BEVEZETÉS AZ ANALÍZISBE

Mezei István, Faragó István, Simon Péter

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Halmazok, relációk, függvények

Bemutatjuk a matematika eszközeit, a lépten-nyomon használt fogalmakat, fontos megállapodásokat vezetünk be. Biztos alapokat készítünk a további építkezéshez. Gyakran alkalmazzuk a "minden", illetve "tetszőleges" szavak rövidítésére a $\forall$, a "létezik, illetve "van olyan" kifejezések helyett pedig a $\exists$ jelet. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk.

- Halmaz fogalma és halmazműveletek
- Reláció
- Függvény fogalma és tulajdonságai
- Kompozíció és inverz
- Halmaz számossága

1.1. Halmazok, relációk, függvények $\boxed{\text{A}}$

1.1.1. Halmazok és relációk

Egy **halmaz**t akkor tekintünk ismertnek, ha minden jól megfogalmazható dologról el tudjuk dönteni, hogy hozzá tartozik vagy nem tartozik hozzá. (Az „okos gondolat”, a „szép lány”, az „elég nagy szám” vagy a „kicsi pozitív szám” nem tekinthető jól megfogalmazott dolognak, ezekről nem kérdezzük, hogy benne vannak-e valamilyen halmazban, hogy alkotnak-e halmazt.)

Legyen A halmaz, x egy jól definiált dolog. Ha x hozzátartozik a halmazhoz, akkor ezt $x \in A$ jelölje. Ha x nem tartozik hozzá a halmazhoz, akkor ezt $x \notin A$ jelöli.

A halmaz elemeit felsorolhatjuk, például $A := \{a, b, c, d\}$, vagy értelmes tulajdonsággal adjuk meg a halmazt, például $B := \{x \mid x \text{ valós szám és } x^2 < 2\}$.

1.1. Definíció. *Legyen A és B halmaz. Azt mondjuk, hogy A része a B halmaznak, ha minden $x \in A$ esetén $x \in B$. Jele: $A \subset B$.*

1.2. Definíció. *Legyen A és B halmaz. Az A halmaz egyenlő a B halmazzal, ha ugyanazok az elemei. Jele: $A = B$.*

Könnyen meggondolható a következő tétel:

1.1. Tétel. *Legyen A és B halmaz. $A = B$ pontosan akkor, ha $A \subset B$ és $B \subset A$.*

Néhány eljárást mutatunk, melyekkel újabb halmazokhoz juthatunk.

1.3. Definíció. *Legyen A és B halmaz.*
Az A és B egyesítése (uniója) az a halmaz, amelyre $A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}$.
Az A és B metszete (közös része) az a halmaz, amelyre $A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\}$.
Az A és B különbsége az a halmaz, amelyre $A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}$.

A metszet és a különbség képzése során elképzelhető, hogy egyetlen x dolog sem rendelkezik a kívánt tulajdonsággal. Azt a halmazt, amelynek bármely jól definiálható dolog sem eleme, **üres halmaz**nak nevezzük. Jele: $\emptyset$.

Legyen H halmaz és $A \subset H$ egy részhalmaza. Az A halmaz (H-ra vonatkozó) komplementerén az $\overline{A} := H \setminus A$ halmazt értjük. De Morgan-azonosságoknak nevezik a következő tételt:

1.2. Tétel. *Legyen H halmaz, $A, B \subset H$. Ekkor*

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{és} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Legyen a és b dolog. Az $\{a, b\}$ halmaz nyilván sok változatban felírható:

$$\{a, b\} = \{b, a\} = \{a, b, b, a\} = \{a, b, b, a, b, b\} = \text{stb.}$$

Ezzel szemben tekintsük alapfogalomnak az (a, b) **rendezett pár**t, amelynek lényeges tulajdonsága legyen, hogy

$$(a, b) = (c, d) \text{ pontosan akkor, ha } a = c \text{ és } b = d.$$

A rendezett pár segítségével értelmezzük a halmazok szorzatát.

1.4. Definíció. *Legyen A, B halmaz. Az A és B* **Descartes-szorzata**

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \text{ és } b \in B\}.$$

Például $A := \{2, 3, 5\}, B := \{1, 3\}$ esetén

$$A \times B = \{(2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3), (5, 1), (5, 3)\}.$$

A rendezett pár fogalmára épül a reláció.

1.5. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az r halmaz* **reláció**, *ha minden eleme rendezett pár.*

Egy magyar-angol szótár is egy reláció, hiszen elemei magyar és a neki megfelelő angol szóból alkotott rendezett párok.

1.6. Definíció. *Legyen r reláció. Az r reláció* **értelmezési tartománya** *a*

$$D(r) := \{x \mid \textit{van olyan } y, \textit{ hogy } (x, y) \in r\}.$$

Az r reláció **értékkészlete** *az*

$$R(r) := \{y \mid \textit{van olyan } x \in D(r), \textit{ hogy } (x, y) \in r\}.$$

Nyilván $r \subset D(r) \times R(r)$.
Például $r := \{(4, 2), (4, 3), (1, 2)\}$ esetén $D(r) = \{4, 1\}$, $R(r) = \{2, 3\}$.

1.1.2. Függvények

A függvény speciális reláció.

1.7. Definíció. *Legyen f reláció. Azt mondjuk, hogy az f* **függvény**, *ha bármely $(x, y) \in f$ és $(x, z) \in f$ esetén $y = z$.*

Például $r := \{(1, 2), (2, 3), (2, 4)\}$ nem függvény, hiszen $(2, 3) \in r$ és $(2, 4) \in r$, de $3 \neq 4$; az $f := \{(1, 2), (2, 3), (3, 3)\}$ viszont függvény.

Néhány megállapodást teszünk függvények körében. Ha f függvény, akkor $(x, y) \in f$ esetén y az f függvény x helyen vett **helyettesítési értéke**, vagy az f függvény az x-hez az y-t rendeli hozzá. Jelölésben: $y = f(x)$.

Ha f függvény és $A := D(f)$, a B pedig olyan halmaz, amelyre $R(f) \subset B$ (nyilván A a függvény értelmezési tartománya, B pedig a függvény (egyik) **képhalmaza**), akkor az „$f \subset A \times B$, f függvény” kifejezés helyett az $f : A \to B$ jelölést használjuk („az f függvény az A halmazt a B halmazba képezi”).

Ha f függvény és $D(f) \subset A, R(f) \subset B$, akkor $f \in A \rightarrowtail B$ jelöli ezt („f az A halmazból a B halmazba képező függvény”).
Például $f := \{(a, \alpha), (b, \beta), (g, \gamma), (d, \delta), (e, \varepsilon)\}$ függvény. Látható, hogy β az f függvény b helyen vett helyettesítési értéke, $\beta = f(b)$.
Ha L a latin betűk, G pedig a görög betűk halmaza, akkor $f : \{a, b, g, d, e\} \to G, f(a) = \alpha, f(b) = \beta, f(g) = \gamma, f(d) = \delta, f(e) = \varepsilon$. Ha csak a függvény típusára akarunk utalni, elég az $f \in L \rightarrowtail G$.

Természetesen egy függvénynek is van inverze, ez azonban nem biztos, hogy függvény lesz.

1.8. Definíció. *Legyen $f : A \to B$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f* **kölcsönösen egyértelmű** *(injektív), ha különböző $x_1, x_2 \in A$ elemeknek különböző B-beli elemeket feleltet meg, azaz bármely $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$ esetén $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Könnyen meggondolható, hogy kölcsönösen egyértelmű függvény inverze is függvény. Részletesebben:

1.3. Tétel. *Legyen f függvény, $A := D(f), B := R(f), f$ kölcsönösen egyértelmű. Ekkor az f inverze $f^{-1} : B \to A$ olyan függvény, amely bármely $s \in B$ ponthoz azt a $t \in A$ pontot rendeli, amelyre $f(t) = s$, (röviden: bármely $s \in B$ esetén $f(f^{-1}(s)) = s$.)*

Függvények kompozícióját is elkészíthetjük. Szerencsére ez mindig függvény lesz.
Legyen $g : A \to B, f : B \to C$. Ekkor a relációk kompozíciójának felhasználásával megmutatható, hogy

$$f \circ g : A \to C, \text{bármely } x \in A \text{ esetén } (f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Például a g függvény minden szám duplájához 1-et adjon hozzá ($g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) := 2x + 1$); az f függvény pedig minden számot emeljen négyzetre ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x^2$), akkor $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = (2x + 1)^2$ lesz az f és g kompozíciója.

További hasznos fogalmak
Legyen $f : A \to B$ és $C \subset A$. Az f függvény C-re való **leszűkítése** az az $f_{|C} : C \to B$ függvény, amelyre bármely $x \in C$ esetén $f_{|C}(x) := f(x)$.
Legyen $f : A \to B, C \subset A$ és $D \subset B$. Az

$$f(C) := \{y \mid \text{ van olyan } x \in C, \text{ amelyre } f(x) = y\}$$

halmazt a „C halmaz f függvénnyel létesített képének” nevezzük. Az

$$f^{-1}(D) := \{x \mid f(x) \in D\}$$

halmaz a „D halmaz f függvényre vonatkozó őse képe”. (Vigyázat! Az f^{-1} nem inverzfüggvényt jelöl ebben az esetben.)

1.2. Feladatok

1. Legyen $A := \{2, 4, 6, 3, 5, 9\}$, $B := \{4, 5, 6, 7\}$, $H := \{n \mid n \text{ egész szám}, 1 \leq n \leq 20\}$. Készítse el az $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$ halmazokat. Mi lesz az A halmaz H-ra vonatkozó $\overline{A}$ komplementere?

2. Legyen $A := \{a, b\}$, $B := \{a, b, c\}$. $A \times B =?$ $B \times A =?$

3. Legyen $r := \{(x, y) \mid x, y \text{ valós szám}, \ y = x^2\}$. $r^{-1} =?$ Függvény-e az r? Függvény-e az r^{-1}?

4. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := \frac{x}{1+x^2}$. Készítse el az $f \circ f$, $f \circ (f \circ f)$ függvényeket.

5. Gondoljuk végig egy $f : A \to B$ kölcsönösen egyértelmű függvény inverzének a szemléltetését!

6. Gondoljuk meg, hogy egy $f : A \to B$ kölcsönösen egyértelmű függvény inverzét a következő lépésekkel lehet előállítani:
   1) Felírjuk, hogy $y = f(x)$.
   2) Felcseréljük az x és y „változókat": $x = f(y)$.
   3) Ebből az „egyenletből" kifejezzük az y-t az x segítségével: $y = g(x)$. Ez a g lesz éppen az f^{-1} inverzfüggvény.
   Például: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x-1$. (Ez kölcsönösen egyértelmű függvény.)
   1) $y = 2x - 1$
   2) $x = 2y - 1$
   3) $x + 1 = 2y$, $y = \frac{1}{2}(x + 1)$.
   Tehát $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 1)$.
   Szemléltesse is az f és f^{-1} függvényt!

7. Legyen $f : A \to B$, $C_1, C_2 \subset A, D_1, D_2 \subset B$. Mutassuk meg, hogy
   $f(C_1 \cup C_2) = f(C_1) \cup f(C_2)$
   $f(C_1 \cap C_2) \subset f(C_1) \cap f(C_2)$
   $f^{-1}(D_1 \cup D_2) = f^{-1}(D_1) \cup f^{-1}(D_2)$
   $f^{-1}(D_1 \cap D_2) = f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2)$.
   Igaz-e, hogy ha $C_1 \subset C_2$, akkor $f(C_1) \subset f(C_2)$?
   Igaz-e, hogy ha $D_1 \subset D_2$, akkor $f^{-1}(D_1) \subset f^{-1}(D_2)$?

8. Legyen $f : A \to B$, $C \subset A, D \subset B$.
   Igaz-e, hogy $f^{-1}(f(C)) = C$? Igaz-e, hogy $f(f^{-1}(D)) = D$?

1.3. Halmazok, relációk, függvények $\boxed{E}$

A rendezett párt alapfogalomnak tekintettük, de lehetőség van halmazok segítségével bevezetni a rendezett pár fogalmát.

1.9. Definíció. *Legyen a és b. Az (a, b) rendezett pár legyen*

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Ezzel az értelmezéssel igazolható a rendezett párt jellemző tulajdonság.

1.4. Tétel. $(a, b) = (c, d) \Rightarrow a = c$ *és* $b = d$.

Bizonyítás. ($\Leftrightarrow$) Legyen $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$.

1. Vagy $\{a\} = \{c\}$, amiből $a = c$ következik. Továbbá $\{a, b\} = \{c, d\}$, de $a = c$ miatt $b = d$ lehet csak.

2. Vagy $\{a\} = \{c, d\}$, amiből $c = d$ és így $a = c = d$ következik. Ekkor $(c, d) = \{\{a\}\}$, de akkor $\{a\} = \{a, b\}$ is igaz, így $a = b$. Tehát $a = b = c = d$.

($\Leftarrow$) Nyilvánvaló!

1.3.1. Ekvivalencia és rendezési reláció

A matematika néhány „kényes” fogalmát a relációkkal és függvényekkel hozzuk kapcsolatba.

1.10. Definíció. *Legyen $H \neq \emptyset$, $r \subset H \times H, D(r) = H$ reláció.*
Azt mondjuk, hogy

1. *r reflexív, ha $\forall x \in H$ esetén $(x, x) \in r$;*
2. *r szimmetrikus, ha $\forall (x, y) \in r$ esetén $(y, x) \in r$;*
3. *r antiszimmetrikus, ha minden olyan esetben, amikor $(x, y) \in r$ és $(y, x) \in r$, akkor $x = y$;*
4. *r tranzitív, ha minden olyan esetben, amikor $(x, y) \in r$ és $(y, z) \in r$, akkor $x = y$.*

1.11. Definíció. *Ha az r reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív, akkor r* **ekvivalencia-reláció**.

1.12. Definíció. *Ha az r reláció reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív, akkor r* **rendezési reláció**.

Legyen $\sim$ egy ekvivalencia-reláció a H halmazon ($D(\sim) = H$). Állapodjunk meg abban, hogy $(x, y) \in \sim$ helyett az $x \sim y$ jelölést használjuk.

A $\sim$ ekvivalencia-reláció segítségével a H halmazt részhalmazokra bontjuk a következő lépésekkel.
α) Legyen $x \in H$. Az x-hez tartozó **ekvivalencia-osztály**

$$^{x}/_{\sim} := \{y \mid y \in H, x \sim y\}.$$

β) Könnyen belátható, hogy ha $x, z \in H$, akkor

$$\text{vagy } ^{x}/_{\sim} = \,^{z}/_{\sim}, \text{ vagy } ^{x}/_{\sim} \cap \,^{z}/_{\sim} = \emptyset.$$

Ez azt jelenti, hogy a H halmaz felbontható közös pont nélküli ekvivalencia-osztályokra.
γ) Legyen

$$^{H}/_{\sim} := \{X \mid \exists x \in H, \text{ hogy } X = \,^{x}/_{\sim}\}.$$

A $^{H}/_{\sim}$ az ekvivalencia-osztályok halmaza.
Igazolható, hogy

1. a $^{H}/_{\sim}$ elemei közös pont nélküliek (a β) pontban ezt fogalmaztuk meg),
2. a $^{H}/_{\sim}$ elemeinek (halmazoknak) az egyesítése kiadja a H halmazt.

Lássunk két fontos példát erre az eljárásra.

1. Legyen T a törtek halmaza, azaz
$$T = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \text{ egész szám}, \, q \neq 0 \right\}.$$
A T halmazon értelmezünk egy relációt:
$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \iff ad = bc.$$
Végiggondolható, hogy $\sim$ ekvivalencia-reláció. Ekkor ${}^{\frac{a}{b}}/_{\sim}$ ekvivalencia-osztályba beletartozik az összes olyan tört, amely „egyenlő" az $\frac{a}{b}$-vel. A ${}^{T}/_{\sim}$ halmaz pedig olyan közös elem nélküli halmazokra való felbontása a T törtek halmazának, amelyek egyesítéseként visszakapjuk a T halmazt. Az ${}^{\frac{a}{b}}/_{\sim}$ egy racionális szám, a ${}^{T}/_{\sim}$ pedig a racionális számok halmaza. Így válik érthetővé, hogy $\frac{1}{2}$ „egyenlő" $\frac{2}{4}$-del, $\frac{6}{12}$-del, hiszen ezek a törtek reprezentánsai az ${}^{\frac{1}{2}}/_{\sim}$ racionális számnak, és a racionális számokkal végzett műveletek során mindig a megfelelő reprezentánst húzzuk elő az osztályból. Például
$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6}$$
azt sugallja, hogy
$${}^{\frac{1}{2}}/_{\sim} + {}^{\frac{2}{3}}/_{\sim} = {}^{\frac{3}{6}}/_{\sim} + {}^{\frac{4}{6}}/_{\sim} = {}^{\frac{7}{6}}/_{\sim}.$$

2. A másik példában E legyen egy sík irányított szakaszainak halmaza. Bevezetünk E-n egy relációt: legyen

   $a \sim b$, ha az a szakasz párhuzamos b-vel, azonos irányúak és egyforma hosszúak.

   Könnyen látható, hogy $\sim$ ekvivalencia-reláció. Az ${}^{a}/_{\sim}$ tartalmazza az a-val párhuzamos, vele azonos irányú és hosszúságú irányított szakaszokat. Egy ilyen osztály legyen egy vektor. Az ${}^{E}/_{\sim}$ a sík vektorainak halmaza. Így válik érthetővé, hogy vektorok összeadásánál az egyik vektort eltoljuk úgy, hogy a két vektor kezdőpontja megegyezzék. Valójában mindkét vektorból az alkalmas reprezentáns irányított szakaszt húzzuk elő, azokkal végezzük el a műveletet, és az eredő irányított szakaszhoz tartozó ekvivalencia-osztály lesz az összeadás eredő vektora.

A rendezési relációkkal kapcsolatban csak két egyszerű példát tárgyalunk. Legyen $\mathbb{N}$ a pozitív egész számok halmaza. Legyen $\leq$ az a reláció, amelyre

$$a \leq b, \text{ ha van olyan nemnegatív } c \text{ egész, hogy } a + c = b.$$

Ez a $\leq$ valóban rendezési reláció. Még az is igaz, hogy bármely $a, b \in \mathbb{N}$ esetén vagy $a \leq b$, vagy $b \leq a$.
Az $\mathbb{N}$ pozitív egészek halmazán egy másik relációt is bevezethetünk. Azt mondjuk, hogy a osztója b-nek, ha van olyan k pozitív egész, hogy $b = ak$. Az

„oszthatóság” reláció reflexív ($a = a \cdot 1$), antiszimmetrikus (ha $b = ak$ és $a = bl$, akkor $b = blk$, amiből $lk = 1$, de ez csak $k = 1$ és $l = 1$ esetén igaz, tehát $a = b$) és tranzitív (ha $b = ak$, $c = bl$, akkor $c = akl$, azaz a osztója c-nek), tehát az „oszthatóság” is rendezési reláció az $\mathbb{N}$ halmazon. Csak nem olyan „szép”, mint a $\leq$ volt, hiszen, van olyan $a, b \in \mathbb{N}$, amelyre a nem osztója b-nek, és b sem osztója a-nak. (Például $a := 4$ és $b := 7$.)

1.3.2. Halmazok számossága

Gyakran szükség van halmazok elemszámát összehasonlítani.

1.13. Definíció. *Legyen A, B halmaz. Azt mondjuk, hogy A számossága egyenlő a B számosságával, ha van olyan $\phi : A \to B$ függvény, amelyre $R(\phi) = B$, és ϕ kölcsönösen egyértelmű. [Az ilyen ϕ függvényt* **bijekciónak** *nevezzük A és B között.]*

Például a pozitív egészek $\mathbb{N}$ halmaza és a pozitív páros számok P halmaza egyenlő számosságú, hiszen a

$$\phi : \mathbb{N} \to P, \quad \phi(n) := 2n$$

függvény bijekció $\mathbb{N}$ és P között.

1.14. Definíció. *Legyen A halmaz. Azt mondjuk, hogy A* **végtelen** *(számosságú) halmaz, ha $\exists A' \subset A, A' \neq A$, hogy $\exists \phi : A \to A'$ bijekció.*

Az előbbi példa éppen azt mutatja, hogy $\mathbb{N}$ végtelen halmaz.

1.15. Definíció. *Legyen A végtelen halmaz. Azt mondjuk, hogy A* **megszámlálható**, *ha $\exists \phi : \mathbb{N} \to A$ bijekció.*

Meglepő, de a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza megszámlálható.
Írjuk fel az $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ nevezőjű törteket soronként.

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
\cdots & -\frac{3}{1} & -\frac{2}{1} & \leftarrow & -\frac{1}{1} & & \frac{0}{1} & \to & \frac{1}{1} & & \frac{2}{1} & \to & \frac{3}{1} & \cdots \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & \\
\cdots & -\frac{3}{2} & -\frac{2}{2} & & -\frac{1}{2} & \leftarrow & \frac{0}{2} & \leftarrow & \frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & \cdots \\
 & & \downarrow & & & & & & & & \uparrow & & \downarrow & \\
\cdots & -\frac{3}{3} & -\frac{2}{3} & \to & -\frac{1}{3} & \to & \frac{0}{3} & \to & \frac{1}{3} & \to & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & \cdots \\
 & & & & & & & & & & & & \downarrow & \\
 & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

A $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ bijekciót úgy készítjük, hogy

$$\phi(1) := \frac{0}{1}, \quad \phi(2) := \frac{1}{1}, \quad \phi(3) := \frac{1}{2}, \quad \phi(4) := -\frac{1}{2}, \ldots$$

A rajz szerinti lépegetéssel haladunk, ügyelve arra, hogy olyan törtet ugorjunk át, amely már egyszer sorra került. Ezzel biztosítjuk, hogy valóban kölcsönösen egyértelmű maradjon a függvényünk. Látható az is, hogy előbb-utóbb minden racionális számhoz eljutunk, így ϕ bijekció lesz $\mathbb{N}$ és $\mathbb{Q}$ között, ami azt jelenti, hogy $\mathbb{Q}$ megszámlálható.

1.3.3. Relációk inverze és kompozíciója

Két eljárást mutatunk be, amellyel adott reláció(k)ból újabb relációhoz juthatunk.

1.16. Definíció. *Legyen r reláció. Az r reláció* **inverze** *az a reláció, amely*

$$r^{-1} := \{(s,t) \mid (t,s) \in r\}.$$

Látható, hogy $r := \{(1,3),(4,2),(5,2),(3,3)\}$ esetén

$$r^{-1} = \{(3,1),(2,4),(2,5),(3,3)\}.$$

A magyar-angol szótár inverze az angol-magyar szótár.

Értelmezzük relációk kompozícióját (összetett reláció, közvetett reláció) is.

1.17. Definíció. *Legyen r, s reláció. Az s* **belső reláció** *és r* **külső reláció kompozíciója** *legyen*

$$r \circ s := \{(x,z) \mid \textit{van olyan } y \in R(s) \cap D(r) \textit{ közvetítő elem, hogy } (x,y) \in s \textit{ és } (y,z) \in r\}.$$

Például $s := \{(1,2),(1,4),(2,3)\}$, $r := \{(4,3),(4,4),(3,5)\}$ esetén

$$r \circ s := \{(1,3),(1,4),(2,5)\}.$$

Természetesen elkészíthető az $s \circ r$ reláció is, de ez most

$$s \circ r = \emptyset.$$

Általában $r \circ s \neq s \circ r$.

Meglepően szép relációk kompozíciójának inverze és az inverzek kompozíciójának kapcsolata:

1.5. Tétel. *Legyen r, s reláció. Ekkor $(r \circ s)^{-1} = s^{-1} \circ r^{-1}$.*

Mivel halmazok egyenlőségét szeretnénk igazolni, megmutatjuk, hogy 1.) $(r \circ s)^{-1} \subset s^{-1} \circ r^{-1}$ és 2.) $s^{-1} \circ r^{-1} \subset (r \circ s)^{-1}$.

1. Legyen $(p,t) \in (r \circ s)^{-1} \Rightarrow (t,p) \in r \circ s \Rightarrow$ van olyan $q \in R(s) \cap D(r)$ közvetítő elem, hogy $(t,q) \in s$ és $(q,p) \in r \Rightarrow$ nyilván $(p,q) \in r^{-1}$ és $(q,t) \in s^{-1} \Rightarrow (p,t) \in s^{-1} \circ r^{-1}$.

