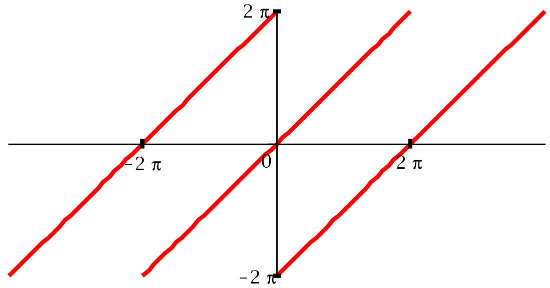
3.294. Ha $h(t)$ jelöli a tartályban levő víz magasságát, $V(t)$ pedig a térfogatát a t időpontban, akkor

$$h(t) = h - vt, \qquad V(t) = Th(t) = T(h - vt).$$

Ezek a képletek akkor érvényesek, amikor a magasság, illetve a térfogat nem negatív, azaz

$$0 \le t \le \frac{h}{v}.$$

3.300. Ezek a pontok az $y = x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ és az $y = -x + (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ összefüggéssekkel megadott pontok a síkban, ez két, párhuzamos egyenesekből álló görbesereg.



$$\sin y = \sin x$$

Sorozatok

4.5. $2,\ 5,\ 10,\ 17,\ 26,\ 37, \dots, k^2+1,\ (k+1)^2+1 = k^2+2k+2, \dots$

4.6. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \dots, \frac{k}{k+1}, \frac{k+1}{k+2}, \dots$

4.7. $4, -\sqrt{2}, -\sqrt{3},\ 7, -\sqrt{5},\ 9, \dots, \begin{cases} -\sqrt{k}, & \text{ha } k \text{ prím} \\ k+3 & \text{egyébként} \end{cases}, \begin{cases} -\sqrt{k+1}, & \text{ha } k+1 \text{ prím} \\ k+4 & \text{egyébként} \end{cases}, \dots$

4.8. $0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 1, \dots, \begin{cases} 1, & \text{ha } k \text{ páros} \\ -1, & \text{ha } k \text{ páratlan} \end{cases}, \begin{cases} -1, & \text{ha } k \text{ páros} \\ 1, & \text{ha } k \text{ páratlan} \end{cases}, \dots$

4.9. $-1,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0, \dots, 0,\ 0, \dots$

4.10. $3, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{9}, \frac{9}{14}, \frac{14}{23}, \dots, \frac{1}{a_{k-1}+1}, \frac{1}{a_k+1}, \dots$

4.11. $0,\ 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{11}{16}, \dots, \frac{a_{k-2}+a_{k-1}}{2}, \frac{a_{k-1}+a_k}{2}, \dots$

4.12. $0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5, \dots, a_{k-2}+a_{k-1},\ a_{k-1}+a_k, \dots$

4.18. Ha $n > 10$, akkor $n^3 > 1000$, és ezért $n^3 + 1000 < 2n^3$. Ezt felhasználva

$$3n^4 + 2n^2 + 1 > 3n^4 > 2n^3 > n^3 + 1000$$

biztosan teljesül, ha $3n > 2$, azaz $n > 2/3$, és $n > 10$. Tehát minden $N \geq 10$ egész szám esetén, ha $n > N$, akkor $3n^4 + 2n^2 + 1 > n^3 + 1000$. Ez végtelen sok megoldás N-re, de $N = 10$ nem a lehető legkisebb.

4.19. Legyen $n > 10$, és ezért $n^3 > 1000$.

$$3n^4 - 2n^3 > n^3 + 1000 \iff 3n^4 > 3n^3 + 1000 \Longleftarrow 3n^4 > 4n^3 \iff n > \frac{4}{3}.$$

Tehát minden $N \geq 10$ egész szám megoldás.

4.21. Nincs a sorozatnak 100-nál nagyobb tagja, mert

$$a_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\dots+\sqrt{n}}{1+2+3+\dots+n} \leq \frac{n\sqrt{n}}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2\sqrt{n}}{n+1} < \frac{2}{\sqrt{n}} \leq 2 < 100.$$

Vegyes feladatok

5.1.

(a) x^2 piros, $(x-3)^2$ zöld. **(b)** $(x+5)^2$ piros, x^2 zöld.

(c) $(x-3)^2$ piros, x^2-5 zöld. **(d)** $(x-3)^2+5$ piros, $(x+3)^2-5$ zöld.