2. Legyen $(u,w) \in s^{-1} \circ r^{-1} \Rightarrow$ van olyan $v \in R(r^{-1}) \cap D(s^{-1}) = R(s) \cap D(r)$ közvetítő elem, hogy $(u,v) \in r^{-1}$ és $(v,w) \in s^{-1} \Rightarrow$ nyilván $(w,v) \in s$ és $(v,u) \in r \Rightarrow (w,u) \in r \circ s \Rightarrow (u,w) \in (r \circ s)^{-1}$.

2. fejezet

Számhalmazok

Kiskorunktól számolunk a valós számokkal, összeadjuk, szorozzuk, osztjuk őket, hatványozunk, abszolút értékét vesszük a számoknak. Egyenleteket, egyenlőtlenségeket „rendezünk”. Most lefektetjük azt a viszonylag egyszerű szabályrendszert, amelyből a megtanult eljárások levezethetők. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk.

- Valós számok halmaza
- Természetes számok halmaza
- Egész számok és racionális számok halmaza
- Felső és alsó határ
- Intervallum és környezet
- Hatványozás definíciója és azonosságai
- Komplex számok halmaza
- Komplex szám trigonometrikus alakja, műveletek

2.1. Valós számok $\boxed{\text{A}}$

2.1.1. A valós számok axiómarendszere

Legyen $\mathbb{R}$ nem üres halmaz. Tegyük fel, hogy van még egy összeadásnak nevezett $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és egy szorzásnak nevezett $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény is, amelyek a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

a1. bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a + b = b + a$ (kommutativitás)

a2. bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén $a + (b + c) = (a + b) + c$ (asszociativitás) a3. van olyan $0 \in \mathbb{R}$ elem, hogy bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $a + 0 = a$ (0 az összeadásra nézve semleges elem)

a4. bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén van olyan $-a \in \mathbb{R}$ ellentett elem, hogy $a + (-a) = 0$.

m1. bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a \cdot b = b \cdot a$

m2. bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

m3. van olyan $1 \in \mathbb{R}$ elem, hogy bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $a \cdot 1 = a$ (1 a szorzásra nézve semleges elem)

m4. bármely $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén van olyan $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ reciprok elem, hogy $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

d. bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén $a \cdot (b + c) = ab + ac$ (disztributív a szorzás az összeadásra nézve)

Látható, hogy a szorzás szabályrendszere a 4. követelményben lényegesen eltér az összeadástól (egyébként nem is különbözne az összeadás és a szorzás). A d. is az eltérést erősíti.

Tegyük fel, hogy $\mathbb{R}$-en van egy olyan $\leq$ (kisebb vagy egyenlőnek nevezett) rendezési reláció, amely még a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

r1. bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén vagy $a \leq b$, vagy $b \leq a$.

r2. minden olyan esetben, amikor $a \leq b$ és $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges szám, akkor $a + c \leq b + c$.

r3. minden olyan esetben, amikor $0 \leq a$ és $0 \leq b$, akkor $0 \leq ab$.

Állapodjunk meg abban, hogy az $a \leq b$, $a \neq b$ helyett $a < b$ jelölést használunk. (Sajnos a $<$ nem rendezési reláció, mert nem reflexív.)
Az a1.–a4., m1.–m4., d., r1.–r3. alapján levezethető az összes egyenlőséggel és egyenlőtlenséggel kapcsolatos „szabály”. Kiegészítésül három fogalmat külön is megemlítünk.

2.1. Definíció. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Ekkor $\frac{a}{b} := a \cdot \frac{1}{b}$.*

Az osztás tehát elvégezhető a valós számokkal.

2.2. Definíció. *Legyen $x \in \mathbb{R}$. Az x* **abszolút értéke**

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \leq x \\ -x, & \text{ha } x \leq 0, x \neq 0. \end{cases}$$

Hasznosak az abszolút értékkel kapcsolatos egyenlőtlenségek.

1. Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $0 \leq |x|$.

2. Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $0 \leq \varepsilon$. Ekkor $x \leq \varepsilon$, és $-x \leq \varepsilon \iff |x| \leq \varepsilon$.

3. Bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $|a+b| \leq |a| + |b|$ (háromszög-egyenlőtlenség)

4. Bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $||a| - |b|| \leq |a-b|$.

Könnyen igazolhatóak ezek az állítások. A 4. bizonyítását megmutatjuk. Tekintsük az $a = a - b + b$ egyenlőtlenséget. Ekkor a 3. szerint

$$|a| = |a-b+b| \leq |a-b| + |b|.$$

Az r2. szerint $-|b|$ számot mindkét oldalhoz hozzáadva nem változik az egyenlőtlenség

$$|a| + (-|b|) = |a| - |b| \leq |a-b| \tag{2.1}$$

Hasonló meggondolással

$$b = b - a + a$$

$$|b| = |b-a+a| \leq |b-a| + |a| \quad / - |a|$$

$$|b| - |a| \leq |b-a|$$

$$-(|a| - |b|) \leq |b-a| = |a-b| \tag{2.2}$$

Az (2.1) és (2.2) a 2. tulajdonság szerint ($x := |a| - |b|$; $\varepsilon := |a-b|$ szereposztással) éppen azt jelenti, hogy $||a| - |b|| \leq |a-b|$.

2.1.2. Természetes, egész és racionális számok

Most elkülönítjük az $\mathbb{R}$ egy nevezetes részhalmazát.
Legyen $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ olyan részhalmaz, amelyre
1^o $1 \in \mathbb{N}$
2^o bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $n+1 \in \mathbb{N}$
3^o bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $n+1 \neq 1$ (az 1 az „első” elem)
4^o abból, hogy a) $S \subset \mathbb{N}$
b) $1 \in S$
c) bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $n+1 \in S$
következik, hogy $S = \mathbb{N}$. (Teljes indukció.)
Az $\mathbb{R}$-nek az ilyen $\mathbb{N}$ részhalmazát a **természetes számok halmazá**nak nevezzük.
Kiegészítésül álljon itt még néhány megállapodás:

$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{m \in \mathbb{R} \mid -m \in \mathbb{N}\}$ az **egész számok halmaza**

$\mathbb{Q} := \{x \in \mathbb{R} \mid$ van olyan $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, hogy $x = \frac{p}{q}\}$ a **racionális számok halmaza**

$\mathbb{Q}^* := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ az **irracionális számok halmaza**

Az $\mathbb{N}$ segítségével a műveleti, rendezési szabályrendszer mellé a harmadik követelményt illesztjük az $\mathbb{R}$-hez.

Archimedesz-axióma: Bármely $a, b \in \mathbb{R}, 0 < a$ számokhoz van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $b < na$.

Az Archimedesz-axióma következményeként megmutatjuk, hogy bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $n \in \mathbb{N}$ természetes szám, amelyre $K < n$, ugyanis az $a := 1$, $b := K$ szereposztással az axióma ilyen természetes számot biztosít.
Megmutatjuk azt is, hogy bármely $\varepsilon \in \mathbb{R}, 0 < \varepsilon$ esetén van olyan $n \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy $\frac{1}{n} < \varepsilon$, ugyanis legyen $a := \varepsilon$ és $b := 1$. Az axióma szerint van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $1 < n \cdot \varepsilon$. Rendre alkalmazva a megfelelő „szabályt”

$$\begin{array}{rcl} 1 & < & n\varepsilon \qquad / + (-1) \\ 0 & < & n\varepsilon - 1 \qquad / \cdot \frac{1}{n} \\ 0 & < & \frac{1}{n}(n\varepsilon - 1) = \varepsilon - \frac{1}{n} \qquad / + \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & < & \varepsilon. \end{array}$$

Az Archimedesz-axiómával sem vált még minden igényt kielégítővé az $\mathbb{R}$. Szükségünk lesz egy utolsó axiómára, amelyet néhány fogalommal készítünk elő.

2.1.3. Felső és alsó határ

2.3. Definíció. *Legyen $A \in \mathbb{R}, A \neq \emptyset$. Azt mondjuk, hogy A* **felülről korlátos** *számhalmaz, ha van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $a \leq K$. Az ilyen K az A halmaz egyik* **felső korlátja**.

Legyen $A \in \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ felülről korlátos halmaz. Tekintsük a

$$B := \{K \in \mathbb{R} \mid K \text{ felső korlátja az A halmaznak}\}$$

halmazt. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ a B halmaz legkisebb eleme, azaz olyan szám, amelyre

1^o $\alpha \in B$ (α is felső korlátja az A halmaznak)

2^o bármely $K \in B$ felső korlátra $\alpha \leq K$.

A kérdés csupán az, hogy van-e ilyen $\alpha \in \mathbb{R}$.

Felső határ axiómája: Minden felülről korlátos $A \in \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ halmaznak **van** legkisebb felső korlátja.

Az ilyen $\alpha \in \mathbb{R}$ számot (amely nem feltétlenül eleme az A halmaznak) a halmaz **felső határá**nak nevezzük, és így jelöljük:

$$\alpha := \sup A \quad \text{(„az } A \text{ halmaz szuprémuma”)}$$

Nyilván igaz a $\sup A$ két tulajdonsága:

1^o bármely $a \in A$ esetén $a \leq \sup A$

2^o bármely $0 < \varepsilon$ esetén van olyan $a' \in A$, hogy $(\sup A) - \varepsilon < a'$.

A műveleti, rendezési szabályrendszerrel, az Archimedesz-axiómával és a felső határ axiómájával teljessé tettük az $\mathbb{R}$ valós számok halmazát. Ezzel biztos alapot teremtettünk a jövőbeni számolásokhoz is.

Néhány további megállapodás.

2.4. Definíció. *Legyen $A \in \mathbb{R}, A \neq \emptyset$. Azt mondjuk, hogy A* **alulról korlátos**, *ha van olyan $L \in \mathbb{R}$, hogy minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $L \leq a$. Az L az A halmaz egyik* **alsó korlátja**.

Legyen A alulról korlátos számhalmaz. Az A alsó korlátjai közül a legnagyobb a halmaz **alsó határa**. (Ennek létezéséhez már nem kell újabb axióma, visszavezethető a felső határ létezésére.) Az A halmaz alsó határát

$$\inf A \quad (\text{„az } A \text{ halmaz infimuma”})$$

jelölje. Nyilván igaz, hogy

1^o bármely $a \in A$ esetén $\inf A \leq a$

2^o bármely $0 < \varepsilon$ esetén van olyan $a' \in A$, hogy $a' < (\inf A) + \varepsilon$.

2.1.4. Intervallumok és környezetek

2.5. Definíció. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy I* **intervallum**, *ha bármely $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ esetén minden olyan $x \in \mathbb{R}$, amelyre $x_1 < x < x_2$, fennáll, hogy $x \in I$.*

2.1. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.*

$[a,b]:=\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

$[a,b):=\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

$(a,b]:=\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

$(a,b):=\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

$[a,+\infty):=\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$

$(a,+\infty):=\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$; $(0,+\infty) =: \mathbb{R}^+$

$(-\infty,a]:=\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

$(-\infty,a):=\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$; $(-\infty,0) =: \mathbb{R}^-$

$(-\infty,+\infty) := \mathbb{R}$

Ezek mindegyike intervallum.
Megemlítjük, hogy az $[a, a] = \{a\}$ és az $(a, a) = \emptyset$ elfajuló intervallumok.

2.6. Definíció. *Legyen $a \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}^+$. Az a* **pont** *r* **sugarú környezetén** *a*

$$K_{\mathrm{r}}(a) := (a - r, a + r)$$

nyílt intervallumot értjük. Azt mondjuk, hogy $K(a)$ az a **pont** *egy* **környezete**, *ha van olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $K(a) = K_{\mathrm{r}}(a)$.*

2.1.5. Valós számok hatványai

2.7. Definíció. *Legyen $a \in \mathbb{R}$. Ekkor $a^1 := a, a^2 := a \cdot a, a^3 := a^2 \cdot a, \ldots, a^n := a^{n-1} \cdot a, \ldots$*

2.8. Definíció. *Legyen $a \in \mathbb{R}, 0 \leq a$. A $\sqrt{a}$ jelentse azt a nemnegatív számot, amelynek négyzete a, azaz $0 \leq \sqrt{a}, (\sqrt{a})^2 = a$.*

Vegyük észre, hogy bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $\sqrt{a^2} = |a|$.

2.9. Definíció. *Legyen $a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$. A $\sqrt[2k+1]{a}$ jelentse azt a valós számot, amelynek $(2k+1)$-edik hatványa a.*

Vegyük észre, hogy ha $0 < a$, akkor $\sqrt[2k+1]{a} > 0$, és ha $a < 0$, akkor $\sqrt[2k+1]{a} < 0$.

2.10. Definíció. *Legyen $a \in \mathbb{R}, 0 \leq a, k \in \mathbb{N}$. A $\sqrt[2k]{a}$ jelentse azt a nemnegatív számot, amelynek $(2k)$-adik hatványa az a.*

Vezessük be a következő jelölést: ha $n \in \mathbb{N}$ és $a \in \mathbb{R}$ az n paritásának megfelelő, akkor

$$a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}.$$

2.11. Definíció. *Legyen $a \in \mathbb{R}^+, p, q \in \mathbb{N}$.*

$$a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{a^p}.$$

2.12. Definíció. *Legyen $a \in \mathbb{R}^+, p, q \in \mathbb{N}$.*

$$a^{-\frac{p}{q}} := \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}.$$

2.13. Definíció. *Legyen $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ekkor $a^0 := 1$.*

Látható, hogy ezzel a definícióláncolattal egy $a \in \mathbb{R}^+$ bármely $r \in \mathbb{Q}$ racionális kitevőjű hatványát értelmeztük. Belátható, hogy a definíciókban szereplő számok egyértelműen léteznek, és érvényesek a következő azonosságok:

1^o $a \in \mathbb{R}^+, r, s \in \mathbb{Q}$ esetén $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

2^o $a \in \mathbb{R}^+, r \in \mathbb{Q}$ esetén $a^r \cdot b^r = (ab)^r$

3^o $a \in \mathbb{R}^+, r, s \in \mathbb{Q}$ esetén $(a^r)^s = a^{rs}$

2.2. Feladatok

1. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy

$$(a+b)^2 := (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

2. Mutassuk meg, hogy minden $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$ és bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n.$$

3. (Bernoulli-egyenlőtlenség)
Legyen $h \in (-1, +\infty)$ és $n \in \mathbb{N}$. Mutassuk meg, hogy

$$(1+h)^n \geq 1 + nh.$$

Megoldás: Legyen $S := \{n \in \mathbb{N} \mid (1+h)^n \geq 1 + nh\}$.

1^o $1 \in S$, mert $(1+h)^1 = 1 + 1 \cdot h$.

2^o Legyen $k \in S$. Megmutatjuk, hogy $k + 1 \in S$, ugyanis

$$\begin{aligned}(1+h)^{k+1} &= (1+h)^k (1+h) \geq (1+kh)(1+h) = \\ &= 1 + (k+1)h + kh^2 \geq 1 + (k+1)h.\end{aligned}$$

(A rendezés szabályai mellett felhasználtuk, hogy $k \in S$, azaz $(1+h)^k \geq 1 + kh$.)
Emlékezve az $\mathbb{N}$ bevezetésének 4^o követelményére, ez azt jelenti, hogy $S = \mathbb{N}$, azaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén igaz az egyenlőtlenség. Ezt a bizonyítási módszert hívják **teljes indukció**nak.

4. Legyen $a, b \in \mathbb{R}^+$.

$$A_2 := \frac{a+b}{2}, \quad G_2 := \sqrt{ab}, \quad H_2 := \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}, \quad N_2 := \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

Mutassuk meg, hogy $H_2 \leq G_2 \leq A_2 \leq N_2$ és egyenlőség a számok között akkor és csak akkor áll, ha $a = b$.

Ezek nagymértékű általánosítása is igaz.
Legyen $k \in \mathbb{N}$ $(k \geq 3)$ és $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^+$.

$$A_k := \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k}, G_k := \sqrt[k]{x_1 x_2 \cdots x_k}, H_k := \frac{k}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_k}}, N_k := \sqrt[k]{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2}{k}}.$$

Igazolható, hogy $H_k \leq G_k \leq A_k \leq N_k$, és egyenlőség a számok között akkor és csak akkor áll fenn, ha $x_1 = x_2 = \ldots = x_k$.

5. Legyen $h \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$(1+h)^n = 1 + nh + \binom{n}{2}h^2 + \binom{n}{3}h^3 + \cdots + h^n,$$

ahol felhasználva, hogy $k! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$, az

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

(kiegészítésül $0! := 1$).

Ebből igazolható a **binomiális tétel**:
Legyen $a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

6. Legyen $A := \{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Mutassuk meg, hogy A felülről korlátos. Mi a $\sup A$?
Megoldás: Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $n < n+1$, ezért $\frac{n}{n+1} < 1$, tehát a $K := 1$ felső korlát. Megmutatjuk, hogy $\sup A = 1$, ugyanis

   1^o Bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $\frac{n}{n+1} < 1$.

   2^o Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Keresünk olyan $n \in \mathbb{N}$ számot, amelyre

$$\begin{aligned} \frac{n}{n+1} &> 1-\varepsilon. \\ n &> (1-\varepsilon)(n+1) = n - \varepsilon n + 1 - \varepsilon \\ \varepsilon n &> 1-\varepsilon \\ n &< \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \end{aligned}$$

   Mivel bármilyen számnál, így az $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \in \mathbb{R}$ számnál is van nagyobb természetes szám, legyen ez $n' \in \mathbb{N}$, ezért az $\frac{n'}{n'+1} \in A$ olyan, hogy $\frac{n'}{n'+1} > 1-\varepsilon$. Tehát $\sup A = 1$.

7. * Legyen $E := \{(\frac{n+1}{n})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Mutassuk meg, hogy $E \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos.
Megoldás: Megmutatjuk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq 4.$$

Legyen $n \in \mathbb{N}$, és tekintsük az $\frac{1}{4}(\frac{n+1}{n})^n$ számot. A 4. példában szereplő számtani (A_k) és mértani (G_k) közép közötti egyenlőtlenség szerint

$$\frac{1}{4}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\cdots\frac{n+1}{n} \leq \left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{n+1}{n}+\frac{n+1}{n}\cdots\frac{n+1}{n}}{n+2}\right)^{n+2} = 1,$$

ezért $(\frac{n+1}{n})^n \leq 4$, tehát E felülről korlátos. A felső határ axiómája szerint **van** felső határa. Legyen $e := \sup E$.
Megjegyezzük, hogy ezt a felső határt soha senki nem tudta és tudja megsejteni (nem úgy, mint a 6. példában...). Közelítőleg $e \approx 2,71$. Euler nevéhez fűződik az e szám bevezetése.

8. Legyen

$$P := \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2^3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Létezik-e $\inf P$? (Ha már belátta, hogy létezik az $\inf P$, ne keseredjen el, ha nem tudja megadni. Megoldatlan a probléma.)

2.3. Komplex számok $\boxed{A}$

2.3.1. A komplex szám fogalma, műveletek

Úgy általánosítjuk a valós számokat, hogy a műveletek tulajdonságai ne változzanak.

Legyen $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a valós számpárok halmaza. Vezessük be az összeadást úgy, hogy az $(a,b), (c,d) \in \mathbb{C}$ esetén

$$(a,b) + (c,d) := (a+c, b+d);$$

a szorzást pedig úgy, hogy

$$(a,b) \cdot (c,d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Könnyen ellenőrizhető az összeadás és a szorzás néhány tulajdonsága.

a1. $\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{C}$ esetén $(a,b) + (c,d) = (c,d) + (a,b)$ (kommutativitás)

a2. $\forall (a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{C}$ esetén $(a,b) + ((c,d) + (e,f)) = ((a,b) + (c,d)) + (e,f)$ (asszociativitás)

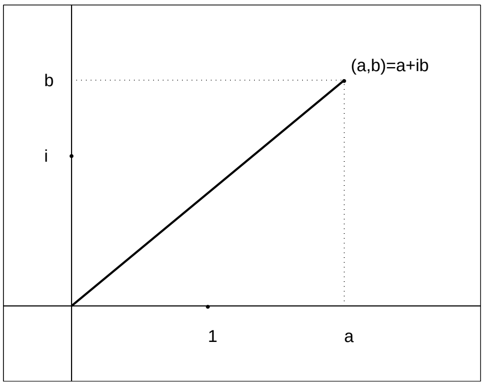
a3. $\forall (a,b) \in \mathbb{C}$ esetén $(a,b) + (0,0) = (a,b)$

a4. $\forall (a,b) \in \mathbb{C}$ esetén a $(-a,-b) \in \mathbb{C}$ olyan lesz, hogy $(a,b) + (-a,-b) = (0,0)$.

m1. $\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{C}$ esetén $(a,b) \cdot (c,d) = (c,d) \cdot (a,b)$ (kommutativitás)

m2. $\forall (a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{C}$ esetén $(a,b) \cdot ((c,d) \cdot (e,f)) = ((a,b) \cdot (c,d)) \cdot (e,f)$ (asszociativitás)

m3. $\forall (a,b) \in \mathbb{C}$ esetén $(a,b) \cdot (1,0) = (a,b)$



2.1. ábra.

m4. $\forall(a,b) \in \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$ esetén az $(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}) \in \mathbb{C}$ olyan, hogy

$$(a,b) \cdot \ (\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}) = (1,0)$$

d. $\forall(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{C}$ esetén

$$(a,b) \cdot [(c,d)+(e,f)] = (a,b) \cdot (c,d) + (a,b) \cdot (e,f)$$

(a szorzás disztributív az összeadásra nézve)

Az a1.–a.4, m1.–m.4 és d. tulajdonságok indokolják, hogy a valós számokkal végzett műveletek, számolások (amelyek összeadást, szorzást tartalmaznak és legfeljebb egyenlőségekre vonatkoznak) a komplex számokkal ugyanúgy végezhetők el.

Azonosítsuk az $a \in \mathbb{R}$ valós számot és az $(a,0) \in \mathbb{C}$ komplex számot. (Nyilvánvalóan bijekció létezik az $\mathbb{R}$ és az $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{C}$ halmaz között.) Vezessük be az $i := (0,1) \in \mathbb{C}$ **képzetes egység**et. Ekkor bármely $(a,b) \in \mathbb{C}$ komplex számra

$$(a,b) = (a,0) + (0,1)(b,0) = a + ib.$$

(A második egyenlőség az azonosítás következménye!)
Figyelembe véve, hogy $i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = -1$, egyszerűvé válik az összeadás

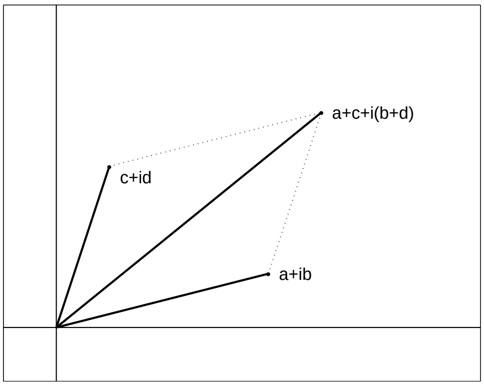
$$a + ib + c + id = a + c + i(b+d),$$

és a szorzás is

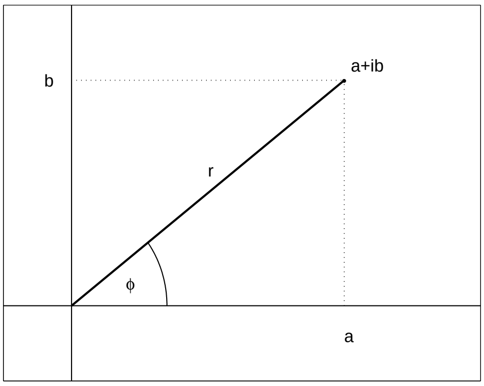
$$(a+ib) \cdot (c+id) = ac - bd + i(ad+bc).$$

A komplex számot helyvektorként szenléltethetjük (2.1. ábra).

Az összeadás a vektorok összeadásának „paralelogramma szabályának” megfelelő (2.2. ábra).



2.2. ábra.



2.3. ábra.

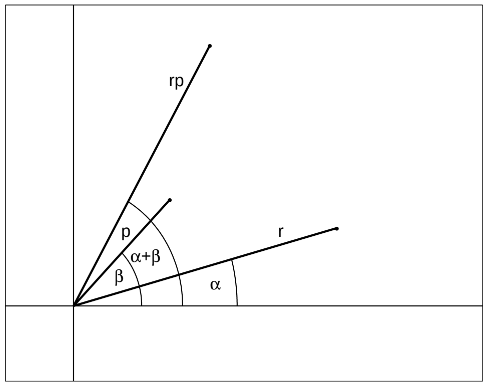
2.3.2. Komplex számok trigonometrikus alakja

Egy $a + ib \in \mathbb{C}$ komplex számhoz hozzárendelhetjük az abszolút értékét és irányszögét (2.3. ábra).

Az abszolút érték: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Az irányszög síknegyedenként adható meg:

$$\phi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{b}{a}, & \text{ha } a > 0 \text{ és } b \geq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{ha } a = 0 \text{ és } b > 0 \\ \pi - \operatorname{arctg}|\frac{b}{a}|, & \text{ha } a < 0 \text{ és } b \geq 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}|\frac{b}{a}|, & \text{ha } a < 0 \text{ és } b < 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{ha } a = 0 \text{ és } b < 0 \\ 2\pi - \operatorname{arctg}|\frac{b}{a}|, & \text{ha } a > 0 \text{ és } b < 0 \end{cases}$$

Látható, hogy az irányszögre $\phi \in [0, 2\pi)$. Megjegyezzük, hogy $a = 0, b = 0$ esetén $r = 0$, és az irányszög ekkor tetszőlegesen választható.



2.4. ábra.

Ha egy $a + ib \in \mathbb{C}$ komplex számnak r az abszolút értéke és ϕ az irányszöge, akkor

$$a = r\cos\phi, \quad b = r\sin\phi,$$

ezért $a + ib = r(\cos\phi + i\sin\phi)$. Ez a komplex szám **trigonometrikus alakja**. A komplex számok trigonometrikus alakjának felhasználásával szemléletesebbé válik a komplex számok szorzása is.
Legyen $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $p(\cos\beta + i\sin\beta) \in \mathbb{C}$, ekkor

$$\begin{aligned} r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot\ p(\cos\beta + i\sin\beta) = & \\ &= rp(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)) = \\ &= rp(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)). \end{aligned}$$

Tehát a szorzásnál az abszolút értékek összeszorzódnak, az irányszögek pedig összeadódnak (2.4. ábra).

A hatványozás a komplex szám trigonometrikus alakjával igen egyszerűen végezhető el. Ha $z = a + ib = r(\cos\phi + i\sin\phi) \in \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$z^n = (a + ib)^n = [r(\cos\phi + i\sin\phi)]^n = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi),$$

azaz a komplex szám n-edik hatványánál az abszolút érték n-edik hatványa és az irányszög n-szerese jelenik meg a z^n trigonometrikus alakjában.

3. fejezet

Elemi függvények

Ismertetjük a valós számok halmazán értelmezett, valós szám értékű függvények legfontosabb tulajdonságait. Definiáljuk a gyakran használt valós-valós függvényeket, melyeket elemi függvényeknek neveznek. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk.

- Műveletek valós függvényekkel
- Korlátos, monoton, periodikus, páros, páratlan függvény fogalma
- Hatványfüggvények
- Exponenciális és logaritmus függvények
- Trigonometrikus függvények és inverzeik
- Hiperbolikus függvények és inverzeik
- Néhány különleges függvény

3.1. Valós-valós függvények alaptulajdonságai $\boxed{\text{A}}$

3.1. Definíció. *Legyen* $f : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{R}$. *Ekkor*

$$\lambda f : D(f) \to \mathbb{R}, \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x).$$

3.2. Definíció. *Legyen* $f, g : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R},\ D(f) \cap D(g) \neq \emptyset$. *Ekkor*

$$f + g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R},\ (f+g)(x) := f(x) + g(x)$$
$$f \cdot g : D(f) \cap D(g) \to \mathbb{R},\ (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x).$$

3.3. Definíció. *Legyen* $g : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R},\ H := D(g) \setminus \{x \in D(g) \mid g(x) = 0\} \neq \emptyset$. *Ekkor*

$$1/g : H \to \mathbb{R},\ (1/g)(x) := \frac{1}{g(x)}.$$

3.4. Definíció. *Legyen* $f, g : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$

$$\frac{f}{g} := f \cdot 1/g$$

3.5. Definíció. *Legyen* $f : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$. *Azt mondjuk, hogy* f **felülről korlátos** *függvény, ha* $R(f) \subset \mathbb{R}$ *felülről korlátos halmaz.*
Azt mondjuk, hogy f **alulról korlátos** *függvény, ha* $R(f) \subset \mathbb{R}$ *alulról korlátos halmaz.*
Azt mondjuk, hogy f **korlátos** *függvény, ha* $R(f) \subset \mathbb{R}$ *alulról is és felülről is korlátos halmaz.*

3.6. Definíció. *Legyen* $f : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$. *Azt mondjuk, hogy* f **monoton növő** *függvény, ha bármely* $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 < x_2$ *esetén* $f(x_1) \leq f(x_2)$.
Az f **szigorúan monoton növő**, *ha bármely* $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 < x_2$ *esetén* $f(x_1) < f(x_2)$.
Azt mondjuk, hogy f **monoton csökkenő** *függvény, ha minden* $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 < x_2$ *esetén* $f(x_1) \geq f(x_2)$.
Az f **szigorúan monoton csökkenő**, *ha bármely* $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 < x_2$ *esetén* $f(x_1) > f(x_2)$.

3.7. Definíció. *Legyen* $f : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$. *Azt mondjuk, hogy* f **páros** *függvény, ha*

1^o *minden* $x \in D(f)$ *esetén* $-x \in D(f)$,

2^o *minden* $x \in D(f)$ *esetén* $f(-x) = f(x)$.

3.8. Definíció. *Legyen* $f : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$. *Azt mondjuk, hogy* f **páratlan** *függvény, ha*

1^o *minden* $x \in D(f)$ *esetén* $-x \in D(f)$,

2^o *minden* $x \in D(f)$ *esetén* $f(-x) = -f(x)$.

3.9. Definíció. *Legyen* $f : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$. *Azt mondjuk, hogy* f **periodikus** *függvény, ha létezik olyan* $p \in \mathbb{R}$, $0 < p$ *szám, hogy*

1^o *minden* $x \in D(f)$ *esetén* $x + p$, $x - p \in D(f)$,

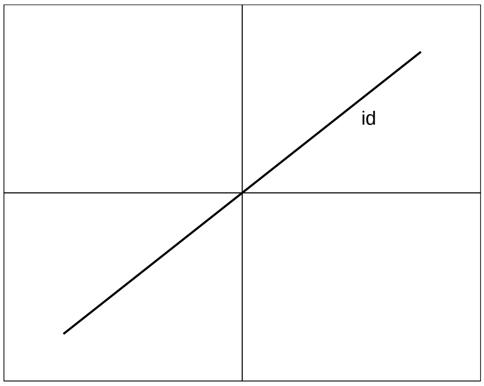
2^o *minden* $x \in D(f)$ *esetén* $f(x + p) = f(x - p) = f(x)$.

A p *szám a függvény egyik* **periódus***a.*

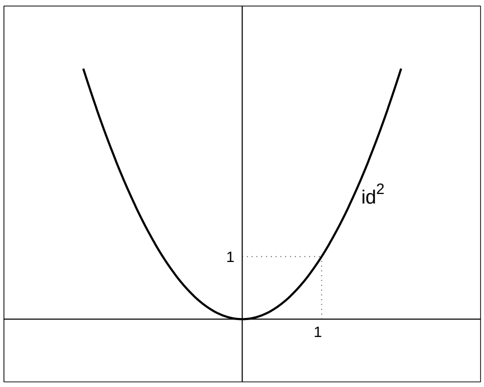
3.2. Az elemi függvények $\boxed{\text{A}}$

3.2.1. Hatványfüggvények

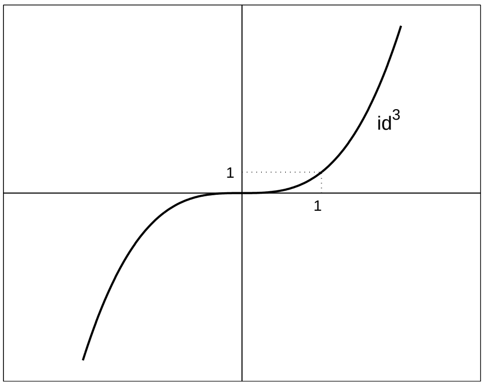
Legyen $\mathrm{id} : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$, $\mathrm{id}(x) := x$. Az id szigorúan monoton növő, páratlan függvény (3.1. ábra). Legyen $\mathrm{id}^2 : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$, $\mathrm{id}^2(x) := x^2$. Az $\mathrm{id}^2|_{\mathbb{R}^+}$ szigorúan



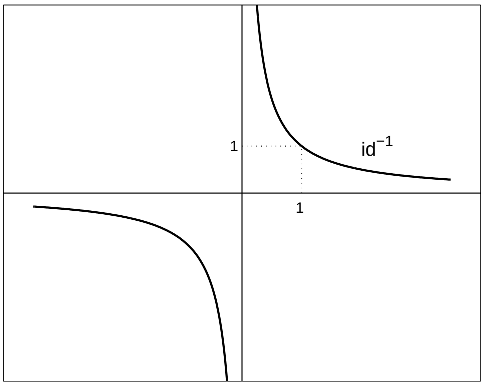
3.1. ábra.



3.2. ábra.



3.3. ábra.



3.4. ábra.

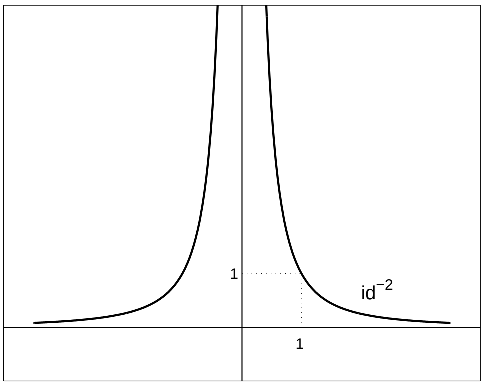
monoton növő, az $\mathrm{id}^2_{|\mathbb{R}-}$ szigorúan monoton fogyó. Az id^2 páros (3.2. ábra).

Legyen $\mathrm{id}^3 : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R},\ \mathrm{id}^3(x) := x^3$. Az id^3 szigorúan monoton növő, páratlan függvény (3.3. ábra). Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $\mathrm{id}^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \mathrm{id}^n(x) := x^n$ függvény páros n esetén az id^2, páratlan n esetén az id^3 tulajdonságait örökli.

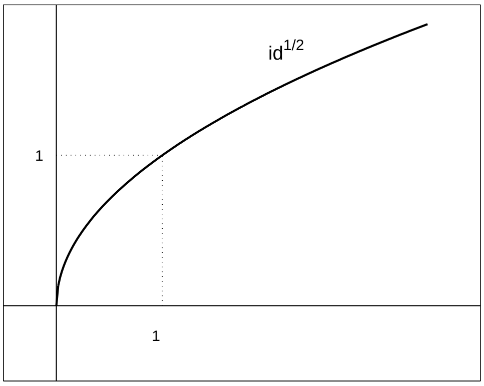
Legyen $\mathrm{id}^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \mathrm{id}^{-1}(x) := 1/x$. Az $\mathrm{id}^{-1}_{|\mathbb{R}-}$ és az $\mathrm{id}^{-1}_{|\mathbb{R}+}$ szigorúan monoton fogyó (de id^{-1} nem monoton!). Az id^{-1} páratlan (3.4. ábra).

Legyen $\mathrm{id}^{-2} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \mathrm{id}^{-2}(x) := 1/x^2$. Az $\mathrm{id}^{-2}_{|\mathbb{R}-}$ szigorúan monoton nő, az $\mathrm{id}^{-2}_{|\mathbb{R}+}$ szigorúan monoton fogy. Az id^{-2} páros (3.5. ábra).

Legyen $n \in \mathbb{N}$. Az $\mathrm{id}^{-n} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \mathrm{id}^{-n}(x) := 1/x^n$ függvény páros n esetén az id^{-2}, páratlan n esetén az id^{-1} tulajdonságait örökli.



3.5. ábra.



3.6. ábra.

Legyen $\mathrm{id}^{1/2} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\mathrm{id}^{1/2}(x) := \sqrt{x}$. Az $\mathrm{id}^{1/2}$ szigorúan monoton növekedő függvény (3.6. ábra). Megemlítjük, hogy az $\mathrm{id}^2|_{[0,\infty)}$ kölcsönösen egyértelmű függvény inverzeként is értelmezhető a $\mathrm{id}^{1/2}$.

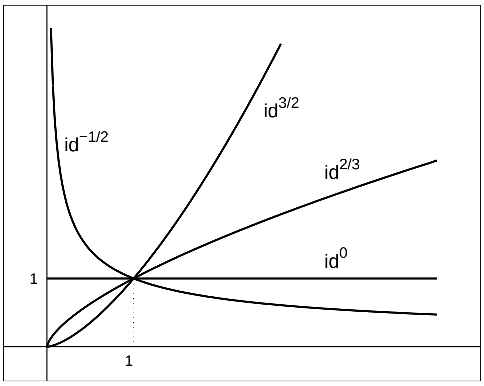
Legyen $r \in \mathbb{Q}$. Az $\mathrm{id}^r : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\mathrm{id}^r(x) := x^r$. Néhány r esetén szemléltetjük az id^r függvényeket (3.7. ábra).

Végül legyen $\mathrm{id}^0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{id}^0(x) := 1$. Az id^0 monoton növekedő, monoton fogyó is, páros függvény. Bármilyen $p > 0$ szám szerint periodikus (3.7. ábra).

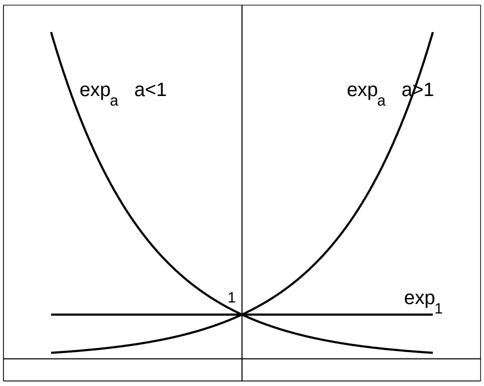
3.2.2. Exponenciális és logaritmus függvények

Legyen $a \in \mathbb{R}^+$. Az a alapú exponenciális függvény

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) := a^x.$$



3.7. ábra.



3.8. ábra.

$\exp_a$ szigorúan monoton növő, ha $a > 1$,

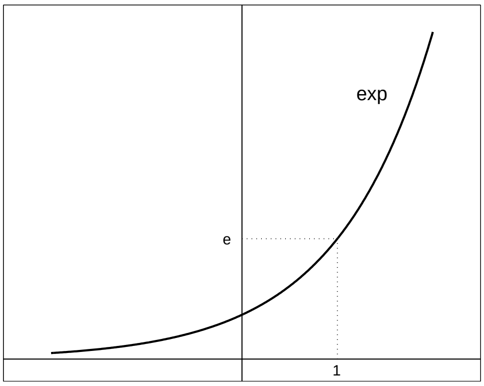
$\exp_a$ szigorúan monoton fogyó, ha $a < 1$,

$\exp_a = \mathrm{id}^0$, ha $a = 1$ (monoton növő és monoton fogyó is) (3.8. ábra).

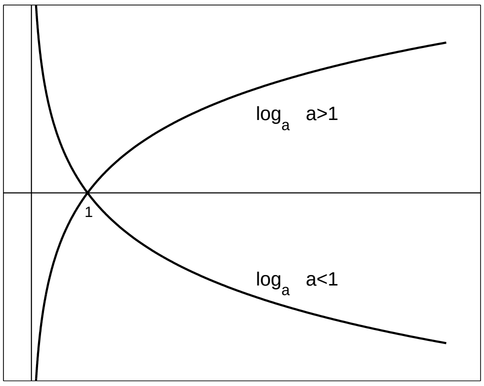
Ha $a > 0$ és $a \neq 1$, akkor $R(\exp_a) = \mathbb{R}^+$, azaz csak pozitív értéket vesz fel az $\exp_a$ (és minden pozitív számot fel is vesz). Bármely $a > 0$ esetén minden $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mellett

$$\exp_a(x_1 + x_2) = \exp_a(x_1) \cdot \exp_a(x_2).$$

(Ez a legfontosabb ismertetőjele az exponenciális függvényeknek.) Kitüntetett szerepe van az $\exp_e =: \exp$ függvénynek (3.9. ábra) (e az előző fejezet 7.* példájában szereplő Euler-féle szám).



3.9. ábra.



3.10. ábra.

Legyen $a > 0, a \neq 1$. Mivel $\exp_a$ szigorúan monoton, ezért kölcsönösen egyértelmű is, tehát van inverzfüggvénye.

$$\log_a := (\exp_a)^{-1}$$

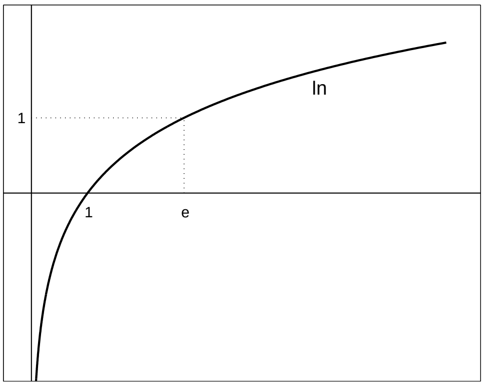
lesz az a alapú logaritmus függvény (3.10. ábra). Tehát

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad \log_a(x) = y, \text{ amelyre } \exp_a(y) = x.$$

Ha $a > 1$, akkor $\log_a$ szigorúan monoton növekedő, ha $a < 1$, akkor $\log_a$ szigorúan monoton fogyó. Alapvető tulajdonsága a logaritmus függvényeknek, hogy

1^o bármely $a > 0,\ a \neq 1$ és minden $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2.$$



3.11. ábra.

2^o bármely $a > 0,\ a \neq 1$ és minden $x \in \mathbb{R}^+$ és $k \in \mathbb{R}$ esetén

$$\log_a x^k = k \log_a x.$$

3^o bármely $a, b > 0, a, b \neq 1$ és minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

A 3^o tulajdonság szerint akár egyetlen logaritmus függvény számszorosaként az összes logaritmus függvény előáll. Ezért is van kitüntetett szerepe az e alapú logaritmusnak:

$$\ln := \log_e$$

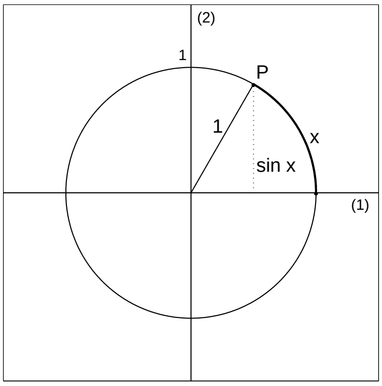
a „természetes alapú logaritmus” (3.11. ábra).

3.2.3. Trigonometrikus függvények és inverzeik

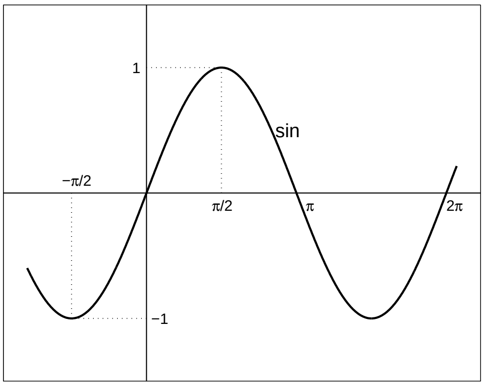
Legyen $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \sin x :=$ Ne keressen egy formulát! Vegyen fel egy 1 sugarú kört. A középpontján át rajzoljon két egymásra merőleges egyenest. Az egyik az (1) tengely, a másik a (2) tengely. Ahol az (1) tengely (pozitív fele) metszi a kört, abból a pontból „mérje fel az $x \in \mathbb{R}$ számnak megfelelő ívet a kör kerületére”. [Ez a művelet nagy kézügyességet igényel!...] Az ív P végpontjának második koordinátája legyen a $\sin x$ (3.12. ábra). A sin függvény páratlan, $p = 2\pi$ szerint periodikus (3.13. ábra). $R(\sin) = [-1, 1]$.
Legyen $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \cos x := \sin(x + \frac{\pi}{2})$. A cos függvény páros, $p = 2\pi$ szerint periodikus (3.14. ábra). $R(\cos) = [-1, 1]$.

Alapvető összefüggések:

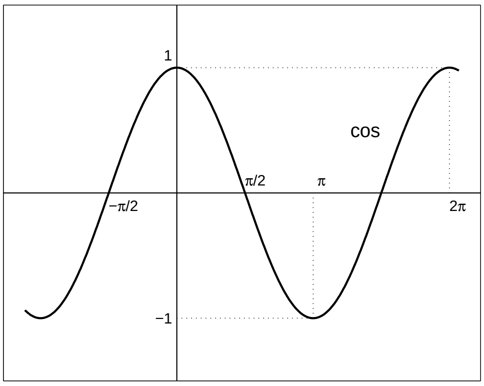
1^o Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.



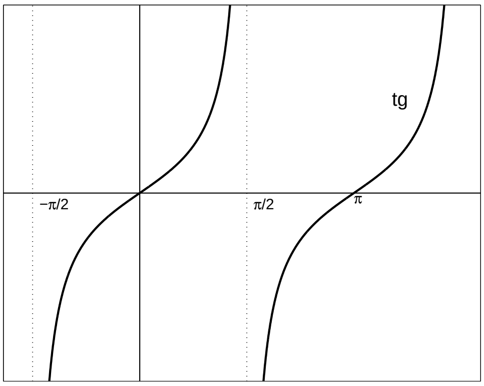
3.12. ábra.



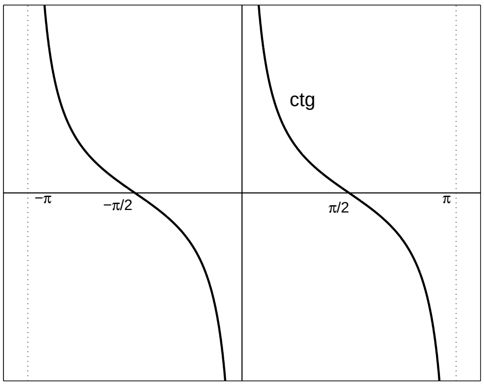
3.13. ábra.



3.14. ábra.



3.15. ábra.



3.16. ábra.

2^o Bármely $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ esetén $\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2$,
$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2$.

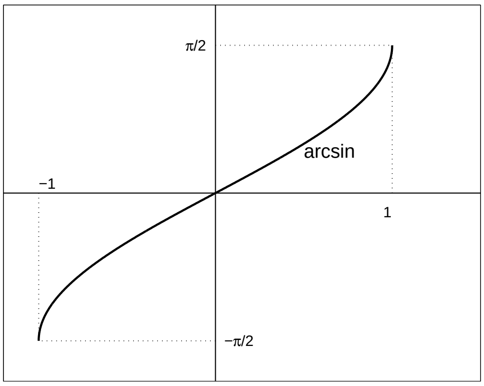
Legyen tg $:= \frac{\sin}{\cos}$ és ctg $:= \frac{\cos}{\sin}$.
Az értelmezésből következik, hogy

$$D(\mathrm{tg}) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, \; D(\mathrm{ctg}) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

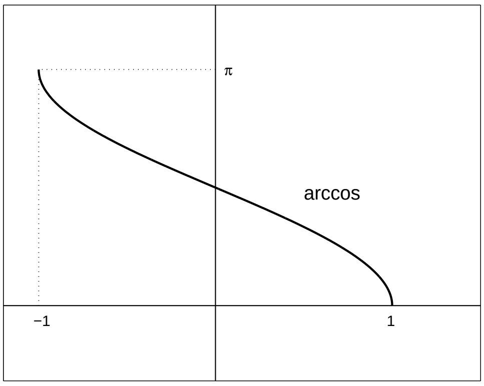
A tg és ctg is páratlan, $p = \pi$ szerint periodikus (3.15. és 3.16. ábra).

A trigonometrikus függvények periodikusságuk miatt nem kölcsönösen egyértelműek.
Tekintsük a $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ leszűkítést. Ez a függvény szigorúan monoton növekedő, ezért kölcsönösen egyértelmű, így van inverz függvénye:

$$\arcsin := (\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]})^{-1}$$



3.17. ábra.



3.18. ábra.

Az értelmezésből arcsin : $[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin x = \alpha$, amelyre $\sin\alpha = x$.
Az arcsin szigorúan monoton növekedő, páratlan függvény (3.17. ábra).