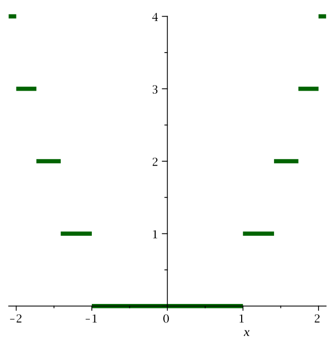
(e) x^2 piros, x^4 zöld. **(f)** $\sqrt{x}$ piros, $\sqrt[4]{x}$ zöld.

5.2.

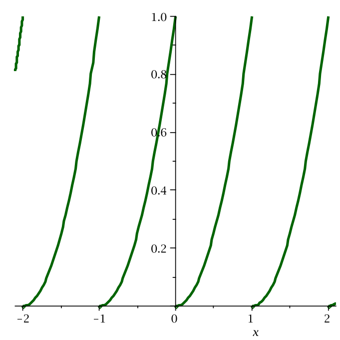
(a) x^2 piros, $|x^3|$ zöld. **(b)** $\sqrt{2x}$ piros, $2\sqrt{x}$ zöld.

(c) $-\sqrt{x}$ piros, $\sqrt{-x}$ zöld. **(d)** $\{-x\}$ piros, $-\{x\}$ zöld.

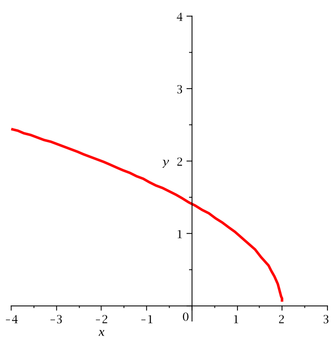
5.3.



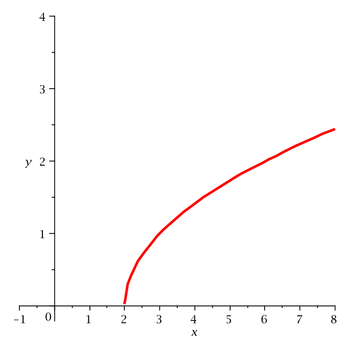
$[x^2]$



$\{x\}^2$

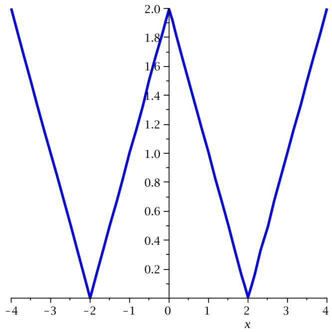


$\sqrt{2-x}$

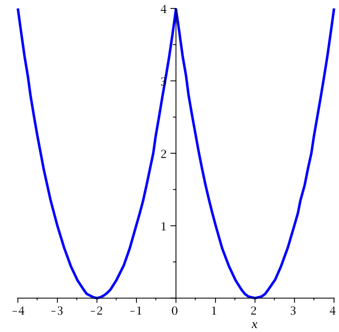


$\sqrt{x-2}$

5.4.

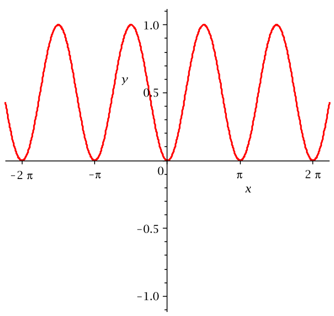


$||x|-2|$

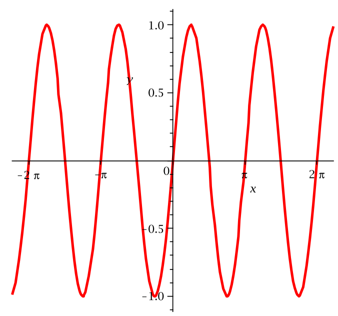


$(|x|-2)^2$

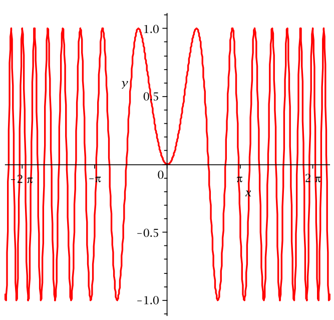
5.5.