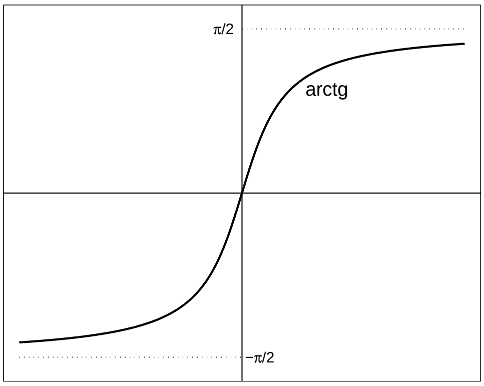
A cos függvény $[0, \pi]$ intervallumra való leszűkítése szigorúan monoton fogyó, ezért van inverzfüggvénye:

$$\arccos := (\cos|_{[0,\pi]})^{-1}$$

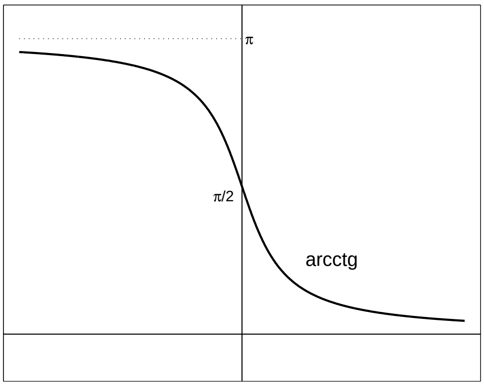
Az értelmezésből következik, hogy arccos : $[-1, 1] \to [0, \pi]$, $\arccos x = \alpha$, amelyre $\cos\alpha = x$.
Az arccos függvény szigorúan monoton fogyó (3.18. ábra).

A tg függvény $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervallumra való leszűkítése szigorúan monoton növő, ezért van inverzfüggvénye:

$$\text{arctg} := (\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]})^{-1}$$



3.19. ábra.



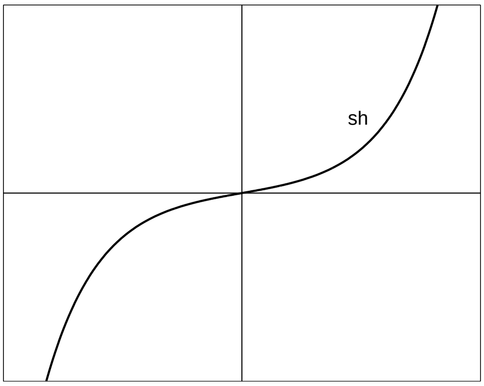
3.20. ábra.

Az értelmezésből következik, hogy arctg: $\mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, arctg $x = \alpha$, amelyre tg $\alpha = x$.
Az arctg szigorúan monoton növekedő, páratlan függvény (3.19. ábra).

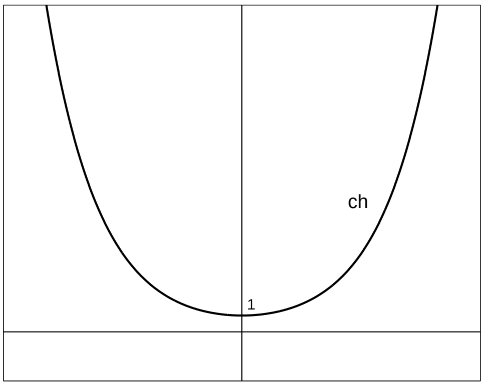
A ctg függvény $(0, \pi)$ intervallumra való leszűkítése szigorúan monoton fogyó, ezért van inverzfüggvénye:

$$\operatorname{arcctg} := (\operatorname{ctg}_{|[0,\pi]})^{-1}$$

Az értelmezésből következik, hogy arcctg : $\mathbb{R} \to (0, \pi)$, arcctg $x = \alpha$, amelyre ctg $\alpha = x$.
Az arcctg szigorúan monoton fogyó függvény (3.20. ábra).



3.21. ábra.



3.22. ábra.

3.2.4. Hiperbolikus függvények és inverzeik

Legyen $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Az sh szigorúan monoton növő, páratlan függvény (3.21. ábra).

Legyen $\mathrm{ch} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. A $\mathrm{ch}_{|_{\mathbb{R}^-}}$ szigorúan monoton fogyó, a $\mathrm{ch}_{|_{\mathbb{R}^+}}$ szigorúan monoton növő. A ch páros függvény. $R(\mathrm{ch}) = [1, +\infty)$. Gyakran láncgörbének is nevezzük ezt a függvényt (3.22. ábra).

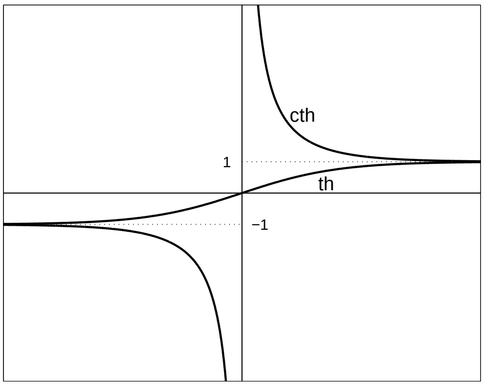
Alapvető összefüggések:

1^o Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$.

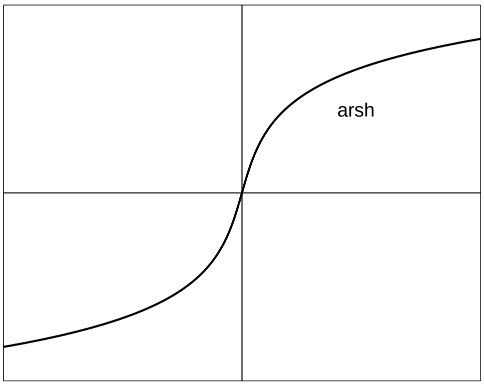
2^o Bármely $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathrm{sh}(x_1 + x_2) = \mathrm{sh}x_1 \mathrm{ch}x_2 + \mathrm{ch}x_1 \mathrm{sh}x_2,$$

$$\mathrm{ch}(x_1 + x_2) = \mathrm{ch}x_1 \mathrm{ch}x_2 + \mathrm{sh}x_1 \mathrm{sh}x_2.$$



3.23. ábra.



3.24. ábra.

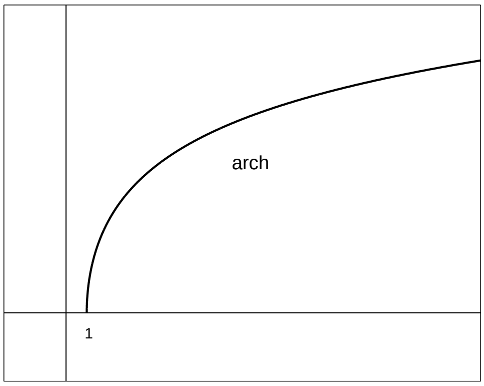
Legyen th $:= \frac{\text{sh}}{\text{ch}}$, cth $:= \frac{\text{ch}}{\text{sh}}$.
Az értelmezésből következik, hogy $\text{th} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\text{th}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $\text{cth} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $\text{cth}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$. A th és cth páratlan függvények (3.23. ábra).

A th szigorúan növekedő függvény. $R(\text{th}) = (-1, 1)$.
A $\text{cth}_{|_{\mathbb{R}-}}$ szigorúan fogyó, a $\text{cth}_{|_{\mathbb{R}+}}$ szigorúan növő függvény. $R(\text{cth}) = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.

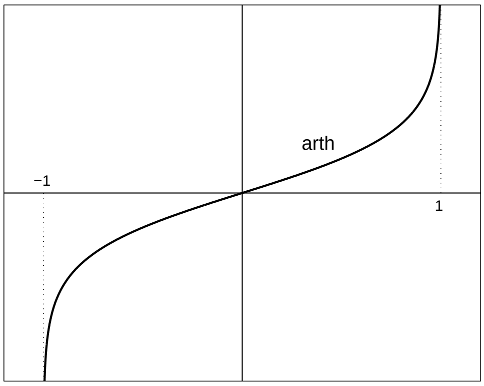
Az sh szigorúan monoton növekedő függvény, ezért van inverzfüggvénye:

$$\text{arsh} := (\text{sh})^{-1}.$$

Az értelmezésből következik, hogy $\text{arsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\text{arsh}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ (lásd az 5. feladatot). Az arsh szigorúan monoton növekedő, páratlan függvény (3.24. ábra).



3.25. ábra.



3.26. ábra.

Az ch függvény $[0, \infty)$ intervallumra való leszűkítése szigorúan monoton növekedő, ezért van inverzfüggvénye:

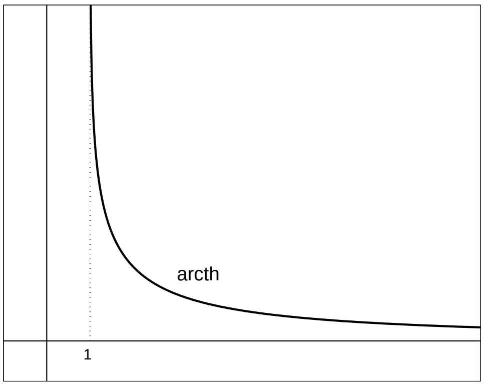
$$\operatorname{arch} := (\operatorname{ch}|_{[0,\infty)})^{-1}.$$

Az értelmezésből következik, hogy $\operatorname{arch} : [1, \infty) \to [0, \infty)$, $\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Az arch szigorúan monoton növekedő függvény (3.25. ábra).

Az th szigorúan monoton növekedő, ezért van inverzfüggvénye:

$$\operatorname{arth} := (\operatorname{th})^{-1}.$$

Az értelmezésből következik, hogy $\operatorname{arth} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$. Az arth szigorúan monoton növekedő, páratlan függvény (3.26. ábra).



3.27. ábra.

Az cth függvény $\mathbb{R}^+$ intervallumra való leszűkítése szigorúan monoton fogyó, ezért van inverzfüggvénye:

$$\operatorname{arcth} := (\operatorname{cth}_{|_{\mathbb{R}^+}})^{-1}.$$

Az értelmezésből következik, hogy $\operatorname{arcth} : (1, +\infty) \to \mathbb{R}^+,\ \operatorname{arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$. Az arcth szigorúan monoton fogyó függvény (3.27. ábra).

3.2.5. Néhány különleges függvény

1. Legyen $\operatorname{abs} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \operatorname{abs}(x) := |x|$, ahol (emlékeztetőül)

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0. \end{cases} \qquad \text{(3.28. ábra)}$$

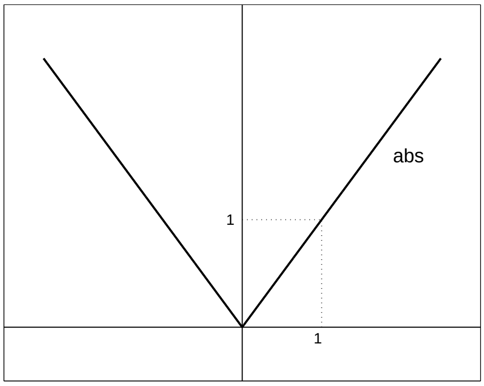
2. Legyen $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$ (3.29. ábra)

3. Legyen $\operatorname{ent} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \operatorname{ent}(x) := [x]$, ahol

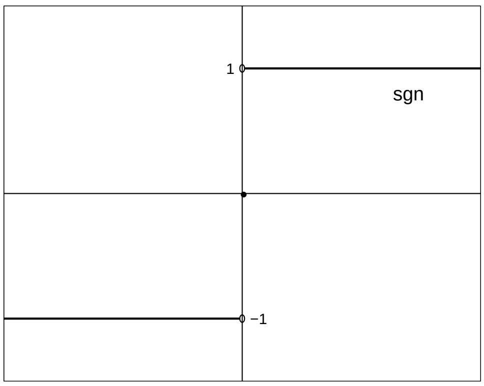
$$[x] := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}.$$

(Az $x \in \mathbb{R}$ szám „egész része” az x-nél kisebb vagy egyenlő egészek közül a legnagyobb.) (3.30. ábra)

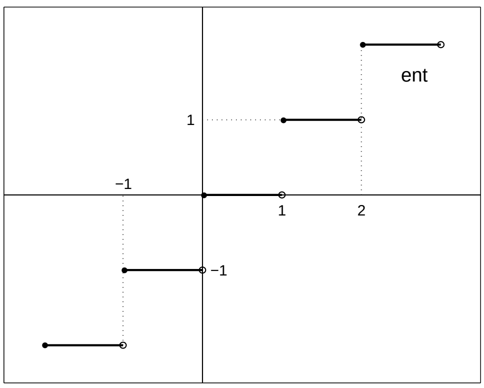
4. Legyen $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ d(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$
Dirichlet-függvénynek nevezik, nem is kíséreljük meg a szemléltetését.



3.28. ábra.



3.29. ábra.



3.30. ábra.

5. Legyen $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$r(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, & \text{ha } x \in \mathbb{Q},\ x = \frac{p}{q} \end{cases}$$

ahol $p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}$, és p-nek és q-nak nincs valódi közös osztója. Riemann-függvénynek nevezik, ezt sem kíséreljük meg szemléltetni.

3.3. Feladatok

1. Számítsuk ki a következő függvényértékeket:

$\mathrm{id}^0(7) =$	$\mathrm{id}^3(\frac{1}{2}) =$	$\mathrm{id}^{\frac{1}{2}}(4) =$	$\mathrm{id}^{-6}(1) =$
$\mathrm{id}(6) =$	$\mathrm{id}^3(-\frac{1}{2}) =$	$\mathrm{id}^{\frac{3}{2}}(4) =$	$\mathrm{id}^{-6}(2) =$
$\mathrm{id}^2(5) =$	$\mathrm{id}^3(0) =$	$\mathrm{id}^{-\frac{3}{2}}(4) =$	$\mathrm{id}^{-6}(\frac{1}{2}) =$

2. Állítsa növekvő sorrendbe a következő számokat:

   a) $\sin 1,\ \sin 2,\ \sin 3,\ \sin 4$

   b) $\ln 2,\ \exp_2 \frac{1}{2},\ \exp_{\frac{1}{2}} 2,\ \log_2 1$

   c) $\mathrm{sh}\ 3,\ \mathrm{ch}\ (-2),\ \mathrm{arsh}\ 4,\ \mathrm{th}\ 1$

   d) $\arcsin \frac{1}{2},\ \mathrm{arctg}\ 10,\ \mathrm{th}\ 10,\ \cos 1$

3. Igazolja, hogy $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1,\ \mathrm{ch}^2 x = \frac{\mathrm{ch}(2x)+1}{2}$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

4. Igazolja, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

   a) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x,\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,\ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

   b) $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2},\ \cos x - \cos y = 2 \sin \frac{y-x}{2} \sin \frac{x+y}{2}$.

5. Mutassa meg, hogy

   a) $\mathrm{arsh}\ x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \quad (x \in \mathbb{R})$

   b) $\mathrm{arch}\ x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \quad (x \in [1, +\infty))$

   c) $\mathrm{arth}\ x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (x \in (-1, 1))$

   Megoldás: a)

   1^o $\quad y = \mathrm{sh}\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

   2^o $\quad x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$

   $2x = e^y - e^{-y} / \cdot e^y$

   $2xe^y = (e^y)^2 - 1$

   $(e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0$

$(e^y)_{1,2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}$

Mivel az exp függvény csak pozitív értéket vesz fel, és bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$, ezért csak

$$e^y = x + \sqrt{x^2+1}.$$

Ebből

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}),$$

de ez azt jelenti, hogy

$$3^o \quad \text{arsh}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

6. Mutassa meg, hogy $\text{arctg} \neq \frac{\pi}{2}\text{th}$.

7. Alkosson képet a következő függvényekről:

   a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

   b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

   c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) := \begin{cases} x^2(\sin \frac{1}{x} + 2), & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

8. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Mutassa meg, hogy a $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\phi(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad \psi(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

függvények közül ϕ páros, ψ páratlan, és $f = \phi + \psi$. Ha $f = \exp$, akkor mi lesz a ϕ és a ψ függvény?

9. Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy f periodikus $p > 0$, g pedig $q > 0$ szám szerint.

   a) Mutassa meg, hogy ha $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, akkor $f + g$ is periodikus.

   b) Keressen példát arra, hogy ha $\frac{p}{q} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, akkor $f + g$ nem periodikus.

Megoldás: a) Legyen $\frac{p}{q} = \frac{k}{l}$, ahol $k, l \in \mathbb{N}$. Ekkor $lp = kq$. Legyen $\omega := lp + kq > 0$. Megmutatjuk, hogy $f + g$ függvény ω szerint periodikus.

1^o $D(f+g) = \mathbb{R}$

2^o minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} (f+g)(x+\omega) &= f(x+kq+lp) + g(x+lp+kq) = f(x+kq) + g(x+lp) = \\ &= f(x+lp) + g(x+kq) = f(x) + g(x) = (f+g)(x). \end{aligned}$$

Hasonló az $(f+g)(x-\omega) = (f+g)(x)$ igazolása is.

4. fejezet

Sorozatok, sorok

A sorozatok igen egyszerű függvények. Rajtuk tanulmányozható a közelítés pontossága. Hasznos építőkövei a későbbi fogalmaknak. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk.

- Sorozat fogalma, monotonitás, korlátosság
- Határérték és konvergencia
- Fontos határértékek
- Határérték és műveletek kapcsolata
- Az e szám definíciója
- Cauchy-féle konvergenciakritérium sorozatra
- Sor konvergenciája
- Konvergenciakritériumok sorokra

4.1. Sorozatok, sorok $\boxed{\text{A}}$

4.1.1. A sorozat fogalma és tulajdonságai

A sorozat a természetes számok halmazán értelmezett függvény.
Legyen $H \neq \emptyset$ halmaz, ha $a : \mathbb{N} \to H$, akkor H-beli sorozatról beszélünk. Ha például H a valós számok halmaza, akkor számsorozatról; ha H bizonyos jelek halmaza, akkor jelsorozatról; ha H az intervallumok halmaza, akkor intervallum-sorozatról beszélünk.
Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ számsorozat. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $a(n)$ helyett a_n legyen a sorozat n-edik tagja. Magát az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ számsorozatot is a rövidebb (a_n) helyettesítse, esetleg $(a_n) \subset \mathbb{R}$ hangsúlyozza, hogy számsorozatról van szó.
Például az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, a_n := \frac{1}{n}$ helyett az $(\frac{1}{n})$ sorozatról beszélünk.

Néha a tömör (a_n) helyett az oldottabb $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ jelölést is használhatjuk. Például az (n^2) helyett $1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots$ sorozatról beszélünk.
Mivel a sorozat is függvény, így a korlátosság, a monotonitás, műveletek sorozatokkal nem igényelnek új definíciót. Emlékeztetőül mégis újrafogalmazunk egy-két elnevezést.

4.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy (a_n) sorozat korlátos, ha van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|a_n| \le K$.*

4.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy (a_n) monoton növő, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \le a_{n+1}$.*

4.3. Definíció. *Ha (a_n) sorozat, és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor*

$$\lambda(a_n) := (\lambda a_n).$$

Ha $(a_n), (b_n)$ két sorozat, akkor

$$(a_n) + (b_n) := (a_n + b_n),$$

$$(a_n) \cdot (b_n) := (a_n \cdot b_n).$$

Ha még $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor

$$\frac{(a_n)}{(b_n)} := \left(\frac{a_n}{b_n}\right).$$

Például az $(\frac{n}{n+1})$ sorozat korlátos, hiszen bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $n < n+1$, ezért

$$\left|\frac{n}{n+1}\right| = \frac{n}{n+1} < 1.$$

Az $(\frac{n}{n+1})$ monoton növő, mert bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_n = \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} = a_{n+1},$$

mivel $n(n+2) < (n+1)^2$.
Az $(e_n) := ((\frac{n+1}{n})^n)$ sorozat is monoton növő. Ugyanis legyen $n \in \mathbb{N}$. A számtani és mértani közép között fennálló egyenlőtlenség szerint

$$e_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = 1 \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdots \frac{n+1}{n} \le \left(\frac{1 + n \cdot \frac{n+1}{n}}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = e_{n+1}.$$

Az (e_n) sorozat korlátos is (igazolása ugyanazt a számolást igényli, amit a 2. fejezet 7.* példájában mutattunk meg), bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \le 4$.

4.1.2. Sorozat határértéke

Most a sorozatok egy merőben új tulajdonságával ismerkedünk meg. Ha az $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sorozat tagjai valamilyen szám körül keveset ingadoznak, akkor az ilyen sorozatot konvergensnek fogjuk nevezni. Pontosabban:

4.4. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az (a_n) számsorozat* **konvergens**, *ha van olyan $A \in \mathbb{R}$ szám, hogy bármely $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$. Ha van ilyen A szám, akkor ez a sorozat* **határértéke** *lesz, és $\lim a_n = A$ vagy $a_n \to A$ jelöli majd.*

Például $\frac{1}{n} \to 0$, mert bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre $N > \frac{1}{\varepsilon}$ (Archimedesz-axióma). Ha pedig $n > N$, akkor $\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$, azaz $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$.

Egy másik példaként vegyünk egy 1 méteres rudat. Ha félbevágjuk, majd a félrudat is félbevágjuk, majd az egyik darabot ismét félbevágjuk és így tovább, akkor az

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$$

sorozathoz jutunk. Nyilván ez a sorozat $(\frac{1}{2^n}) \to 0$, azaz a keletkezett új darabok tetszőlegesen kicsik lesznek.

Azonnal látható, hogy ha (a_n) konvergens, akkor korlátos is, hiszen $\varepsilon := 1$ számhoz is van ilyenkor olyan N_1 küszöbindex, hogy minden $n > N_1$ esetén

$$A - 1 < a_n < A + 1,$$

és az $a_1, a_2, \ldots, a_N$ véges sok tag sem ronthatja el az (a_n) sorozat korlátosságát.

A műveletek során a konvergens sorozatok jól viselkednek.

4.1. Tétel. *Ha $a_n \to A$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda a_n \to \lambda A$.*
Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, akkor $a_n + b_n \to A + B$, $a_n b_n \to AB$.
Ha $b_n \to B$ és $B \neq 0$, akkor $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{B}$.
Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B \neq 0$, akkor $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{A}{B}$.

Ezeknek a tételeknek az alkalmazásaként nézzük a következő példát.

$$\lim \frac{3n^2 - 2n + 1}{2n^2 + n} = \lim \frac{3 - 2 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{3}{2},$$

hiszen $\frac{1}{n} \to 0$, ezért $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \to 0$. A nevező $2 + \frac{1}{n} \to 2 + 0 \neq 0$, így a hányadossorozat is konvergens.

További módszerek sorozat konvergenciájának az eldöntésére.

4.2. Tétel. *(közrefogási elv)*
Ha (a_n), (x_n), (y_n) olyan, hogy

1^o *minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_n \leq a_n \leq y_n$,*

2^o $\lim x_n = \lim y_n =: \alpha$,

akkor (a_n) *konvergens, és* $\lim a_n = \alpha$.

4.3. Tétel. *Ha* (a_n) *monoton és korlátos, akkor* (a_n) *konvergens.*

Például az $(e_n) := ((\frac{n+1}{n})^n)$ sorozatról már láttuk, hogy monoton növő és korlátos is, ezért konvergens. A határértéke éppen a 2. fejezet 7.* példájában szereplő e szám:

$$\lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e.$$

A feladatok között egy sor további konvergens sorozatot találhatunk.

A sorozat konvergenciájának definíciója tartalmaz egy komoly nehézséget: meg kell sejteni azt az $A \in \mathbb{R}$ számot, amelyhez a sorozat tetszőlegesen közel kerül. Ezt küszöböli ki a következő tétel:

4.4. Tétel. *(Cauchy konvergencia kritérium)*
Az (a_n) *sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha bármely* $\varepsilon > 0$ *hibakorláthoz van olyan* $N \in \mathbb{N}$ *küszöbindex, hogy minden olyan esetben, amikor* $m, n > N$, $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Tehát az, hogy a számsorozat hozzásimul, tetszőlegesen megközelít egy számot, egyenértékű azzal, hogy a sorozat tagjai tetszőlegesen megközelítik egymást.

4.1.3. Sorok

Most gondoljunk arra, hogy valaki az előzőekben szereplő 1 méteres rúd szeletelésénél kapott darabokat össze szeretné illeszteni, azaz az

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

„összeget" szeretné elkészíteni. Akkor az $\frac{1}{2}$-hez hozzáragasztja az $\frac{1}{2^2}$ hosszúságút, így $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$ lesz; majd ehhez ragasztja az $\frac{1}{2^3}$ hosszúságút, így $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$ lesz, és így tovább. Általánosabban: Legyen (a_n) számsorozat. Készítsük el az

$$S_1 := a_1,\ S_2 := a_1 + a_2,\ S_3 := a_1 + a_2 + a_3, \ldots, S_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots$$

sorozatot. Az (a_n) összeadandókból készített $\sum a_n$ **végtelen sor**on az (S_n) részletösszeg-sorozatot értjük. A végtelen sok szám összeadása konvergens eljárás, azaz $\sum a_n$ **végtelen sor konvergens**, ha az (S_n) sorozat konvergens. Ha az (S_n) sorozat konvergens, akkor a $\sum a_n$ végtelen sor **összegé**n az (S_n) sorozat határértékét értjük, azaz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim S_n$.

Például legyen $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$. Tekintsük a (q^n) összeadó sorozatot. Az n-edik részletösszeg

$$S_n = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = q\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Mivel $q^n \to 0$ (lásd a C) példák 3. feladatát), ezért

$$\lim S_n = \lim q\frac{q^n - 1}{q-1} = \frac{-q}{q-1} = \frac{q}{1-q}.$$

tehát a $\sum q^n$ végtelen sor konvergens, és $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$ a végtelen sor összege.

Ha $\sum a_n$ egy konvergens végtelen sor, akkor (S_n) konvergens, ekkor a Cauchy konvergencia kritérium szerint bármely $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan N küszöbindex, hogy minden $m > N$ és $n := m+1 > N$ esetén

$$\varepsilon > |S_n - S_m| = |a_1 + a_2 + \ldots + a_m + a_{m+1} - (a_1 + a_2 + \ldots + a_m)| = |a_n|.$$

Ez éppen azt jelenti, hogy $a_n \to 0$. Tehát érvényes a következő tétel:

4.5. Tétel. *Ha $\sum a_n$ konvergens, akkor $a_n \to 0$.*

Megfordítva nem igaz az állítás. Legyen $(a_n) := (\ln \frac{n+1}{n})$. Mivel $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \to 1$, ezért $\ln \frac{n+1}{n} \to \ln 1 = 0$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$S_n = \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n} = \ln\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n} = \ln(n+1).$$

Legyen $K > 0$ tetszőleges. Van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $n+1 > e^K$. Ekkor $S_n = \ln(n+1) > \ln e^K = K$, tehát az (S_n) nem korlátos, de akkor nem is konvergens, azaz $\sum a_n$ nem konvergens.
Ugyanígy viselkedik a $\sum \frac{1}{n}$ végtelen sor is: bár az $\frac{1}{n} \to 0$, de a $\sum \frac{1}{n}$ nem konvergens.

Van lehetőség az összeadandó sorozat viselkedéséből a végtelen sor konvergenciájára következtetni.

4.6. Tétel. *(Hányados kritérium)*
Legyen (a_n) olyan sorozat, amelyhez van olyan $0 < q < 1$ szám és N küszöbindex, hogy minden $n > N$ esetén $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \le q$. Ekkor $\sum a_n$ konvergens.

4.7. Tétel. *(Gyökkritérium)*
Legyen (a_n) olyan sorozat, amelyhez van olyan $0 < q < 1$ szám és N küszöbindex, hogy minden $n > N$ esetén $\sqrt[n]{|a_n|} \le q$. Ekkor $\sum a_n$ konvergens.

Például a $\sum \frac{2^n}{n!}$ azért konvergens végtelen sor, mert

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2}{n+1} < \frac{1}{2}, \text{ ha } n > 5.$$

Érdekes a váltakozó előjelű sorokról szóló tétel.

4.8. Tétel. *(Leibniz)*
Legyen (a_n) pozitív tagú, monoton fogyó sorozat, amelyre $a_n \to 0$. Ekkor a $\sum(-1)^{n+1}a_n$ váltakozó előjelű végtelen sor konvergens.

Például a $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ konvergens, mert $(\frac{1}{n})$ monoton fogyó, és $\frac{1}{n} \to 0$.

4.2. Feladatok

1. Mutassa meg, hogy $a_n \to A$ pontosan akkor, ha $a_n - A \to 0$.
Megoldás: Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ha $a_n \to A$, akkor van olyan N, hogy $n > N$ esetén
$$|a_n - A| < \varepsilon.$$
Ekkor $|a_n - A - 0| = |a_n - A| < \varepsilon$ is igaz, így $a_n - A \to 0$.
Ugyanez a fordított állítás igazolása is.

2. Mutassa meg, hogy $a_n \to 0$ pontosan akkor, ha $|a_n| \to 0$.
Megoldás: Legyen $\varepsilon > 0$. Ha $a_n \to 0$, akkor van olyan N, hogy $n > N$ esetén $|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$, de akkor $||a_n| - 0| = |a_n| < \varepsilon$ is igaz, amiből $|a_n| \to 0$ következik.
Ha $|a_n| \to 0$, akkor $-|a_n| \to 0$ is igaz. Mivel $-|a_n| \le a_n \le |a_n|$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ezért a közrefogás miatt $a_n \to 0$.

3. Legyen $q \in (-1, 1)$. Mutassa meg, hogy $q^n \to 0$.
Konvergens-e az $(\frac{1}{3^n})$, $((\sin\frac{\pi}{4})^n)$, $(\frac{2^n}{3^n+10})$ sorozat?
Megoldás: Ha $q = 0$, akkor $0^n \to 0$. Ha $q \ne 0$, akkor $0 < |q| < 1$, ezért van olyan $h > 0$, hogy $\frac{1}{|q|} = 1 + h$. Ekkor a Bernoulli-egyenlőtlenség szerint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$\left(\frac{1}{|q|}\right)^n = (1+h)^n \ge 1 + nh > nh$$
$$0 < |q|^n < \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{n}.$$
Mivel $0 \to 0$, $\frac{1}{h} \cdot \frac{1}{n} \to 0$, ezért a közrefogott sorozat is 0-hoz tart, azaz $|q^n| = |q|^n \to 0$. A 2. példa szerint a $q^n \to 0$ is igaz.

4. Legyen $a > 1$. Mutassa meg, hogy $\frac{n}{a^n} \to 0$.
Konvergens-e az $(\frac{n}{2^n})$, $(n \cdot 0,999^n)$ sorozat?
Megoldás: Ha $a > 1$, akkor van olyan $h > 0$, hogy $a = 1 + h$. A 2. fejezet 5. példája szerint minden $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ esetén
$$a^n = (1+h)^n > \binom{n}{2} h^2 = \frac{n(n-1)}{2} h^2.$$
Ebből
$$0 < \frac{n}{a^n} < \frac{2}{h^2} \frac{1}{n-1}.$$
Nyilván $\frac{1}{n-1} \to 0$, így a közrefogott sorozatra $\frac{n}{a^n} \to 0$.

5. Legyen $a > 1$, $k \in \mathbb{N}$. Mutassa meg, hogy $\frac{n^k}{a^n} \to 0$.
Legyen $(a_n) := (\frac{n^{100}}{1,001^n})$. Becsülje meg az a_1, a_2, a_3 értékét, $\lim a_n = ?$
Megoldás: Bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$\frac{n^k}{a^n} = \frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \cdot \frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \cdots \frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n}$$

Mivel $\sqrt[k]{a} > 1$, ezért $\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \to 0$ a 4. példa szerint. Akkor k darab 0-hoz tartó sorozat szorzata is 0-hoz tart, tehát $\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \to 0$.

6. Legyen $a > 0$. Mutassa meg, hogy $\frac{a^n}{n!} \to 0$.
Megoldás: Van olyan $k \in \mathbb{N}$, hogy $a < k$. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n > k$. Ekkor
$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{k} \cdot \frac{a}{k+1} \cdots \frac{a}{n-1} \cdot \frac{a}{n}.$$
Legyen $\frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{k} := L$; $\frac{a}{k+1} < 1, \dots, \frac{a}{n-1} < 1$, így
$$0 < \frac{a^n}{n!} < L\frac{a}{n}.$$
Mivel $\frac{La}{n} \to 0$, ezért a közrefogott sorozatra $\frac{a^n}{n!} \to 0$.

7. Mutassa meg, hogy $\frac{n!}{n^n} \to 0$.

8. Legyen $a > 0$. Igazolja, hogy $\sqrt[n]{a} \to 1$.
Megoldás: Először legyen $a > 1$. Legyen $p_n := \sqrt[n]{a} - 1 > 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén a Bernoulli-egyenlőtlenség szerint
$$a = (1 + p_n)^n > np_n,$$
így
$$0 < p_n < \frac{a}{n}.$$
Mivel $\frac{a}{n} \to 0$, ezért a közrefogott sorozatra $p_n \to 0$, ami az 1. feladat szerint $\sqrt[n]{a} \to 1$.
Ha $0 < a < 1$, akkor $\frac{1}{a} > 1$, ezért $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} \to 1$, de akkor a reciprok sorozatra is $\sqrt[n]{a} \to 1$.

9. $\lim \sqrt[n]{5} =?$ $\quad \lim \sqrt[n]{2^n + 1000} =?$ $\quad \lim \sqrt[n]{2^n + 5^n} =?$

10. Igazolja, hogy $\sqrt[n]{n} \to 1$.
Konvergens-e az $(\sqrt[n]{n^2})$, $(\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}})$ sorozat?
Megoldás: Legyen $p_n := \sqrt[n]{n} - 1 > 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Bármely $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ esetén $n = (1 + p_n)^n > \binom{n}{2} p_n^2$ a 2. fejezet 5. példája szerint. Ebből
$$n > \frac{n(n-1)}{2} p_n^2$$
$$p_n^2 < \frac{2}{n-1}$$
$$0 < p_n < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}.$$
A könnyen igazolható $\frac{1}{\sqrt{n-1}} \to 0$ miatt a közrefogott $p_n \to 0$, ami egyenértékű (1. feladat) az $\sqrt[n]{n} \to 1$ állítással.

11. Igazolja, hogy $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \to 0$.
Megoldás: Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén (egy pillanatra feltételezve, hogy n páros)

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} + 1\right) \cdots n > 1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdots \frac{n}{2},$$

azaz $n! > (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}$. Ebből

$$\sqrt[n]{n!} > \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$0 < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}.$$

Mivel $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, ezért a közrefogott sorozatra $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \to 0$.

12. Mutassa meg, hogy $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ konvergens.
Megoldás: Legyen $n \in \mathbb{N}$.

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{1 \cdot n(n+1)}.$$

Mivel $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, ezért

$$S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

$\lim S_n = \lim 1 - \frac{1}{n+1} = 1$, ezért $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ konvergens, és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

13. Mutassa meg, hogy $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens.
Megoldás: Legyen $n \in \mathbb{N},\ n > 1$

$$S_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \ldots \frac{1}{(n-1)n} =$$
$$= 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2$$

Tehát az (S_n) sorozat korlátos. Másrészt bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)^2} > S_n$, tehát (S_n) monoton növekedő. Ezért S_n konvergens, azaz $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens.

14. Konvergens-e a $\sum \frac{1}{n!}$, $\sum \frac{3^n}{n!}$ végtelen sor?
Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens a $\sum \frac{x^n}{n!}$ végtelen sor?
Megoldás: Megmutatjuk, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $\sum \frac{x^n}{n!}$ konvergens, ugyanis ha $x \neq 0$, akkor

$$\left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \frac{|x|}{n+1} \leq \frac{1}{2}, \text{ ha } n > [2|x| - 1],$$

ezért a hányados kritérium szerint $\sum \frac{x^n}{n!}$ konvergens.

15. Konvergens-e a $\sum \frac{3^n}{1+3^{2n}}$ végtelen sor?
Megoldás: A gyökkritérium szerint
$$\sqrt[n]{\frac{3^n}{1+3^{2n}}} < \sqrt[n]{\frac{3^n}{3^{2n}}} = \frac{1}{3} \quad (n \in \mathbb{N}),$$
ezért $\sum \frac{3^n}{1+3^{2n}}$ konvergens.

16. A hányados- vagy a gyökkritérium alapján kiderülhetne-e, hogy $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens?
Megoldás: Nem. Ugyanis
$$\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 < 1,$$
de nincs olyan $q < 1$ szám, hogy valamilyen N után minden $n > N$ esetén $(\frac{n}{n+1}) \leq q$.
A gyökkritérium szerint is
$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} < 1,$$
de mivel $\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1$, ezért nincs olyan $q < 1$ szám, hogy valamilyen N után minden $n > N$-re $\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} < q$.

17. Konvergens-e a $\sum \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$ végtelen sor?
Megoldás: $\cos(n\pi) = (-1)^n$, $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ monoton fogyólag tart 0-hoz, ezért a Leibniz-tétel szerint $\sum \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$ konvergens.

18. * Igazoljuk a következő állításokat:
a) Bármely $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ esetén
$$\lim \left(1 + \frac{\alpha}{n+\beta}\right)^{n+\gamma} = e^\alpha$$
b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$
c) Bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $\vartheta \in (0,1)$, hogy
$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\vartheta}{n!n}$$
d) $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

4.3. Sorozatok $\boxed{E}$

4.3.1. Sorozat konvergenciája

4.5. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat konvergens, ha $\exists A \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}:$ $\forall n > N$ $|a_n - A| < \varepsilon$.*

4.9. Tétel. *Ha* (a_n) *konvergens, akkor* (a_n) *korlátos.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon := 1$. Mivel (a_n) konvergens, ezért $\exists A \in \mathbb{R}$ és $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n > N$ esetén

$$A - 1 < a_n < A + 1.$$

Ha $K := \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, |A-1|, |A+1|\}$, akkor $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $|a_n| \leq K$.

4.10. Tétel. *Ha* (a_n) *monoton és korlátos, akkor* (a_n) *konvergens.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (a_n) monoton növekedő. Tekintsük az $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ halmazt. Ez a halmaz felülről korlátos számhalmaz, ezért $\exists \sup\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} =: \alpha$. A halmaz felső határának tulajdonsága, hogy

1^o $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq \alpha$

2^o $\underline{\forall \varepsilon > 0}$ $\underline{\exists N \in \mathbb{N}}$: $a_n > \alpha - \varepsilon$.

Legyen $\underline{n > N \text{ tetszőleges}}$, és becsüljük meg a sorozat n-edik tagját:

$$\alpha - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq \alpha < \alpha + \varepsilon,$$

tehát $\underline{|a_n - \alpha| < \varepsilon}$. Az aláhúzott rész éppen (a_n) konvergenciáját jelenti.

4.11. Tétel. *Legyen* (a_n) *olyan sorozat, amelyhez* $\exists (x_n), (y_n)$:

1^o $\forall n \in \mathbb{N}$ *esetén* $x_n \leq a_n \leq y_n$

2^o $\lim x_n = \lim y_n =: \alpha$

Akkor (a_n) *konvergens, és* $\lim a_n = \alpha$.

Bizonyítás. Legyen $\underline{\varepsilon > 0 \text{ tetszőleges}}$.
Mivel $x_n \to \alpha$, ezért $\exists N_1$, $\forall n > N_1$ esetén $\alpha - \varepsilon < x_n < \alpha + \varepsilon$.
Mivel $y_n \to \alpha$, ezért $\exists N_2$, $\forall n > N_2$ esetén $\alpha - \varepsilon < y_n < \alpha + \varepsilon$.
Legyen $\underline{N} := \max\{N_1, N_2\}$ és $\underline{n > N \text{ tetszőleges}}$. Ekkor $\alpha - \varepsilon < x_n \leq a_n \leq y_n < \alpha + \varepsilon$, amiből $\underline{|a_n - \alpha| < \varepsilon}$. Az aláhúzottakból következik az állítás.

4.3.2. Műveletek konvergens sorozatokkal

4.12. Tétel. *Ha* $a_n \to 0$ *és* $b_n \to 0$, *akkor* $a_n + b_n \to 0$.

Bizonyítás. Legyen $\underline{\varepsilon > 0 \text{ tetszőleges}}$, akkor $\frac{\varepsilon}{2} > 0$.
Mivel $a_n \to 0$, ezért $\exists N_1$, $\forall n > N_1$ esetén $-\frac{\varepsilon}{2} < a_n < \frac{\varepsilon}{2}$.
Mivel $b_n \to 0$, ezért $\exists N_2$, $\forall n > N_2$ esetén $-\frac{\varepsilon}{2} < b_n < \frac{\varepsilon}{2}$.
Legyen $\underline{N} := \max\{N_1, N_2\}$ és $\underline{n > N \text{ tetszőleges}}$. Ekkor $-\varepsilon = -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} < a_n + b_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, azaz $\underline{|a_n + b_n| < \varepsilon}$, tehát $a_n + b_n \to 0$ az aláhúzottak szerint.

4.13. Tétel. *Ha* $a_n \to 0$ *és* (c_n) *korlátos* $(|c_n| < K \ (n \in \mathbb{N}))$, *akkor* $a_n c_n \to 0$.

Bizonyítás. Legyen $\underline{\varepsilon > 0 \text{ tetszőleges}}$, ekkor $\frac{\varepsilon}{K} > 0$. Mivel $a_n \to 0$, ezért $\underline{\exists N}$, $\forall n > N$ esetén $|a_n| < \frac{\varepsilon}{K}$. Legyen $\underline{n > N \text{ tetszőleges}}$.

$$\underline{|a_n c_n|} = |a_n||c_n| \leq |a_n| \cdot K \leq \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \underline{\varepsilon},$$

az aláhúzottakból következik, hogy $a_n c_n \to 0$.

4.14. Tétel. *Ha $a_n \to A$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda a_n \to \lambda A$.*

Bizonyítás. $(\lambda a_n - \lambda A) = (\lambda) \cdot (a_n - A)$. Az $a_n - A \to 0$, a (λ) korlátos sorozat, ezért

$$\lambda(a_n - A) \to 0 \Longleftrightarrow \lambda a_n \to \lambda A.$$

4.15. Tétel. *Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, akkor $a_n + b_n \to A + B$.*

Bizonyítás. $(a_n + b_n - (A + B)) = (a_n - A + b_n - B) = (a_n - A) + (b_n - B)$. Mivel $a_n - A \to 0$ és $b_n - B \to 0$, ezért összegük is 0-hoz tart, azaz $a_n + b_n \to A + B$.

4.16. Tétel. *Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, akkor $a_n b_n \to AB$.*

Bizonyítás. $(a_n b_n - AB) = (a_n b_n - Ab_n + Ab_n - AB) = (a_n - A)(b_n) + (A)(b_n - B)$.
Az $a_n - A \to 0$, (b_n) konvergens, ezért korlátos is, így szorzatuk 0-hoz tart. A $b_n - B \to 0$, (A) korlátos, ezért szorzatuk is 0-hoz tart. Két 0-hoz tartó sorozat összege is 0-hoz tart, tehát $a_n b_n \to AB$.

4.17. Tétel. *Ha $b_n \to B$, $B \neq 0$, akkor $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{B}$.*

Bizonyítás. Legyen $B > 0$.

$$\left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right) = \left(\frac{B - b_n}{Bb_n}\right) = -\frac{1}{B} \cdot \left(\frac{1}{b_n}\right) \cdot (b_n - B)$$

A $b_n - B \to 0$. Megmutatjuk, hogy $\frac{1}{b_n}$ korlátos. Mivel $b_n \to B$, ezért $\varepsilon := \frac{B}{2} > 0$ számhoz $\exists N :\ \forall n > N$ esetén $-\frac{B}{2} < b_n - B < \frac{B}{2}$, vagy $B - \frac{B}{2} < b_n < B + \frac{B}{2}$, amiből

$$\frac{2}{B} > \frac{1}{b_n} > \frac{2}{3B}.$$

Ez azt jelenti, hogy $\frac{1}{b_n}$ korlátos $(n > N)$. A 0-hoz tartó és korlátos sorozat szorzata 0-hoz tart, tehát $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{B}$.

4.18. Tétel. *Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B \neq 0$, akkor $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{A}{B}$.*

Bizonyítás. $(\frac{a_n}{b_n}) = (a_n) \cdot (\frac{1}{b_n})$. A szorzatsorozat és a reciproksorozat konvergenciájáról szóló tétel szerint

$$a_n \cdot \frac{1}{b_n} \to A \cdot \frac{1}{B},$$

tehát $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{A}{B}$.

4.3.3. Részsorozatok

4.6. Definíció. *Egy $i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növekedő sorozatot* **index-sorozat***nak nevezünk.*

4.7. Definíció. *Legyen $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy b az a sorozat egy részsorozata, ha $\exists i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozat, hogy $b = a \circ i$, azaz $(b_n) = (a_{i_n})$.*

Például $(a_n) := 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ és $(i_n) := 2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots$ esetén

$$(a_{i_n}) := \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6} \ldots, \frac{1}{2n}, \ldots$$

lesz a részsorozat.

4.19. Tétel. *Minden sorozatnak van monoton részsorozata.*

Bizonyítás. Bármely sorozatra igaz, hogy

vagy 1^o nincs legnagyobb tagja,

vagy 2^o van legnagyobb tagja, de véges sokat elhagyva a sorozat tagjai közül a visszamaradó sorozatnak már nincs legnagyobb tagja,

vagy 3^o van legnagyobb tag a sorozatban, és bárhogyan hagyunk el véges sokat a sorozatból, a visszamaradt sorozatnak még mindig van legnagyobb tagja.

Ha (a_n) az 1^o típusú sorozat, akkor egy szigorúan monoton növő részsorozatot készítünk.

$$a_{i_1} := a_1.$$

Hagyjuk el a sorozatból a_1-et. A visszamaradt sorozatban van a_1-nél nagyobb tag, legyen ez a_k.

$$a_{i_2} := a_k.$$

Hagyjuk el a sorozatból az a_k-ig a tagokat, és a visszamaradt $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n, \ldots$ sorozatból válasszunk az a_k-nál nagyobb tagot, legyen ez a_l.

$$a_{i_3} := a_l.$$

Ezt az eljárást folytassuk. Nyilván $i_1 = 1 < i_2 = k < i_3 = l < \ldots$, tehát (i_n) indexsorozat lesz, és $a_{i_1} = a_1 < a_{i_2} = a_k < a_{i_3} = a_l < \ldots$ az (a_n) sorozat

szigorúan monoton növő részsorozata.
Ha (a_n) a 2^o típusú sorozat, akkor hagyjuk el a sorozatból azt a véges sok tagot, amely között volt a sorozat legnagyobb tagja, és a visszamaradt sorozattal ismételjük meg az előző eljárást. Így ekkor is szigorúan monoton növekedő részsorozathoz jutunk.
Ha (a_n) a 3^o típusú sorozat, akkor fogyó részsorozatot készítünk. Legyen a_k a sorozat legnagyobb tagja. Ekkor

$$a_{i_1} := a_k.$$

Hagyjuk el a_k-ig a sorozattagokat. A visszamaradt $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n, \ldots$ sorozatnak is van legnagyobb tagja, legyen ez a_l. Nyilván $a_k \geq a_l$. Legyen

$$a_{i_2} := a_l.$$

Hagyjuk el a_l-ig a sorozattagokat, a visszamaradt $a_{l+1}, a_{l+2}, \ldots, a_n, \ldots$ sorozat legnagyobb tagja legyen a_m. Nyilván $a_l \geq a_m$. Legyen

$$a_{i_3} := a_m.$$

Ezt az eljárást folytassuk. Látható, hogy az így szerkesztett (a_{i_n}) valóban részsorozata az (a_n) sorozatnak és monoton fogyó lesz.

4.20. Tétel. *(Bolzano-Weierstrass kiválasztási tétel)*
Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

Bizonyítás. Minden sorozatnak van monoton részsorozata. Ez a részsorozat is korlátos lesz. Egy monoton és korlátos sorozat konvergens.

4.3.4. Sorozat lim sup-ja és lim inf-je

Legyen (a_n) korlátos sorozat. Készítsük el az

$$\begin{array}{rcl}
\alpha_1 & := & \sup\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} \\
\alpha_2 & := & \sup\{a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots\} \\
\vdots & & \\
\alpha_k & := & \sup\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n, \ldots\} \\
\vdots & &
\end{array} \tag{4.1}$$

számsorozatot. Mivel $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} \supset \{a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$, ezért a felső határukra nyilván $\alpha_1 \geq \alpha_2$. Ezt tovább gondolva látszik, hogy (α_k) monoton fogyó sorozat. Az (α_k) ugyanolyan korlátok közé szorítható, mint az eredeti (a_n) sorozat. Mivel (α_k) monoton és korlátos, ezért konvergens.

4.8. Definíció. $\limsup a_n := \lim \alpha_k$.

Az előző gondolatmenethez hasonlóan legyen

$$\begin{aligned}
\beta_1 &:= \inf\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} \\
\beta_2 &:= \inf\{a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots\} \\
&\vdots \\
\beta_k &:= \inf\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n, \ldots\} \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Nyilván $\beta_1 \leq \beta_2$, és ez a tendencia megmarad, így (β_k) monoton növő. A (β_k) is korlátos. Mivel (β_k) monoton és korlátos, ezért konvergens.