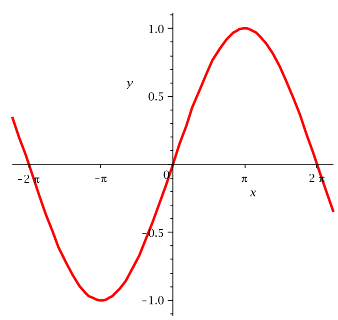
$\sin^2 x$



$\sin 2x$

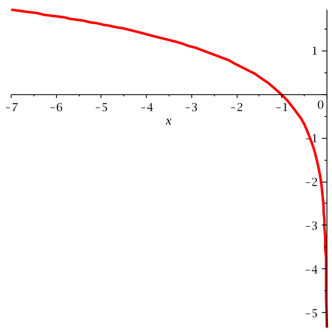


$\sin x^2$

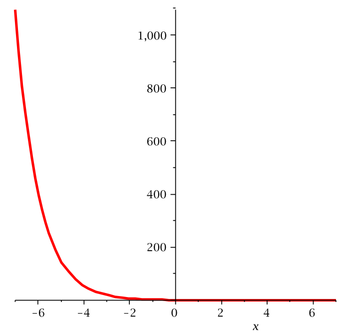


$\sin x/2$

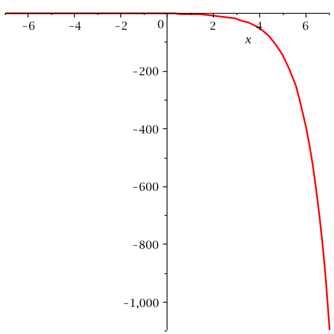
5.6.



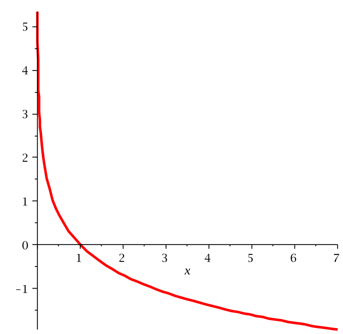
$\log_2(-x)$



2^{-x}

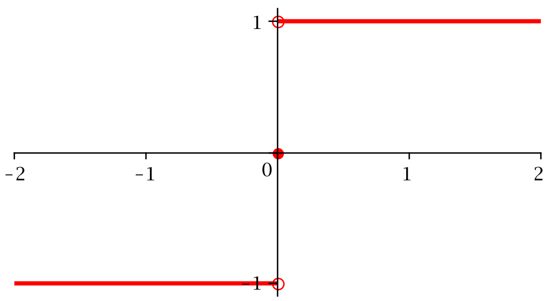


-2^{x}

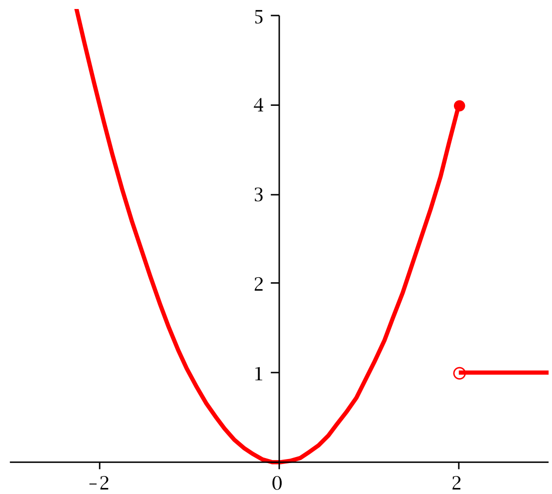


$-\log_2 x$

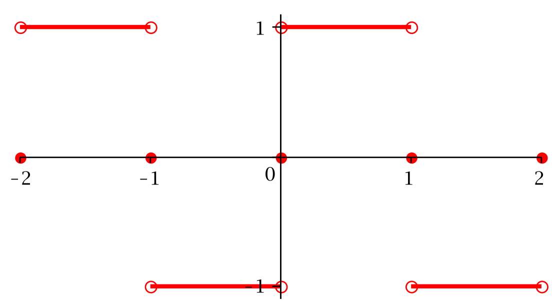
5.7.