4.9. Definíció. $\liminf a_n := \lim \beta_k$.

A szerkesztésből látszik, hogy $\forall k \in \mathbb{N}$ esetén $\alpha_k \geq \beta_k$, így $\liminf a_n = \lim \beta_k \leq \lim \alpha_k = \limsup a_n$.
Bebizonyítható, hogy

4.21. Tétel. *Az (a_n) korlátos sorozat konvergens* $\Longleftrightarrow \liminf a_n = \limsup a_n$.

Szintén bizonyítás nélkül megemlítjük a $\limsup a_n$ érdekes tulajdonságait:

a) $\forall \varepsilon > 0$ esetén a $(\limsup a_n) - \varepsilon$ számnál nagyobb tag végtelen sok van az (a_n) sorozatban, a $(\limsup a_n) + \varepsilon$ számnál nagyobb tag már csak véges sok van az (a_n) sorozatban.

b) A $\limsup a_n$ az (a_n) sorozat konvergens részsorozatainak a határértékei közül a legnagyobb (tehát van is olyan (a_{i_n}) konvergens részsorozat, amelyre $a_{i_n} \to \limsup a_n$.)

Értelemszerű módosítással megfogalmazhatók a $\liminf a_n$ tulajdonságai is.

4.3.5. Intervallumsorozat

4.22. Tétel. *(Cantor közösrész tétel)*
Legyen $([a_n, b_n])$ zárt intervallumok sorozata. Tegyük fel, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ („egymásba skatulyázott intervallumok") és $\lim b_n - a_n = 0$. *Ekkor egyértelműen létezik $c \in \mathbb{R}$, amelyre $\cap_{n \in \mathbb{N}}[a_n, b_n] = \{c\}$.*

Bizonyítás. Legyen (a_n) az intervallumok kezdőpontjainak sorozata. Az egymásbaskatulyázottság miatt $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_1$, tehát az (a_n) sorozat egyik felső korlátja b_1, másrészt (a_n) monoton növő. Ezért (a_n) konvergens. Legyen $\alpha := \lim a_n$.
Az intervallumok végpontjainak sorozata legyen (b_n). Nyilván $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $b_n \geq b_{n+1} \geq a_{n+1} \geq a_1$, tehát (b_n) monoton fogyó és alulról korlátos, ezért (b_n)

konvergens. Legyen $\beta := \lim b_n$.
Belátjuk, hogy $\alpha = \beta$.

$$\beta - \alpha = \lim b_n - \lim a_n = \lim(b_n - a_n) = 0.$$

Legyen $c := \alpha = \beta$.
Az (a_n) monoton növekedése és a (b_n) monoton fogyása miatt $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_n \leq \lim a_n = c = \lim b_n \leq b_n,$$

ezért $c \in [a_n, b_n]$, ami azt jelenti, hogy

$$c \in \cap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n].$$

Indirekt módon, tegyük fel, hogy $\exists d \in \mathbb{R},\ d \neq c$, amelyre

$$d \in \cap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n].$$

Legyen $\varepsilon := \frac{|d-c|}{3} > 0$. Mivel $b_n - a_n \to 0$, ezért $\exists N$, $\forall n > N$ esetén $b_n - a_n < \varepsilon$. Legyen $[a_n, b_n]$ egy ilyen intervallum. A $c \in [a_n, b_n]$, de akkor a c-től a $3 \cdot \varepsilon$ távolságra lévő d már nem lehet az ε-nál rövidebb intervallumban. Ez ellentmondás, tehát $\cap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] = \{c\}$.

4.3.6. Cauchy konvergencia kritérium

A Cantor közösrész tétel is hasznos segédeszköz lehet sorozat konvergenciájának kimutatására. A következő tétel alapvető szükséges és elégséges feltételt ad a sorozat konvergenciájára.

4.10. Definíció. *Mondjuk azt, hogy* (a_n) **Cauchy-sorozat**, *ha*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N},\ \textit{hogy}\ \ \forall n, m > N\ \textit{esetén}\ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

4.23. Tétel. *(Cauchy konvergencia kritérium)*
Legyen (a_n) *számsorozat*

$$(a_n)\ \textit{konvergens} \Longleftrightarrow (a_n)\ \textit{Cauchy-sorozat.}$$

Bizonyítás. $(\Rightarrow)$ Legyen $\lim a_n =: A$. Legyen $\underline{\varepsilon > 0 \text{ tetszőleges}}$. Mivel $a_n \to A$, ezért az $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ hibakorláthoz $\underline{\exists N}$, hogy $\forall n > N$ esetén $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ és $\forall m > N$ esetén $|a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Legyen $\underline{n, m > N \text{ tetszőleges}}$. Ekkor

$$\underline{|a_n - a_m|} = |a_n - A + A - a_m| \leq |a_n - A| + |A - a_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \underline{\varepsilon}.$$

Az aláhúzottak szerint (a_n) Cauchy-sorozat.
$(\Leftarrow)$ Legyen (a_n) Cauchy-sorozat. Megmutatjuk, hogy (a_n) korlátos. Ugyanis az $\varepsilon := 1$ pozitív számhoz is $\exists N_1$, hogy $\forall n, m > N_1$ esetén

$$|a_n - a_m| < 1.$$

Rögzítsük az $m > N_1$ indexet. Így

$$a_m - 1 < a_n < a_m + 1,$$

ami azt jelenti, hogy $\forall n > N_1$ esetén a sorozat tagjai a két korlát közé esnek. Az $a_1, a_2, \ldots, a_N$ véges sok tag már nem ronthatja el az egész (a_n) sorozat korlátosságát.
Mivel (a_n) korlátos, ezért a Bolzano-Weierstrass kiválasztási tétel miatt van (a_{i_n}) konvergens részsorozata.
Legyen $\alpha := \lim a_{i_n}$. Megmutatjuk, hogy $a_n \to \alpha$.
Legyen $\underline{\varepsilon > 0 \text{ tetszőleges}}$. Mivel $a_{i_n} \to \alpha$, ezért az $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ hibakorláthoz $\exists N_2$, hogy $\forall n > N_2$ esetén $|a_{i_n} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$. Mivel (a_n) Cauchy-sorozat, ezért az $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ hibakorláthoz $\exists N_3$, hogy $\forall n > N_3$ és $i_n \geq n$ esetén $|a_{i_n} - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Legyen $\underline{N} := \max\{N_2, N_3\}$, és legyen $\underline{n > N \text{ tetszőleges.}}$ Ekkor

$$\underline{|a_n - \alpha|} = |a_n - a_{i_n} + a_{i_n} - \alpha| \leq |a_n - a_{i_n}| + |a_{i_n} - \alpha| \underline{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \underline{\varepsilon}.$$

Az aláhúzottak szerint $a_n \to \alpha$.

4.3.7. Divergens sorozatok

Egy (a_n) sorozatot divergensnek nevezünk, ha nem konvergens, azaz ha $\forall A \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists \varepsilon > 0$, hogy $\forall N \in \mathbb{N}$ küszöbindex után $\exists n > N$ olyan, hogy $|a_n - A| \geq \varepsilon$.
Divergens sorozat például az (n^2) és a $((-1)^n)$ sorozat is. Az (n^2) sorozathoz tágabb értelemben lehetőség lesz határértéket rendelni, míg a $((-1)^n)$ marad egy „rosszul" divergens sorozat.

4.11. Definíció. *Azt mondjuk, hogy (a_n) számsorozatnak $+\infty$* **a határértéke**, *ha $\forall K \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $\forall n > N$ esetén $a_n > K$.*
Ha (a_n) sorozat ilyen, akkor $\lim a_n = +\infty$.

4.12. Definíció. *Azt mondjuk, hogy (a_n) számsorozatnak $-\infty$* **a határértéke**, *ha $\forall K \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $\forall n > N$ esetén $a_n < K$.*
Ha (a_n) sorozat ilyen, akkor $\lim a_n = -\infty$.

Például $\lim n^2 = +\infty$ és $\lim(-n^2) = -\infty$.
A $+\infty$ vagy $-\infty$ határértékű sorozatokkal végzett műveletek (ilyenek összege, hányadosa) nagy körültekintést igényel.

4.4. Sorok $\boxed{\text{E}}$

4.4.1. Sor konvergenciája

4.13. Definíció. *Legyen (a_n) az összeadandók sorozata. Készítsük el az $(S_n) := (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ részletösszegek sorozatát. A $\sum a_n$* **végtelen sor** *legyen a részletösszegek sorozata, azaz $\sum a_n := (S_n)$.*

4.14. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a* $\sum a_n$ *végtelen sor* **konvergens**, *ha az* (S_n) *sorozat konvergens.* ($\sum a_n$ **divergens**, *ha az* (S_n) *divergens.)*
Ha az (S_n) *konvergens, akkor a* $\sum a_n$ **végtelen sor összegén** *a részletösszeg-sorozat határértékét értjük, azaz* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim S_n$.

Az alábbi tételt az $\boxed{\text{A}}$ részben már igazoltuk.

4.24. Tétel. *Ha* $\sum a_n$ *konvergens, akkor* $a_n \to 0$.

4.15. Definíció. *A* $\sum a_n$ **abszolút konvergens**, *ha* $\sum |a_n|$ *konvergens.*

4.25. Tétel. *Ha* $\sum a_n$ *abszolút konvergens, akkor* $\sum a_n$ *konvergens.*

Bizonyítás. Ha $\sum |a_n|$ konvergens, akkor $\underline{\forall \varepsilon > 0}$ $\underline{\exists N}$ $\underline{\forall n, m > N}$, $n > m$ esetén

$$||a_1| + |a_2| + \ldots + |a_m| + |a_{m+1}| + \ldots + |a_n| - (|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_m|)| =$$
$$= ||a_{m+1}| + \ldots + |a_n|| < \varepsilon.$$

Ekkor az $S_k := a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ $(k \in \mathbb{N})$ részletösszegekre

$$\underline{|S_n - S_m|} = |a_{m+1} + \ldots + a_n| \leq |a_{m+1}| + \ldots + |a_n| \underline{\leq \varepsilon}.$$

Az aláhúzottak éppen azt jelentik, hogy $\sum a_n$ konvergens.

4.4.2. Konvergenciakritériumok

4.26. Tétel. *(Majoráns kritérium)*
Legyen $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}^+$ *és* $\forall n \in \mathbb{N}$ *esetén* $a_n \leq b_n$. *Ekkor*

1^o *ha* $\sum b_n$ *konvergens, akkor* $\sum a_n$ *konvergens;*

2^o *ha* $\sum a_n$ *divergens, akkor* $\sum b_n$ *divergens.*

Bizonyítás. Legyen $s_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ és $t_n := b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, $n \in \mathbb{N}$. Az (s_n) és (t_n) szigorúan monoton növekedő.

1^o Ha $\sum b_n$ konvergens, akkor (t_n) konvergens. Ekkor $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $s_n \leq t_n < \lim t_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, tehát (s_n) korlátos is, ezért (s_n) konvergens, azaz $\sum a_n$ konvergens.

2^o Ha $\sum a_n$ divergens, akkor (s_n) felülről nem korlátos. Ekkor $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $t_n \geq s_n$ miatt (t_n) is felülről nem korlátos, amiből következik, hogy (t_n) nem konvergens (divergens), így $\sum b_n$ divergens.

Két elégséges feltételt adunk végtelen sor abszolút konvergenciájára (amelyből már következik a sor konvergenciája).

4.27. Tétel. *(Hányadoskritérium, D'Alembert)*
Legyen (a_n) *olyan sorozat, amelyhez* $\exists q \in (0, 1)$ *és* $\exists N \in \mathbb{N}$, *hogy* $\forall n > N$ *esetén* $|a_{n+1}/a_n| \leq q$. *Ekkor* $\sum a_n$ *abszolút konvergens.*

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}$. A feltételből

$$\begin{aligned}
|a_{N+2}/a_{N+1}| \le q \quad &\Rightarrow \quad |a_{N+2}| \le |a_{N+1}|q \\
|a_{N+3}/a_{N+2}| \le q \quad &\Rightarrow \quad |a_{N+3}| \le |a_{N+2}|q \le |a_{N+1}|q^2 \\
&\vdots \\
|a_{N+k}/a_{N+k-1}| \le q \quad &\Rightarrow \quad |a_{N+k}| \le |a_{N+k-1}|q \le \ldots \le |a_{N+1}|q^{k-1}.
\end{aligned}$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
S_{N+k} &= |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \ldots + |a_{N+k}| \le \\
&\le L + |a_{N+1}|q + |a_{N+1}|q^2 + \ldots + |a_{N+1}|q^{k-1} = \\
&= L + |a_{N+1}|(q + q^2 + \ldots + q^{k-1}) < L + |a_{N+1}|\frac{q}{1-q},
\end{aligned}$$

ahol $L := |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_{N+1}|$, és felhasználtuk, hogy $0 < q < 1$ esetén $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$.
Tehát (S_n) felülről korlátos, de monoton növekedő is, ezért (S_n) konvergens, ami azt jelenti, hogy $\sum |a_n|$ konvergens.

4.28. Tétel. *(Gyökkritérium, Cauchy)*
Legyen (a_n) olyan sorozat, amelyhez $\exists q \in (0,1)$ és $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n > N$ esetén $\sqrt[n]{|a_n|} \le q$. Ekkor $\sum a_n$ abszolút konvergens.

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}$. A feltételből

$$\begin{aligned}
\sqrt[N+1]{a_{N+1}|} \le q \quad &\Rightarrow \quad |a_{N+1}| \le q^{N+1} \\
\sqrt[N+2]{a_{N+2}|} \le q \quad &\Rightarrow \quad |a_{N+2}| \le q^{N+2} \\
&\vdots \\
\sqrt[N+k]{a_{N+k}|} \le q \quad &\Rightarrow \quad |a_{N+k}| \le q^{N+k}.
\end{aligned}$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
S_{N+k} &= |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \ldots + |a_{N+k}| \le \\
&\le L + q^{N+1} + q^{N+2} + \ldots + q^{N+k} = L + q^N(q + q^2 + \ldots + q^k) < \\
&< L + q^N \frac{q}{1-q},
\end{aligned}$$

ahol $L := |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_N|$, és felhasználtuk, hogy $0 < q < 1$ esetén $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$.
Tehát (S_n) felülről korlátos, de monoton növő is, ezért (S_n) konvergens, ami azt jelenti, hogy $\sum |a_n|$ konvergens.

Az alternáló sorokra vonatkozik a következő tétel.

4.29. Tétel. *(Leibniz)*
Legyen (a_n) monoton fogyó, $a_n \to 0$. Ekkor a $\sum(-1)^{n+1}a_n$ végtelen sor konvergens.

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$\begin{array}{ll} S_1 = a_1 & S_2 = a_1 - a_2 \\ S_3 = a_1 - a_2 + a_3 & S_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \\ \vdots & \vdots \\ S_{2k-1} = a_1 - a_2 + \ldots + a_{2k-1} & S_{2k} = a_1 - a_2 + \ldots + a_{2k-1} - a_{2k} \end{array}$$

Mivel $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \ldots \geq a_{2k-1} \geq a_{2k} \geq \ldots$, ezért

$$\begin{aligned} S_1 &\geq S_2 \\ S_3 &\geq S_4 \\ &\vdots \\ S_{2k-1} &\geq S_{2k}, \end{aligned}$$

másrészt $S_1 \geq S_3 \geq \ldots \geq S_{2k-1} \geq \ldots$ és $S_2 \leq S_4 \leq \ldots \leq S_{2k} \leq \ldots$ Látható, hogy az $([S_{2k}, S_{2k-1}])$ „egymásba skatulyázott” intervallumsorozat. Mivel $\lim(S_{2k-1} - S_{2k}) = \lim a_{2k} = 0$, mert $a_n \to 0$, ezért teljesülnek a Cantor közösrész tétel felételei, így $\exists A \in \mathbb{R}$, hogy $\lim S_{2k-1} = \lim S_{2k} = A$, sőt ez éppen azt jelenti, hogy $\lim S_n = A$. Tehát $\sum(-1)^{n+1}a_n$ konvergens és $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = A$.

A bizonyításból látszik, hogy $A \in [S_{2k}, S_{2k-1}]$, így

$$|S_{2k-1} - A| \leq a_{2k} \leq a_{2k-1} \text{ és } |S_{2k} - A| \leq a_{2k} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

azaz $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $|S_n - A| \leq a_n$. Ez hasznos lehet az alternáló sor összegének a becsléséhez.
Megjegyezzük, hogy $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ a Leibniz-tétel szerint konvergens, de nem abszolút konvergens, mert $\sum \frac{1}{n}$ divergens.

4.16. Definíció. *Azt mondjuk, hogy $\sum a_n$* **feltételesen konvergens***, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.*

4.4.3. Végtelen sorok átrendezései

4.17. Definíció. *A $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekciót (p kölcsönösen egyértelmű és $R(p) = \mathbb{N}$) a* **természetes számok permutációjá***nak nevezzük.*

Például a $3, 2, 1, 6, 5, 4, \ldots, 3k+3, 3k+2, 3k+1, \ldots$ sorozat egy permutációja a természetes számoknak.

4.18. Definíció. *Legyen $(a_n), (b_n)$ sorozat. Azt mondjuk, hogy (b_n) az (a_n) sorozat egy* **átrendezése***, ha $\exists(p_n)$ permutációja a természetes számoknak, hogy $(b_n) = (a_{p_n})$.*

Bizonyítás nélkül érvényesek a következő állítások.

4.30. Tétel. *Legyen* $\sum a_n$ *abszolút konvergens sor. Akkor* $\forall(p_n)$ *permutáció esetén* $\sum a_{p_n}$ *is abszolút konvergens, sőt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

E tétel szerint az abszolút konvergens sorok öröklik a véges sok szám összeadásánál teljesülő asszociativitást. Ezzel szemben a feltételesen konvergens sorok nagyon labilis képződmények.

4.31. Tétel. *Legyen* $\sum a_n$ *feltételesen konvergens sor.*

1^o $\forall A \in \mathbb{R}$ *számhoz* $\exists(p_n)$ *permutáció, hogy* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n} = A$.

2^o $\exists(p_n)$ *permutáció, hogy* $\sum a_{p_n}$ *divergens.*

5. fejezet

Folytonosság

A folytonosság a függvény lokális tulajdonsága. Azt fejezi ki, hogy egy a ponttól kicsit kimozdulva a függvényértékek az $f(a)$ függvényértéktől keveset térnek el. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk.

- Folytonos függvény fogalma
- Folytonosság és műveletek kapcsolata
- Intervallumon folytonos függvények tulajdonságai
- Egyenletes folytonosság

5.1. Folytonosság $\boxed{\text{A}}$

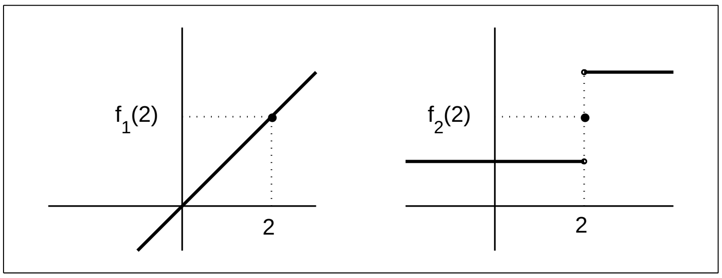
5.1.1. A folytonos függvény fogalma és tulajdonságai

Legyen $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f_1(x) := x$, $a := 2$. Egy másik függvény pedig legyen $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_2(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x < 2 \\ 2, & \text{ha } x = 2 \\ 3, & \text{ha } x > 2 \end{cases} \qquad \text{(5.1. ábra)}$$

Látható, hogy az f_1 függvény olyan, hogy ha x közel van az $a := 2$ ponthoz, akkor az $f_1(x) = x$ függvényértékek is közel lesznek az $f_1(2) = 2$ értékhez. Ugyanezt nem mondhatjuk el az f_2 függvényről. Akármilyen x számot veszünk is, amely közel van az $a = 2$ ponthoz ($x \neq 2$), az $f_2(x)$ függvényértékek elég távol lesznek az $f_2(2) = 2$ számtól (biztosan $\frac{1}{2}$-nél távolabb). Az f_1 függvény viselkedése nyomán fogalmazzuk meg a folytonosság fogalmát.

Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$, $a \in D(f)$. Azt mondjuk, hogy az f függvény **folytonos az a pontban**, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan $\delta > 0$ ingadozási lehetőség, hogy minden olyan esetben, amikor $x \in D(f)$ és $|x - a| < \delta$ (az x az a ponthoz δ-nál közelebb van), akkor $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ (az $f(x)$ függvényérték



5.1. ábra.

az $f(a)$-tól az ε hibahatáron belül tér csak el). Ezt a tulajdonságot $f \in C[a]$ jelölje.
Valóban $f_1 \in C[2]$, hiszen $\forall\varepsilon > 0$ számhoz $\delta := \varepsilon$ alkalmas, mert $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x-2| < \delta$ esetén $|f_1(x) - f_1(2)| = |x-2| < \varepsilon$. Az $f_2 \notin C[2]$, ugyanis például $\varepsilon := \frac{1}{2}$ esetén $\forall\delta > 0$ kijelölése mellett van olyan $x \in \mathbb{R}$, például az $x := 2 + \frac{\delta}{2}$, amelyre ugyan $|x-2| = \frac{\delta}{2} < \varepsilon$, de $|f_2(x) - f_2(2)| = |3-2| > \varepsilon$, ezért az f_2 függvény nem folytonos az $a := 2$ pontban.

a) A folytonos függvény hasznos tulajdonsága a **jeltartás**. Ez azt jelenti, hogy ha $f \in C[a]$ és $f(a) > 0$, akkor $\exists K(a) \subset D(f)$ környezet, hogy $\forall x \in K(a)$ esetén $f(x) > 0$, azaz $f(a)$ előjelét a környezetben felvett függvényértékek is öröklik. E tulajdonság belátásához elég a folytonosság definícióját $\varepsilon := \frac{f(a)}{2} > 0$ hibakorlátra végiggondolni, hiszen ehhez $\exists\delta > 0$, hogy $\forall x \in K_\delta(a)$ esetén $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$, azaz

$$0 < \frac{f(a)}{2} = f(a) - \varepsilon < f(x).$$

b) A folytonosság konvergens sorozatokkal is kapcsolatban van. Ha $f \in C[a]$ és $(x_n) \subset D(f)$ tetszőlegesen felvett olyan sorozat, amelyre $x_n \to a$, akkor $f(x_n) \to f(a)$, azaz az (x_n) sorozaton tekintett függvényértékek sorozata $f(a)$-hoz tart. Megfordítva is igaz: ha $\forall(x_n) \subset D(f)$, $x_n \to a$ esetén $f(x_n) \to f(a)$, akkor f folytonos az a pontban. A folytonosság ezt a fajta jellemzését a $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$ egyenlőség szimbolizálja.

5.1.2. A műveletek és a folytonosság kapcsolata

5.1. Tétel. *Ha $f \in C[a]$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda f \in C[a]$.*

5.2. Tétel. *Ha $f, g \in C[a]$, akkor $f + g \in C[a]$ és $f \cdot g \in C[a]$.*

5.3. Tétel. *Ha $f, g \in C[a]$ és $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g} \in C[a]$.*

5.4. Tétel. *Ha $g \in C[a]$, és $f \in C[g(a)]$, akkor $f \circ g \in C[a]$.*

Megjegyezzük, hogy a fordított állítások nem igazak. Például $f := \operatorname{sgn}$ és $g := -\operatorname{sgn}$ esetén $f+g$ az azonosan 0 függvény, amelyre nyilván $f+g = 0 \in C[0]$, de $f \notin C[0]$ és $g \notin C[0]$.

Az inverz függvény folytonossága csak igen szűk feltételekkel igaz.

5.5. Tétel. *Legyen $I \in \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton. Tegyük fel hogy az $a \in I$ pontban $f \in C[a]$. Legyen továbbá $b := f(a)$. Ekkor $f^{-1} \in C[b]$.*

d) Legyen $[a, b] \subset D(f)$. Az f függvény **folytonos az** $[a, b]$ **zárt intervallumon**, ha $\forall \alpha \in [a, b]$ esetén $f \in C[\alpha]$. Ezt jelöli az $f \in C[a, b]$.

5.1.3. Intervallumon folytonos függvények tulajdonságai

A korlátos, zárt intervallumon értelmezett folytonos függvénynek szép tulajdonságai vannak.

5.6. Tétel. *(Bolzano)*
Ha $f \in C[a, b]$ és $f(a) < 0,\ f(b) > 0$, akkor $\exists c \in (a, b)$, amelyre $f(c) = 0$.

Ez speciális esete a szintén Bolzano-tételnek nevezett állításnak.

5.7. Tétel. *Legyen $f \in C[a, b]$ és legyen d az $f(a)$ és $f(b)$ közötti tetszőleges szám. Ekkor $\exists c \in [a, b]$ olyan, hogy $d = f(c)$.*

Ez a tétel azt mondja, hogy egy intervallumon folytonos függvény ha felvesz két értéket, akkor e két szám közötti minden értéket is felvesz, ami azt jelenti, hogy egy intervallum folytonos képe intervallum.

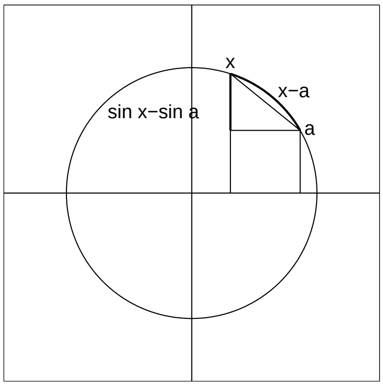
5.8. Tétel. *(Weierstrass)*
Ha $f \in C[a, b]$, akkor $\exists \alpha, \beta \in [a, b]$ olyan, hogy $\forall x \in [a, b]$

$$f(\alpha) \le f(x) \le f(\beta).$$

Ez a tétel azt mondja, hogy $f_{|[a,b]}$ korlátos (hiszen $f(\alpha)$ és $f(\beta)$ között van a függvény minden értéke), sőt van **minimuma** és van **maximuma** is az $f_{|[a,b]}$ függvénynek.
A Bolzano- és a Weierstrass-tétel következménye, hogy egy zárt, korlátos intervallum folytonos képe is zárt, korlátos intervallum.

5.2. Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy az $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) := \sqrt{x}$ függvény bármely $a \ge 0$ pontban folytonos.
   Megoldás: Először megmutatjuk, hogy ha $a := 0$, akkor $f \in C[0]$.
   Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor $\sqrt{x} < \varepsilon \ \Leftrightarrow x < \varepsilon^2$ miatt legyen $\delta := \varepsilon^2$.



5.2. ábra.

Ha $x \geq 0,\ x < \delta$, akkor $|f(x) - f(0)| = \sqrt{x} < \varepsilon$.
Most legyen $a > 0$. Nyilván $\forall x \geq 0$ esetén

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{a}| \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{|x-a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Tekintettel az előbbi egyenlőtlenségre, $\delta := \varepsilon \cdot \sqrt{a}$. Ekkor $\forall x \geq 0,\ |x - a| < \delta$ esetén

$$|f(x) - f(a)| = |\sqrt{x} - \sqrt{a}| \leq \frac{|x-a|}{\sqrt{a}} < \frac{\delta}{\sqrt{a}} = \varepsilon,$$

amely azt jelenti, hogy $f \in C[a]$.

2. Mutassuk meg, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := x^2$ függvény bármely $a \in \mathbb{R}$ pontban folytonos.
   Megoldás: Legyen $(x_n) \subset \mathbb{R},\ x_n \to a$ tetszőleges sorozat. Ekkor $f(x_n) = (x_n)^2 = x_n \cdot x_n \to a \cdot a = f(a)$.
   Mivel $\forall (x_n) \subset \mathbb{R},\ x_n \to a$ sorozat esetén $f(x_n) \to f(a)$, ezért az átviteli elv szerint $f \in C[a]$.

3. Mutassuk meg, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \sin x$ függvény bármely $a \in \mathbb{R}$ pontban folytonos.
   Megoldás: A szinuszfüggvény értelmezését felhasználva a 5.2 ábráról látszik a $|\sin x - \sin a| \leq |x-a|$ egyenlőtlenség $\forall a, x \in \mathbb{R}$ esetén. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ha $\delta := \varepsilon$, akkor $\forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \delta$ esetén $|f(x) - f(a)| = |\sin x - \sin a| \leq |x - a| < \varepsilon$, tehát $f \in C[a]$.

4. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 1, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

   Mutassa meg, hogy $f \in C[0]$.

5. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy van olyan $L > 0$ szám, hogy $\forall s, t \in D(f)$ esetén $|f(s) - f(t)| \leq L|s - t|$. Mutassuk meg, hogy $\forall a \in D(f)$ pontban $f \in C[a]$.

6. Mutassa meg, hogy az $x^5 + 4x - 3 = 0$ egyenletnek van megoldása a $[0, 1]$ intervallumon is.

7. Mutassuk meg, hogy ha $f \in C[a, b]$, f kölcsönösen egyértelmű függvény, akkor f szigorúan monoton az $[a, b]$ intervallumon.

5.3. Folytonosság $\boxed{E}$

5.3.1. A folytonosság fogalma és az átviteli elv

Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$, $a \in D(f)$.

5.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy f folytonos az a pontban, ha $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall x \in K_\delta(a) \cap D(f)$ esetén $f(x) \in K_\varepsilon(f(a))$. Jele: $f \in C[a]$.*

5.9. Tétel. *(Átviteli elv)*
$f \in C[a] \iff \forall (x_n) \subset D(f), x_n \to a$ *esetén* $f(x_n) \to f(a)$.

Bizonyítás. ($\Rightarrow$) Tegyük fel, hogy $f \in C[a]$, és legyen $(x_n) \subset D(f), x_n \to a$ tetszőleges sorozat.
Tekintsünk egy $\varepsilon > 0$ számot. Mivel $f \in C[a]$, ezért $\exists \delta > 0$ olyan, hogy $\forall x \in D(f)$, $|x - a| < \delta$ esetén $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Az $x_n \to a$ miatt ehhez a $\delta > 0$ számhoz $\exists N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $\forall n > N$ esetén $|x_n - a| < \delta$, de ekkor $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$. Ez éppen azt jelenti, hogy $f(x_n) \to f(a)$.

($\Leftarrow$) Most tegyük fel, hogy $\forall (x_n) \subset D(f), x_n \to a$ esetén $f(x_n) \to f(a)$, de (indirekt módon) $f \notin C[a]$. Ez azt jelentené, hogy $\exists \varepsilon > 0$ $\forall \delta > 0$ esetén $\exists x_\delta \in D(f)$, $x_\delta \in K_\delta(a)$, de $f(x_\delta) \notin K_\varepsilon(f(a))$. Speciálisan: $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\delta := \frac{1}{n}$. Ekkor $\exists x_n \in D(f)$, $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ olyan, hogy $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$. Tekintsük az így nyert $(x_n) \subset D(f)$ sorozatot. Mivel $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$, ezért $x_n \to a$. Ugyanakkor az $(f(x_n))$ sorozat határértéke nem lehet $f(a)$, hiszen $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$. Ez ellentmond feltételünknek, tehát $f \in C[a]$.

5.3.2. Műveletek folytonos függvényekkel

5.10. Tétel. *Ha $f \in C[a]$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda f \in C[a]$.*

Bizonyítás. Legyen $(x_n) \subset D(\lambda f) = D(f)$, amelyre $x_n \to a$. Mivel $f \in C[a]$, ezért $f(x_n) \to f(a)$, amiből következik, hogy

$$(\lambda f)(x_n) = \lambda f(x_n) \to \lambda f(a) = (\lambda f)(a).$$

Tehát $\lambda f \in C[a]$.

5.11. Tétel. *Ha $f, g \in C[a]$, akkor $f + g \in C[a]$ és $f \cdot g \in C[a]$.*

Bizonyítás. Legyen $(x_n) \subset D(f+g) = D(f) \cap D(g)$, amelyre $x_n \to a$. Mivel $f, g \in C[a]$, ezért $f(x_n) \to f(a)$ és $g(x_n) \to g(a)$, amiből következik, hogy

$$(f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to f(a) + g(a) = (f+g)(a).$$

Tehát $f + g \in C[a]$. (Szorzatra hasonlóan.)

5.12. Tétel. *Ha $g \in C[a]$ és $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{1}{g} \in C[a]$.*

Bizonyítás. Legyen $g(a) > 0$. Ekkor $\exists K(a) \subset D(g)$, hogy $\forall x \in K(a)$ esetén $g(x) > 0$.
Legyen $(x_n) \subset D(g)$ amelyre $x_n \to a$. Nyilván $\exists n \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n > N$ esetén $x_n \in K(a)$, így $g(x_n) > 0$. Az ilyen n-ekre

$$\frac{1}{g}(x_n) = \frac{1}{g(x_n)} \to \frac{1}{g(a)} = \frac{1}{g}(a),$$

tehát $\frac{1}{g} \in C[a]$.

5.13. Tétel. *Ha $f, g \in C[a]$, $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g} \in C[a]$.*

Bizonyítás. Mivel

$$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g} \quad \text{és} \quad f, \frac{1}{g} \in C[a], \quad \text{ezért} \quad \frac{f}{g} \in C[a].$$

5.14. Tétel. $g \in C[a], \ f \in C[g(a)] \Rightarrow f \circ g \in C[a]$.

Bizonyítás. Legyen $(x_n) \subset D(f \circ g) \subset D(g)$, amelyre $x_n \to a$. Ekkor $(f \circ g)(x_n) = f(g(x_n))) \to f(g(a)) = (f \circ g)(a)$, hiszen $(g(x_n)) \subset D(f)$ és $g(x_n) \to g(a)$. Tehát $f \circ g \in C[a]$.

5.3.3. Intervallumon folytonos függvények tulajdonságai

5.2. Definíció. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A \subset D(f)$. Azt mondjuk, hogy f* **folytonos az** *A* **halmazon**, *ha $\forall u \in A$ esetén $f \in C[u]$. Jele: $f \in C(A)$.*

5.15. Tétel. *(Bolzano 1.)*
Legyen $f \in C[a, b]$, $f(a) < 0$ és $f(b) > 0$. Ekkor $\exists c \in [a, b]$, hogy $f(c) = 0$.

Bizonyítás. Tekintsük az $[a, b]$ intervallum $\frac{a+b}{2}$ felezőpontját. Három eset lehetséges:

vagy $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, ekkor $c := \frac{a+b}{2}$;

vagy $f(\frac{a+b}{2}) > 0$, ekkor $a_1 := a, \ b_1 := \frac{a+b}{2}$;

vagy $f(\frac{a+b}{2}) < 0$, ekkor $a_1 := \frac{a+b}{2}$, $b_1 := b$.

A következő lépésben az $[a_1, b_1]$ intervallum $\frac{a_1+b_1}{2}$ felezőpontját készítjük el. Ismét három eset lehetséges:

vagy $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = 0$, ekkor $c := \frac{a_1+b_1}{2}$;

vagy $f(\frac{a_1+b_1}{2}) > 0$, ekkor $a_2 := a_1$, $b_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$;

vagy $f(\frac{a_1+b_1}{2}) < 0$, ekkor $a_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$, $b_2 := b_1$.

A felezési eljárást folytatva valamelyik lépésben eljutunk a c zérushelyhez, vagy kapunk egy (a_n) és egy (b_n) sorozatot, amelyre

$$[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \ldots \supset [a_n,b_n] \supset [a_{n+1},b_{n+1}] \supset \ldots,$$

továbbá

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2},\ b_2 - a_2 = \frac{b_1-a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}, \ldots,\ b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, \ldots,$$

amelyből következik, hogy $\lim(b_n - a_n) = 0$. A Cantor-féle közösrész tétel szerint egyértelműen $\exists c \in [a,b]$, amelyre $\cap_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n] = \{c\}$, azaz $\lim a_n = \lim b_n = c$. Mivel $f \in C[c]$, és $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $f(a_n) < 0$, ezért $f(a_n) \to f(c) \le 0$. Másrészt $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $f(b_n) > 0$, ezért $f(b_n) \to f(c) \ge 0$. Ebből csak $f(c) = 0$ lehetséges.

5.16. Tétel. *(Bolzano 2.)*
Legyen $f \in C[a,b]$ és $d \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges $f(a)$ és $f(b)$ közé eső szám. Ekkor $\exists c \in [a,b]$, amelyre $f(c) = d$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f(a) < f(b)$ és $f(a) < d < f(b)$. Tekintsük a $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\phi(t) := f(t) - d$ függvényt. $\phi \in C[a,b]$, $\phi(a) = f(a) - d < 0$, $\phi(b) = f(b) - d > 0$. A Bolzano 1. tétel szerint $\exists c \in (a,b)$, amelyre $\phi(c) = 0$. Mivel $0 = \phi(c) = f(c) - d$, ezért $f(c) = d$.

5.17. Tétel. *(Weierstrass 1.)*
Legyen $f \in C[a,b]$. Ekkor $f_{|_{[a,b]}}$ korlátos függvény.

Bizonyítás. Indirekt módon, tegyük fel, hogy például $f_{|_{[a,b]}}$ felülről nem korlátos. Ekkor $\forall n \in \mathbb{N}$ számhoz $\exists x_n \in [a,b]$ olyan, hogy $f(x_n) > n$. Nyilván $(x_n) \subset [a,b]$, tehát (x_n) korlátos sorozat, ezért a Bolzano–Weierstrass-tétel szerint $\exists (i_n)$ indexsorozat, hogy $(x_{i_n}) \subset [a,b]$ konvergens. Legyen $\lim x_{i_n} =: \alpha \in [a,b]$. Az $f \in C[\alpha]$ és $x_{i_n} \to \alpha$, ezért $f(x_{i_n}) \to f(\alpha)$. Az (i_n) szigorúan monoton növekedő, ezért $i_n \ge n$, ezért $f(x_{i_n}) > i_n \ge n$ $(n \in \mathbb{N})$. Tehát $(f(x_{i_n}))$ felülről nem korlátos sorozat, ami ellentmond annak, hogy $f(x_{i_n}) \to f(\alpha)$. Ellentmondásra jutottunk, tehát hamis az indirekt feltevés, azaz $f_{|_{[a,b]}}$ korlátos.

5.18. Tétel. *(Weierstrass 2.)*
Legyen $f \in C[a,b]$. Ekkor $\exists \alpha, \beta \in [a,b]$, hogy $\forall x \in [a,b]$ esetén $f(\alpha) \le f(x) \le f(\beta)$.

Bizonyítás. Az $f_{|_{[a,b]}}$ korlátos, ezért az $\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ halmaz korlátos, így $\exists \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\} =: M$. Megmutatjuk, hogy az $M \in \mathbb{R}$ számot a függvény fel is veszi. A halmaz felső határának tulajdonságai szerint

1^o $\forall x \in [a,b]$ esetén $f(x) \leq M$;

2^o $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $\exists x_n \in [a,b]$, hogy $f(x_n) > M - \frac{1}{n}$.

Az $(x_n) \subset [a,b]$, korlátos sorozat, ezért $\exists (i_n)$ indexsorozat, hogy (x_{i_n}) konvergens. Legyen $\lim x_{i_n} =: \beta \in [a,b]$. Ekkor $M - \frac{1}{i_n} < f(x_{i_n}) \leq M$ $(n \in \mathbb{N})$. A közrefogási elv szerint (mivel $i_n \geq n$, így $\frac{1}{i_n} \to 0$) $f(x_{i_n}) \to M$. Másrészt $f \in C[\beta]$ miatt $f(x_{i_n}) \to f(\beta)$. A sorozat határértéke egyértelmű, ezért $f(\beta) = M$.

Hasonlóan látható be az $\alpha \in [a,b]$ létezése is.

5.3.4. Az inverzfüggvény folytonossága

Ezekre a tételekre hivatkozva foglalkozhatunk egy függvény inverzének a folytonosságával. Megjegyezzük, hogy ha $f \in C[a]$, $b := f(a)$ és $\exists f^{-1}$ inverzfüggvény, akkor még lehet, hogy f^{-1} nem folytonos a b pontban. Ezt a helyzetet jól szemlélteti az
$f : (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} x+1, & \text{ha } x < -1, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ x-1, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

függvény, amely folytonos a 0-ban, $f(0) = 0$, van is inverze a függvénynek: $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f^{-1}(x) := \begin{cases} x-1, & \text{ha } x < 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ x+1, & \text{ha } x > 0, \end{cases}$$

de $f^{-1} \notin C[0]$.

5.19. Tétel. *Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in C[a,b]$, f szigorúan monoton. Ekkor $f^{-1} \in C(R(f))$.*

Bizonyítás. Az $f \in C[a,b]$, ezért a Bolzano- és a Weierstrass-tétel következményeként $R(f)$ zárt, korlátos intervallum. Legyen $[c,d] := R(f)$. Az f szigorúan monoton, ezért kölcsönösen egyértelmű, tehát $\exists f^{-1} : [c,d] \to [a,b]$. Legyen $v \in [c,d]$ tetszőleges, $u := f^{-1}(v)$, és legyen $(y_n) \subset [c,d]$, $y_n \to v$ tetszőleges sorozat. Az f^{-1} inverzfüggvény v pontbeli folytonosságához (az átviteli elv szerint) elég belátni, hogy az $x_n := f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(v) = u$. Indirekt módon, tegyük fel, hogy $(x_n) \subset [a,b]$ sorozat nem tart u-hoz. Ekkor $\exists \delta > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists n_k > k$, amelyre $|x_{n_k} - u| \geq \delta$. Az $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset [a,b] \setminus [u-\delta, u+\delta]$ sorozat korlátos, ezért van konvergens részsorozata: $(x_{n_{k_l}})$. Legyen $\alpha := \lim x_{n_{k_l}}$. Nyilván $\alpha \in [a,b]$, de $\alpha \neq u$. Az $f \in C[\alpha]$, ezért

$$f(x_{n_{k_l}}) = y_{n_{k_l}} \to f(\alpha).$$

Az $(y_{n_{k_l}})$ részsorozata a v-hez tartó (y_n) sorozatnak, ezért $f(\alpha) = v$. Figyelembe véve, hogy $f(u) = v$, ellentmondásra jutottunk f kölcsönös egyértelműségével, tehát hamis az indirekt feltétel, azaz $x_n \to u$, így $f^{-1} \in C[v]$.

5.3.5. Egyenletes folytonosság

5.3. Definíció. *Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$, $B \subset D(f)$. Azt mondjuk, hogy f egyenletesen folytonos a B halmazon, ha $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, hogy $\forall x', x'' \in B$, $|x' - x''| < \delta$ esetén $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.*

5.20. Tétel. *Ha f egyenletesen folytonos a B halmazon, akkor $f \in C(B)$.*

Bizonyítás. Legyen $b \in B$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Az f egyenletesen folytonos a B halmazon, ezért $\exists \delta > 0$, hogy $\forall x \in B$ esetén, amelyre $|x - b| < \delta$, teljesül, hogy $|f(x) - f(b)| < \varepsilon$. Ez éppen azt jelenti, hogy $f \in C(B)$.

Megjegyezzük, hogy ha $f \in C(B)$, akkor még lehet, hogy f nem egyenletesen folytonos a B halmazon. Ugyanis, az $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$ függvény a $B := \mathbb{R}^+$ minden pontjában folytonos, de nem egyenletesen folytonos a B halmazon. Ennek igazolásához legyen $\varepsilon := \frac{1}{2}$ és $\delta > 0$ tetszőleges. Nyilván $\exists n \in \mathbb{N}$, amelyre $n > \frac{1}{2\delta}$. Legyen $x' := n$ és $x'' := n + \frac{\delta}{2}$. Ekkor $|x' - x''| = \frac{\delta}{2} < \delta$, de

$$|f(x') - f(x'')| = \left(n + \frac{\delta}{2}\right)^2 - n^2 = n\delta + \frac{\delta^2}{4} > n\delta > \frac{1}{2\delta} \cdot \delta = \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Mivel $\exists \varepsilon > 0$, hogy $\forall \delta > 0$ esetén találtunk olyan $x', x'' \in \mathbb{R}^+$ számokat, amelyekre ugyan $|x' - x''| < \delta$, de $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$, ezért ez a folytonos f függvény nem egyenletesen folytonos az $\mathbb{R}^+$ halmazon.

5.21. Tétel. *(Heine)*
Ha $f \in C[a, b]$, akkor f egyenletesen folytonos az $[a, b]$ intervallumon.

Bizonyítás. Indirekt módon, tegyük fel, hogy f nem egyenletesen folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon. Ekkor $\exists \varepsilon > 0$, hogy $\forall \delta > 0$ számhoz $\exists x', x'' \in [a, b]$, amelyekre ugyan $|x' - x''| < \delta$, de $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$. Legyen $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $\delta := \frac{1}{n}$. Akkor ehhez a δ-hoz is $\exists x'_n, x''_n \in [a, b]$, amelyekre $|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}$, de $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon$.

Vizsgáljuk meg az (x'_n) és (x''_n) sorozatokat! Mivel $(x'_n) \subset [a, b]$, ezért $\exists (i_n)$ indexsorozat, hogy (x'_{i_n}) konvergens. Legyen $\lim x'_{i_n} =: \alpha \in [a, b]$. Megmutatjuk, hogy ugyanezzel az (i_n) indexsorozattal az (x''_{i_n}) részsorozat is konvergens, sőt $\lim x''_{i_n} = \alpha$. Ugyanis $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|x''_{i_n} - \alpha| \leq |x''_{i_n} - x'_{i_n}| + |x'_{i_n} - \alpha| < \frac{1}{i_n} + |x'_{i_n} - \alpha|.$$

Mivel $\frac{1}{i_n} \to 0$, $|x'_{i_n} - \alpha| \to 0$, ezért összegük is 0-hoz tart, ezért $|x''_{i_n} - \alpha| \to 0$.

Tehát $x'_{i_n} \to \alpha$, $x''_{i_n} \to \alpha$, ezért $f \in C[\alpha]$ miatt $f(x'_{i_n}) \to f(\alpha)$ és $f(x''_{i_n}) \to f(\alpha)$, amelyből

$$f(x'_{i_n}) - f(x''_{i_n}) \to 0$$

következik. Ez azonban lehetetlen, hiszen $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon$. Az ellentmondás azt jelenti, hogy hamis az indirekt feltevés, tehát igaz az állítás.

6. fejezet

Függvény határértéke

Egy függvény határértéke az a pontban A, ha az a-hoz közeli helyeken a függvény A-hoz közeli értékeket vesz fel. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk.

- Függvény határérték fogalma
- Határérték és műveletek kapcsolata
- Végtelenbeli és végtelen határérték
- Egyoldali határérték
- Monoton függvény határértéke

6.1. Függvény határértéke $\boxed{\text{A}}$

6.1.1. "Végesben vett, véges" határérték

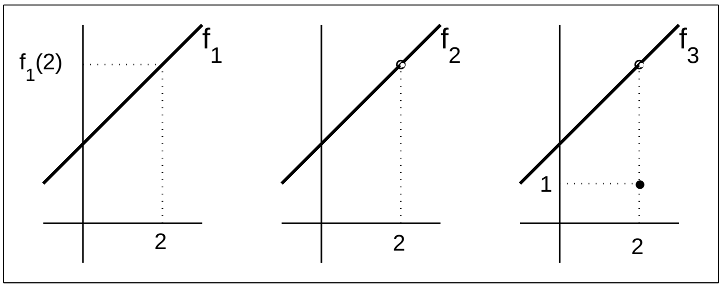
Vizsgáljunk meg három, egymáshoz nagyon hasonló függvényt.
Legyen

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f_1(x) := x + 2,$$

$$f_2 : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \quad f_2(x) := \tfrac{x^2-4}{x-2} = \tfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2,$$

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f_3(x) := \begin{cases} x+2, & \text{ha } x \neq 2 \\ 1, & \text{ha } x = 2. \end{cases} \qquad \text{(6.1. ábra)}$$

A függvények $a := 2$ pont körüli viselkedésére vagyunk kíváncsiak. Az f_1 folytonos a 2 pontban, ami azt jelenti, hogy ha x közel van a 2-höz, akkor az $f_1(x) = x + 2$ értékek közel esnek a 4-hez, amely éppen $f_1(2)$.
Az f_2 függvény ugyan nincs értelmezve a 2-ben, de ha x közel van a 2-höz, az $f_2(x) = x+2$ értékek egy szám, ebben az esetben a 4 körül keveset ingadoznak.
Az f_3 függvény a 2-ben is értelmezve van. Ha x közel van a 2-höz (de $x \neq 2$),



6.1. ábra.

akkor az $f_3(x) = x + 2$ értékek (az f_1 és f_2 függvényhez hasonlóan) a 4 körül keveset ingadoznak (függetlenül attól, hogy $f(2) = 1$).