$\operatorname{sgn} x$

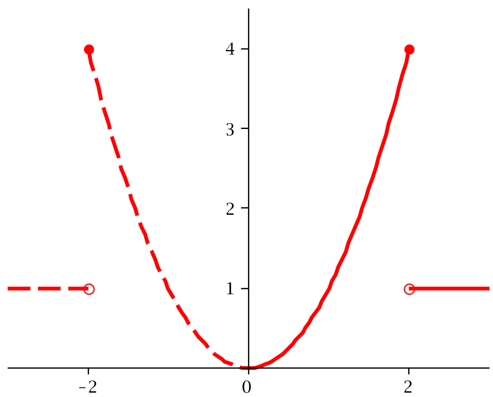


$$\begin{cases} x^2, & \text{ha } x \le \sqrt{2} \\ 1, & \text{ha } x > \sqrt{2} \end{cases}$$

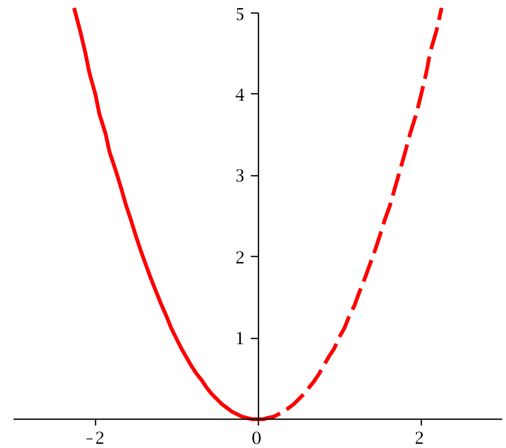


$\operatorname{sgn} \sin \pi x$

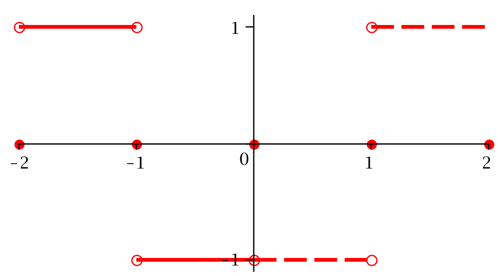
5.8. **(a)** páros:



$$\begin{cases} x^2, & \text{ha } |x| \le 2 \\ 1, & \text{ha } |x| > 2 \end{cases}$$

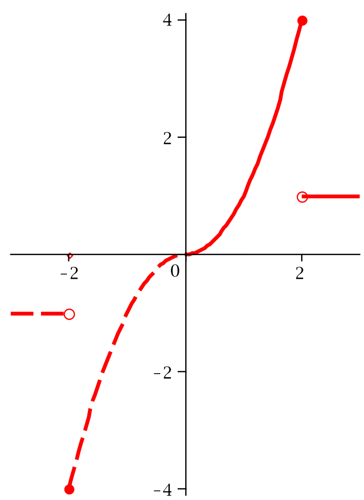


$$x^2$$

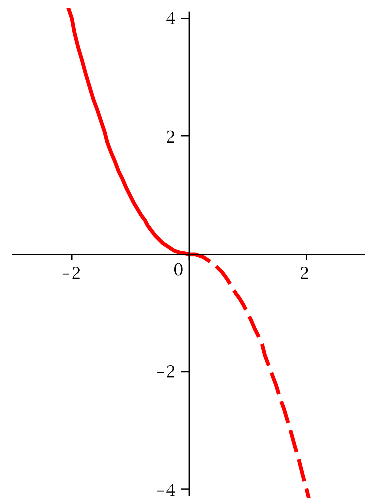


$$-\operatorname{sgn}\sin(\pi\,|x|)$$

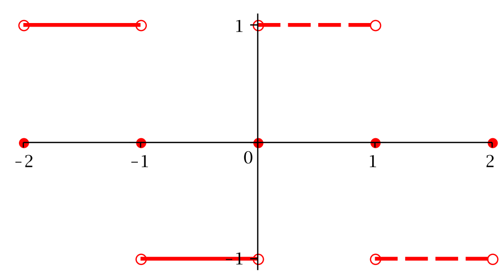
(b) páratlan:



$$\operatorname{sgn} x \cdot \begin{cases} x^2 & \text{ha } |x| \le 2 \\ 1 & \text{ha } |x| > 2 \end{cases}$$



$$-\operatorname{sgn} x \cdot x^2$$



$$-\operatorname{sgn} \sin \pi x$$

5.9. **(a)** – **(a)**, **(b)** – **(d)**

Több nincs, az **(f)** alatti ábra nem függvénygrafikon!

5.10. Hamis. Ellenpélda: pl. $x = 1$ esetén $\sqrt{2} \neq 2$.

5.11. Hamis. Ellenpélda: pl. $x = 2$.

5.12. Hamis. Ellenpélda: pl. $x = 1$ (az egyenlőtlenség pontosan akkor igaz, ha $x < 1$ és $x \neq 0$).

5.13. Hamis. Ellenpélda: pl. $x = 1$ (az egyenlőtlenség pontosan akkor igaz, ha $x > 1$).

5.14. Hamis. Keressünk ellenpéldát!

5.15. Hamis. Keressünk ellenpéldát!

5.16. Hamis. Keressünk ellenpéldát!

5.17. Hamis. Keressünk ellenpéldát!

5.18. Hamis. Keressünk ellenpéldát!

5.19. Hamis. Ellenpélda: $\sqrt{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{|x|} \neq \frac{1}{x}$ ha $x < 0$.

5.20. Hamis. Ellenpélda: pl. $x = 1$. Csak $x = 0$ esetén van egyenlőség.

5.21. Hamis. Ellenpélda: pl. $x = -2$. Csak $x \geq 0$ esetén van egyenlőség.

5.22. Igaz, mert szorzat abszolút értéke az abszolút értékek szorzata.

5.23. Hamis. Ellenpélda: pl. $x = -2$.

5.24. Hamis. Ellenpélda: pl. $x = \frac{1}{2}$.

5.25. Hamis. Ellenpélda: pl. $x = \frac{1}{2}$.

5.26. Igaz. Bármely szám törtrésze megegyezik a szám és egész részének a különbségével:

$$\{a\} = a - [a].$$

5.27. Hamis. Keressünk ellenpéldát!

5.28. Hamis. Keressünk ellenpéldát!

5.29. Igaz. Ld. a 5.26. feladatot.

5.30. Hamis. Keressünk ellenpéldát!

5.31. Igaz. A törtrész nem negatív!

5.32. Igaz. $\sin 3(x + 6\pi) = \sin(3x + 18\pi) = \sin 3x$.

5.33. Hamis, ha $\sin x$ negatív, például $x = -\dfrac{\pi}{2}$ esetén.

5.34. Igaz. Használjuk az addíciós képleteket!

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - (\cos^2 x - \sin^2 x)}{2} = \sin^2 x$$

5.35. Igaz. Használjuk az addíciós képleteket!

5.36. Hamis, például ha $x = \pi/2$. A $\sin x$ függvény páratlan, de nem páros!

5.37. Igaz, a $\cos x$ függvény páros függvény.

5.38. Hamis. Ne keverjük a fokot a radiánnal!

5.39. Igaz ott, ahol mindkét oldal értelmes, azaz $x \neq \pi/2 + (2k + 1)\pi$:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \qquad \operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}.$$

5.40. Igaz, bizonyítsuk be indirekt módon (ld. a 2.4. feladatot).

5.41. Igaz. Irracionális szám reciproka irracionális, és az előző feladat szerint $\sqrt{5}$ irracionális.

5.42. Hamis. Ellenpélda: $a = \sqrt{2},\ b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Az állítás tagadása: $ab \in \mathbb{Q}$ és ($a \notin \mathbb{Q}$ vagy $b \notin \mathbb{Q}$).

5.43. Igaz. Indirekt módon tegyük fel, hogy az állítás tagadása igaz.

Az állítás tagadása: $ab \notin \mathbb{Q}$ és ($a \in \mathbb{Q}$ és $b \in \mathbb{Q}$).

Mivel bármely két racionális szám szorzata racionális, ezért az állítás tagadása hamis, tehát az eredeti állítás igaz.

5.44. Hamis. Ellenpélda: $a = \sqrt{2},\ b = 2$.

Az állítás tagadása: $ab \notin \mathbb{Q}$ és ($a \in \mathbb{Q}$ vagy $b \in \mathbb{Q}$).

5.45. Hamis. Ellenpélda: $x = 1$.

Megjegyzés: Mivel a bal oldal mindig pozitív, a jobb oldal pedig mindig negatív, ezért bármely $x \in \mathbb{R}$ megfelel ellenpéldának.

Az állítás tagadása: van olyan x, amelyre $2^{-x} \neq -2^x$

5.46. Hamis! Nincs olyan x, amelyre a bal oldal is értelmes és a jobb oldal is értelmes!

Az állítás tagadása: van olyan x, amelyre $-\log_2 x \neq \log_2(-x)$.

5.47. Hamis. Ellenpélda: $x = \pi$.

Az állítás tagadása: $\sin x < \frac{1}{2}$ és $x \geq \frac{\pi}{6}$.

5.48. Igaz. A 2^x függvény minden értéket csak egyszer vesz fel (invertálható).

Az állítás tagadása: $2^x = 2^3$ és $x \neq 3$.

5.49. Hamis. Ellenpélda: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi$.

Az állítás tagadása: $\cos x = \cos\frac{\pi}{6}$ és $x \neq \frac{\pi}{6}$.

5.50. Hamis.

$$\log_5 2 + \log_5\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) + \log_5\left(\cos\frac{\pi}{6}\right) + \log_5\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) = \log_5\left(2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3}\right) =$$
$$= \log_5\left(\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}\right) = \log_5\left(\frac{3}{4}\right) \neq 0, \qquad \text{mert } \frac{3}{4} \neq 1.$$

5.51. Igaz az állítás, indirekt módon bizonyítjuk: ha f szigorúan monoton, akkor $f(1) \neq f(2)$. Ha $f(1) < f(2)$, akkor $f(-2) > f(-1)$, tehát az f nem szigorúan nő. Ha viszont $f(1) > f(2)$, akkor $f(-2) < f(-1)$, tehát az f nem szigorúan csökken.

5.52. Igaz az állítás. Ha f szigorúan monoton növő, akkor $f(-1) < f(1)$, és ezért $f(-1) \neq f(1)$.

5.53. Igaz az állítás. Legyen tehát f szigorúan növő $\mathbb{R}$-en. Ekkor $f(-1) < f(0) < f(1)$, és ezért $f(-1) \neq f(1)$, tehát f nem páros függvény.

5.54. Hamis az állítás, például az $f(x) = x$ függvény szigorúan nő és páratlan.

Tagadás: Van olyan f függvény, amelyik szigorúan nő és páratlan.

5.55. Nem igaz, például az $f(x) = \sin x$ függvény páratlan, de vannak csökkenő és vannak növő szakaszai is.

Tagadás: Van olyan f függvény, amelyik páratlan és nem szigorúan monoton az egész számegyenesen.

5.56. Igaz az állítás. Ha az f függvénynek a p (nem nulla szám) periódusa, akkor minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén kp is periódus és különböző k-k esetén ezek különböző számok.

5.57. Igaz az állítás. A konstans függvénynek minden nem nulla szám, és ezért minden pozitív szám periódusa, de nincs legkisebb pozitív szám!

5.58. Nem igaz az állítás. A $\sin 2x + \cos 3x$ függvénynek a 2π is periódusa. Azt viszont, hogy a 2π a legkisebb pozitív periódus, nem könnyű bizonyítani.

Tagadás: A $\sin 2x + \cos 3x$ legkisebb pozitív periódusa nem a 6π.

5.59. Igaz, mivel $g(x) = \log_2 x$ értelmezési tartománya $(0, \infty)$, $\sin x$ pedig mindenütt értelmezett.

5.60. Nem igaz, például $x = -\pi/2$ esetén $f(-\pi/2) = -1 < 0$ és g nincs értelmezve a negatív számokon.

Tagadás: Az $f(x) = \sin x$ és $g(x) = \log_2 x$ esetén $g\left(f(x)\right)$ értelmezési tartománya nem az egész $\mathbb{R}$.

5.61. Nem igaz. Az $f(x) = x$ függvény grafikonjának az $y = x$ egyenes szimmetriatengelye, de az x függvény nem páros.

Tagadás: Van olyan függvény, amelyiknek a grafikonja tengely-szimmetrikus, de nem páros.

5.62. Nem igaz. Az $f(x) = \cos x$ függvény ellenpélda.

Tagadás: Van olyan függvény, amelyiknek a grafikonja szimmetrikus a sík valamelyik pontjára, de nem páratlan függvény.

5.63. Hamis. Ellenpélda: $x = -6$.

Tagadás: $x^2 > 25$ és $x \leq 5$.

5.64. Igaz.

Pozitív x-eken az x^2 függvény szigorúan monoton nő, ezért ha $x > 5$, akkor $x^2 > 5^2 = 25$.

5.65. Hamis. Ellenpélda: $a = -1,\ b = -1$.

Tagadás: Van olyan valós a, b szám, amelyre $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$.

5.66. Igaz. Például legyen $f(x) \equiv 1$.

Megjegyzés: A konstans függvények azok, amelyek egyszerre nőnek és csökkennek (de nem szigorúan).

5.67. Hamis. Ellenpélda: $f(x) = \sin \pi x$.

Tagadás: Az f függvény nem monoton növő $(0, 1)$-en és nem monoton csökkenő $(0, 1)$-en.

5.68. Hamis. Ellenpélda: x^2.

Tagadás: Van olyan függvény, amelyik nem invertálható.

5.69. Hamis. Ellenpélda: x^2.

Tagadás: Van olyan páros függvény, amelyik nem invertálható.

5.70. Hamis. Ellenpélda: $\sin x$.

Tagadás: Van olyan páratlan függvény, amelyik nem invertálható.

5.71. Igaz. A függvény nem egy-egy értelmű, mert $f(-1) = f(1)$.

5.72. Hamis. Ellenpélda: $f(x) = \sin x$.

Tagadás: Van olyan f függvény, amelyik páratlan és nem invertálható.

5.73. Igaz, mert ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény páros, akkor nincs inverze 5.71. feladat.

Megjegyzés: Ez a 5.71. állítás **kontrapozitív** verziója.

5.74. Hamis. Ellenpélda: $x + 1$.

Tagadás: Van olyan f függvény, amelyiknek van inverze és nem páratlan.

5.75. Igaz. Legyen $x \in A$ tetszőleges. Mivel $A \subset B$, ezért $x \in B$. És mivel $B \subset C$, ezért $x \in C$.

5.76. Igaz, ez éppen a részhalmaz definíciója.

5.77. Nem igaz, például ha $A = B = [0, 1]$, akkor $C = [0, 1]$ és $C \setminus B = \emptyset \neq A$.

5.78. Nem igaz, például ha $A = [0, 1]$, $B = [0, 2]$, akkor $A \setminus B = \emptyset$ és $A \neq B$.

Megjegyzés: ne keverjük össze a kivonást a halmazok különbségével! Annyi viszont igaz, hogy ha $A \setminus B = \emptyset$, akkor $A \subset B$

5.79. Nem igaz, például ha $A = [0, 2]$, $B = [1, 3]$, akkor $C = A \cap B = [1, 2]$ és $A \not\subseteq C$.

Megjegyzés: ne keverjük össze a metszetet az unióval. Az állítás az „unióra” igaz: ha $A \cup B = C$, akkor $A \subset C$.

5.80. Igaz, a következtetés „tranzitív”. Leolvasható például az igazságtáblázatból.

5.81. Igaz az implikáció definíciója miatt.

5.82. Igaz az implikáció definíciója miatt.

5.83. Nem igaz. Például, ha **P**: $x > 3$, **Q**: $x > 2$, **R**: $x > 1$.

5.84. Igaz, $\sin(3(x + 6\pi)) = \sin(3x + 18\pi) = \sin 3x$.

5.85. Nem igaz, ha például $x = \pi$, akkor $\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{3} \neq \operatorname{tg} \dfrac{7\pi}{18}$.

5.86. Nem igaz, ha $f(x)$ páros, akkor például $f(-1) = f(1)$ és ezért $f(-1) \not< f(1)$.

5.87. Igaz, legyen $f(x) = x^3$.

5.88. Nem igaz, egy függvénygrafikont minden függőleges egyenes legfeljebb egy pontban metsz, viszont például a kör középpontján áthaladó függőleges egyenes a kört két pontban metszi.

5.89. Nem igaz, legyen például

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 0 \\ 1, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

5.90. Nem igaz, az $a_n = \dfrac{1}{n}$ sorozat se nem számtani, se nem mértani sorozat.

5.91. Igaz, ld. az előző feladatot.

5.92. Igaz, legyen például $a_n = (-1)^n n$.

5.93. Nem igaz, legyen például $a_n = 1 - \frac{1}{n}$.

5.101. Nem helyes, az összegnek tagjai vannak.

5.102. Helyes.

5.103. Helyes.

5.104. Nem helyes, a szorzatnak tényezői vannak.

5.105. Helyes a mondat, **de nem igaz**.

5.106. Helyes és **igaz**.

5.107. Helyes, a halmaznak elemei vannak és **igaz** az állítás.

5.108. Helytelen, a halmaznak elemei vannak.

5.109. Helytelen, a sorozatnak tagjai vannak.

5.110. Helyes és **igaz** is.