A példákban tapasztalt jelenségek nyomán alakítjuk ki a függvény határértékének fogalmát.
Olyan $f : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$ függvényeket vizsgálunk, melyek $D(f)$ értelmezési tartományában az $a \in \mathbb{R}$ ponthoz tetszőlegesen közel is vannak attól különböző pontok (esetleg $a \notin D(f)$).

6.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban van határértéke, ha van olyan $A \in \mathbb{R}$ szám, hogy bármely $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan $\delta > 0$ ingadozási lehetőség, hogy minden olyan $x \in D(f)$ pontban, amely δ-nál közelebb van az a-hoz ($|x - a| < \delta$), de $x \neq a$, az $f(x)$ függvényértékek az ε hibakorlátnál kevesebbel térnek el A-tól ($|f(x) - A| < \varepsilon$).*

Az f függvénynek ezt a tulajdonságát a

$$\lim_a f = A;$$
$$\lim_{x \to a} f(x) = A;$$
$$\text{ha } x \to a, \text{ akkor } f(x) \to A$$

jelölések valamelyikével fejezzük ki.
Ha összevetjük az f függvény határértékének fogalmát a folytonosság értelmezésével, akkor látható, hogy $\lim_a f = A$ éppen azt jelenti, hogy az f függvény helyett egy

$$\tilde{f} : D(f) \cup \{a\} \to \mathbb{R},\ \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \neq a \\ A, & \text{ha } x = a \end{cases}$$

függvényt tekintve, az $\tilde{f}$ függvény az a pontban folytonos lesz. Más szóval, akkor van határértéke az f függvénynek az a pontban, ha folytonossá tehető az a-ban. Ezért, ha $a \in D(f)$, és létezik a $\lim_a f$, akkor az f függvény pontosan akkor folytonos az a pontban, ha $\lim_a f = f(a)$.

Ebből az észrevételből fakad, hogy a határértékkel végzett műveletek visszavezethetők a folytonos függvényekkel végzett műveletekre.

6.1. Tétel. *Ha* $\lim\limits_a f = A$ *és* $\lambda \in \mathbb{R}$, *akkor* $\lim\limits_a \lambda f = \lambda A$.

6.2. Tétel. *Ha* $\lim\limits_a f = A$ *és* $\lim\limits_a g = B$, *akkor* $\lim\limits_a (f+g) = A + B$.

6.3. Tétel. *Ha* $\lim\limits_a f = A$ *és* $\lim\limits_a g = B$, *akkor* $\lim\limits_a f \cdot g = AB$.

6.4. Tétel. *Ha* $\lim\limits_a g = B$ *és* $B \neq 0$, *akkor* $\lim\limits_a \frac{1}{g} = \frac{1}{B}$.

6.5. Tétel. *Ha* $\lim\limits_a f = A$ *és* $\lim\limits_a g = B$, $B \neq 0$, *akkor* $\lim\limits_a \frac{f}{g} = \frac{A}{B}$.

6.6. Tétel. *Ha* $\lim\limits_a g = B$ *és* $f \in C[b]$, *akkor* $\lim\limits_a f \circ g = f(b)$.

(A tételekben szereplő feltételeknek és állításnak is értelmesnek kell lennie, ezeket az $\boxed{\mathrm{E}}$ részben pontosan is megfogalmazzuk.)

6.1.2. "Végtelenben vett", illetve "nem véges" határérték

Látszik, hogy a határérték fogalma a függvényértékek változásának tendenciáját tartja szem előtt. Az úgynevezett „véges helyen vett véges határérték” fogalmát (ezzel foglalkoztunk eddig) kiterjeszthetjük. Tekintsük át ezeket a lehetőségeket: Legyen $f : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$.

1^o Ha $D(f)$ felülről nem korlátos halmaz, és van olyan $A \in \mathbb{R}$, hogy bármely $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan $\omega \in \mathbb{R}$ küszöbszám, hogy minden $x > \omega$, $x \in D(f)$ pontban $|f(x) - A| < \varepsilon$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke $(+\infty)$-ben A.
Jele: $\lim_{+\infty} f = A$ vagy $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$ vagy $x \to +\infty$ esetén $f(x) \to A$.
Például $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

2^o Ha $D(f)$ alulról nem korlátos halmaz, és van olyan $A \in \mathbb{R}$, hogy bármely $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan $\omega \in \mathbb{R}$ küszöbszám, hogy minden $x < \omega$, $x \in D(f)$ pontban $|f(x) - A| < \varepsilon$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke $(-\infty)$-ben A.
Jele: $\lim_{-\infty} f = A$ vagy $\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$ vagy $x \to -\infty$ esetén $f(x) \to A$.
Például $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$.

3^o Ha $a \in \mathbb{R}$ és a $D(f)$ értelmezési tartományban az a-hoz akármilyen közel is található pont az a ponton kívül is, és teljesül, hogy bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $\delta > 0$ ingadozási lehetőség, hogy minden $x \in D(f)$, $x \neq a$, de $|x - a| < \delta$ pontban $f(x) > K$, akkor azt mondjuk, hogy az f határértéke az a-ban $+\infty$.
Jele: $\lim_a f = +\infty$ vagy $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ vagy $x \to a$ esetén $f(x) \to +\infty$.
Például $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

4^o Ha $a \in \mathbb{R}$ és a $D(f)$ értelmezési tartományban az a-hoz akármilyen közel is található pont az a ponton kívül is, és teljesül, hogy bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $\delta > 0$ ingadozási lehetőség, hogy minden $x \in D(f)$, $x \neq a$, de $|x - a| < \delta$ pontban $f(x) < K$, akkor azt mondjuk, hogy az f határértéke az a-ban $-\infty$.
Jele: $\lim_a f = -\infty$ vagy $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ vagy $x \to a$ esetén $f(x) \to -\infty$.
Például $\lim_{x\to 0}(-\frac{1}{x^2}) = -\infty$.

5^o Ha $D(f)$ felülről nem korlátos, és bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $\omega \in \mathbb{R}$ küszöbszám, hogy minden $x > \omega$, $x \in D(f)$ pontban $f(x) > K$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke $(+\infty)$-ben $+\infty$.
Jele: $\lim_{+\infty} f = +\infty$ vagy $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ vagy $x \to +\infty$ esetén $f(x) \to +\infty$.
Például $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

6^o Ha $D(f)$ alulról nem korlátos, és bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $\omega \in \mathbb{R}$ küszöbszám, hogy minden $x < \omega$, $x \in D(f)$ pontban $f(x) > K$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke $(-\infty)$-ben $+\infty$.
Jele: $\lim_{-\infty} f = +\infty$ vagy $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ vagy $x \to -\infty$ esetén $f(x) \to +\infty$.
Például $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.

7^o Ha $D(f)$ felülről nem korlátos, és bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $\omega \in \mathbb{R}$ küszöbszám, hogy minden $x > \omega$, $x \in D(f)$ pontban $f(x) < K$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke $(+\infty)$-ben $-\infty$.
Jele: $\lim_{+\infty} f = -\infty$ vagy $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ vagy $x \to +\infty$ esetén $f(x) \to -\infty$.
Például $\lim_{x\to+\infty}(-x^2) = -\infty$.

8^o Ha $D(f)$ alulról nem korlátos, és bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $\omega \in \mathbb{R}$ küszöbszám, hogy minden $x < \omega$, $x \in D(f)$ pontban $f(x) < K$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke $(-\infty)$-ben $-\infty$.
Jele: $\lim_{-\infty} f = -\infty$ vagy $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ vagy $x \to -\infty$ esetén $f(x) \to -\infty$.
Például $\lim_{x\to-\infty}(-x^2) = -\infty$.

A sorozatok olyan függvények, amelyek értelmezési tartománya $\mathbb{N}$. Az $\mathbb{N}$ felülről nem korlátos, ezért az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvénynek, azaz az (a_n) sorozatnak vizsgálható a határértéke $(+\infty)$-ben. Összevetve az $a_n \to A$ vagy $a_n \to +\infty$ vagy $a_n \to -\infty$ definícióját a függvény $(+\infty)$-beli határértékének meghatározásaival, azt kapjuk, hogy

$$\lim a_n = A \Longleftrightarrow \lim_{+\infty} a = A$$
$$\lim a_n = +\infty \Longleftrightarrow \lim_{+\infty} a = +\infty$$
$$\lim a_n = -\infty \Longleftrightarrow \lim_{-\infty} a = -\infty.$$

6.1.3. Egyoldali határérték

Előfordul, hogy az $a \in \mathbb{R}$ pont tetszőleges közelségében, a-tól jobbra és balra is van értelmezési tartománybeli pont, de az f függvénynek nincs határértéke az a-ban. Néha ilyenkor is mondhatunk valamit a függvény viselkedéséről.

9^o Ha az $a \in \mathbb{R}$ olyan, hogy a-hoz tetszőlegesen közel is van $x \in D(f)$, $x > a$ pont és van olyan $A \in \mathbb{R}$ szám, hogy bármely $\varepsilon > 0$ hibakorlát esetén van olyan $\delta > 0$ ingadozási lehetőség, hogy minden $x \in D(f)$, $a < x < a + \delta$ pontban $|f(x) - A| < \varepsilon$, akkor azt mondjuk, hogy f-nek az a-beli jobb oldali határértéke A.
Jele: $\lim_{a+0} f = A$ vagy $\lim_{x \to a+0} f(x) = A$. Néha $f(a + 0)$ jelöli az f függvény a-beli jobb oldali határértékét. [Hagyományosan $a = 0$ esetén „$0 + 0$" helyett csak „$0+$" áll mindenütt.]
Például az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \geq 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

függvénynek 0-ban nincs határértéke, de $\lim_{x \to 0+} f(x) = 1$ vagy $f(0+) = 1$.]

10^o Ha az $a \in \mathbb{R}$ olyan, hogy a-hoz tetszőlegesen közel is van $x \in D(f)$, $x > a$ pont, és bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $\delta > 0$ ingadozási lehetőség, hogy minden $x \in D(f)$, $a < x < a + \delta$ esetén $f(x) > K$, akkor azt mondjuk, hogy az f jobb oldali határértéke a-ban $+\infty$.
Jele: $\lim_{a+0} f = +\infty$ vagy $\lim_{x \to a+0} f(x) = +\infty$.
Például nem létezik a $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$, de $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$.

11^o Ha az $a \in \mathbb{R}$ olyan, hogy a-hoz tetszőlegesen közel is van $x \in D(f)$, $x > a$ pont, és bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $\delta > 0$ ingadozási lehetőség, hogy minden $x \in D(f)$, $a < x < a + \delta$ esetén $f(x) < K$, akkor azt mondjuk, hogy az f jobb oldali határértéke a-ban $-\infty$.
Jele: $\lim_{a+0} f = -\infty$ vagy $\lim_{x \to a+0} f(x) = -\infty$.
Például nem létezik a $\lim_{x \to 0}(-\frac{1}{x})$, de $\lim_{x \to 0+}(-\frac{1}{x}) = -\infty$.

12^o Ha az $a \in \mathbb{R}$ olyan, hogy a-hoz tetszőlegesen közel is van $x \in D(f)$, $x < a$ pont, és van olyan $A \in \mathbb{R}$, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan $\delta > 0$ ingadozási lehetőség, hogy minden $x \in D(f)$, $a - \delta < x < a$ pontban $|f(x) - A| < \varepsilon$, akkor azt mondjuk, hogy az f bal oldali határértéke az a-ban A.
Jele: $\lim_{a-0} f = A$ vagy $\lim_{x \to a-0} f(x) = A$. Néha $f(a - 0)$ jelöli az f a-beli bal oldali határértékét. [Hagyományosan $a = 0$ esetén „$0 - 0$" helyett „$0-$" áll mindenütt.
Például a 9^o definíció utáni példában $\lim_{x \to 0-} f(x) = -1$ vagy $f(0-) = -1$.]

13^o Ha az $a \in \mathbb{R}$ olyan, hogy a-hoz tetszőlegesen közel is van $x \in D(f)$, $x < a$ pont, és bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $\delta > 0$ ingadozási lehetőség, hogy minden $x \in D(f)$, $a - \delta < x < a$ pontban $f(x) > K$, akkor azt

mondjuk, hogy f bal oldali határértéke az a-ban $+\infty$.
Jele: $\lim_{a-0} f = +\infty$ vagy $\lim_{x\to a-0} f(x) = +\infty$.
Például $\lim_{x\to 0-}(-\frac{1}{x}) = +\infty$.

14^o Ha az $a \in \mathbb{R}$ olyan, hogy a-hoz tetszőlegesen közel is van $x \in D(f)$, $x < a$ pont, és bármely $K \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $\delta > 0$ ingadozási lehetőség, hogy minden $x \in D(f)$, $a - \delta < x < a$ pontban $f(x) < K$, akkor azt mondjuk, hogy f bal oldali határértéke az a-ban $-\infty$.
Jele: $\lim_{a-0} f = -\infty$ vagy $\lim_{x\to a-0} f(x) = -\infty$.
Például $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Ikonszerűen összefoglaljuk a határérték eseteket (6.2. ábra).

Az egyoldali határértékek és a határérték kapcsolata is megfogalmazható: Ha létezik a $\lim_{a-0} f$ és a $\lim_{a+0} f$ is, és $\lim_{a-0} f = \lim_{a+0} f$, akkor van határértéke az f függvénynek az a-ban, és

$$\lim_{a} f = \lim_{a-0} f = \lim_{a+0} f.$$

Megjegyezzük, hogy ha az $a \in \mathbb{R}$ olyan, hogy csak az egyik oldali határérték vethető fel az a-ban, és ez a határérték létezik is, akkor ez éppen az f függvény a-beli határértéke lesz.

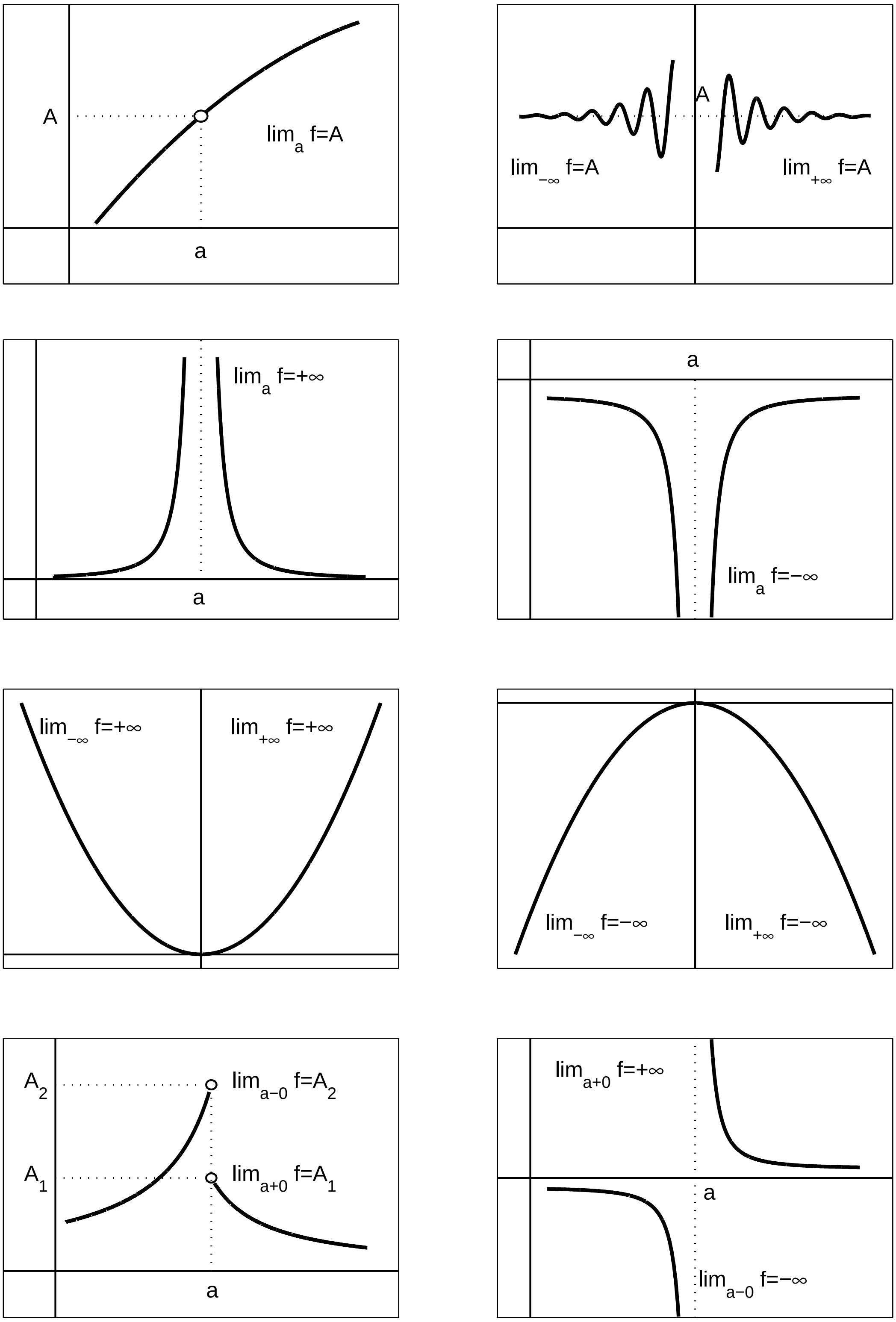
6.2. Feladatok

1. $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-x-6}{x^2-x-2} = ?$ $\lim_{x\to \infty} \frac{2x^2-x-6}{x^2-x-2} = ?$
2. $\lim_{x\to 1} \frac{x^4-2x^2-3}{x^2-3x+2} = ?$ $\lim_{x\to 2-0} \frac{x^4-2x^2-3}{x^2-3x+2} = ?$ $\lim_{x\to 2+0} \frac{x^4-2x^2-3}{x^2-3x+2} = ?$
3. $\lim_{x\to 1}(\frac{3}{1-x^3} - \frac{2}{1-x^2}) = ?$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = ?$ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = ?$ $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg} 2x}{x} = ?$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = ?$ $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg} x - \sin x}{x^3} = ?$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = ?$ $\lim_{x\to 0} \frac{2^x-1}{x} = ?$
7. $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sh}(x+2)}{\mathrm{sh}(x-2)} = ?$
8. $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+2x-3} = ?$

   $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+2x-3} = ?$
9. Van-e olyan $k \in \mathbb{R}$, hogy létezzen a

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 9x^2 + kx - 27}{x^2 - 6x + 9}$$

   és valós szám legyen a határérték?


A
$\lim_a f=A$
a
A
$\lim_{-\infty} f=A$
$\lim_{+\infty} f=A$
$\lim_a f=+\infty$
a
a
$\lim_a f=-\infty$
$\lim_{-\infty} f=+\infty$
$\lim_{+\infty} f=+\infty$
$\lim_{-\infty} f=-\infty$
$\lim_{+\infty} f=-\infty$
A_2
$\lim_{a-0} f=A_2$
A_1
$\lim_{a+0} f=A_1$
a
$\lim_{a+0} f=+\infty$
a
$\lim_{a-0} f=-\infty$

6.2. ábra.

6.3. Függvény határértéke $\boxed{\text{E}}$

6.3.1. A határérték általános definíciója és az átviteli elv

A $\boxed{\text{B}}$ részben bemutatott, különböző esetekre vonatkozó határérték fogalmak egy definícióban megfogalmazhatók. Ehhez a valós számok halmazát kibővítjük. Legyen $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Az $\overline{\mathbb{R}}$ halmazon is lesz $\oplus$ összeadás és $\odot$ szorzás.

1^o $\forall a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a \oplus b := a + b$

2^o $\forall a \in \mathbb{R}$ esetén $a \oplus (+\infty) := +\infty$ és $a \oplus (-\infty) := -\infty$

3^o $(+\infty) \oplus (+\infty) := +\infty$ és $(-\infty) \oplus (-\infty) := -\infty$

4^o $\forall a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a \odot b := a \cdot b$

5^o $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén

$$\begin{aligned} a \odot (+\infty) &:= +\infty, \text{ ha } a > 0 \\ a \odot (+\infty) &:= -\infty, \text{ ha } a < 0 \\ a \odot (-\infty) &:= -\infty, \text{ ha } a > 0 \\ a \odot (-\infty) &:= +\infty, \text{ ha } a < 0 \end{aligned}$$

6^o $(+\infty) \odot (+\infty) := +\infty,\ (+\infty) \odot (-\infty) := -\infty,\ (-\infty) \odot (-\infty) := +\infty$

7^o $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén $-\infty < x < +\infty$.

Megjegyezzük, hogy $\oplus$ és $\odot$ a felsorolt esetekben kommutatív. Ne is keressük a $(+\infty) \oplus (-\infty)$ és a $0 \odot (\pm\infty)$ értelmezését, és továbbra sem definiáljuk a $\frac{0}{0}$, $\frac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)}$, 0^0, $1^{(\pm\infty)}$, $(\pm\infty)^0$ értékeit!
Az $\overline{\mathbb{R}}$ halmazban értelmezzük a pont környezetét.
Legyen $a \in \overline{\mathbb{R}},\ r \in \mathbb{R},\ r > 0$.

6.2. Definíció. *Az a pont r sugarú környezete legyen*

$$K_{\mathrm{r}}(a) := \begin{cases} (a-r, a+r), & \text{ha } a \in \mathbb{R} \\ (\frac{1}{r}, +\infty), & \text{ha } a = +\infty \\ (-\infty, -\frac{1}{r}), & \text{ha } a = -\infty \end{cases}$$

Legyen $A \subset \mathbb{R}$ és $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

6.3. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a* **torlódási pontja az** A **halmaznak**, *ha* $\forall r > 0$ *esetén* $(K_{\mathrm{r}}(a) \cap A) \setminus \{a\} \neq \emptyset$. *Továbbá legyen*

$$\dot{A} := \{a \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \text{ torlódási pontja az } A\text{-nak}\}$$

az A deriválthalmaza.

Az $\boxed{\text{A}}$ részben bemutatott határérték eseteket ezután egységes definícióba foglalhatjuk.
Legyen $f \in \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R},\ a \in \overline{\mathbb{R}},\ a \in \dot{D}(f)$.

6.4. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az értelmezési tartomány a torlódási pontjában van határértéke, ha* $\exists A \in \overline{\mathbb{R}}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (K_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap D(f)$ *esetén* $f(x) \in K_\varepsilon(A)$.

Legyen $f \in \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R},\ a \in (D(f) \cap (a, +\infty))^{\cdot}$.

6.5. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban van jobb oldali határértéke, ha* $\exists A \in \overline{\mathbb{R}}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in K_\delta(a) \cap D(f),\ x > a$ *esetén* $f(x) \in K_\varepsilon(A)$.

Legyen $f \in \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R},\ a \in (D(f) \cap (-\infty, a))^{\cdot}$.

6.6. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban van bal oldali határértéke, ha* $\exists A \in \overline{\mathbb{R}}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in K_\delta(a) \cap D(f),\ x < a$ *esetén* $f(x) \in K_\varepsilon(A)$.

Könnyen látható, hogy

$$\exists \lim_{a+0} f \Leftrightarrow \exists \lim_{a} f_{|D(f)\cap(a,+\infty)}$$

és

$$\exists \lim_{a-0} f \Leftrightarrow \exists \lim_{a} f_{|D(f)\cap(-\infty,a)}.$$

A függvény határértékét is lehet sorozatokkal jellemezni.

6.7. Tétel. *(Határértékre vonatkozó átviteli elv)*
Legyen $f \in \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R},\ a \in \dot{D}(f),\ A \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\lim_{a} f = A \Longleftrightarrow \forall (x_n) \subset D(f) \setminus \{a\},\ x_n \to a \text{ esetén } f(x_n) \to A.$$

Bizonyítás.
($\Rightarrow$) Legyen $(x_n) \subset D(f) \setminus \{a\},\ x_n \to a$ tetszőleges sorozat. Mivel $\lim_a f = A$, ezért $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ olyan, hogy $\forall x \in (K_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap D(f)$ esetén $f(x) \in K_\varepsilon(A)$. Az $x_n \to a$, ezért ehhez a $\delta > 0$ számhoz is $\exists N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $\forall n > N$ esetén $x_n \in K_\delta(a)$, sőt $x_n \neq a$ és $x_n \in D(f)$. Akkor $f(x_n) \in K_\varepsilon(A)$. Ez éppen azt jelenti, hogy $f(x_n) \to A$.

($\Leftarrow$) Tegyük fel, hogy $\forall (x_n) \subset D(f) \setminus \{a\},\ x_n \to a$ esetén $f(x_n) \to A$, de (indirekt módon) $\lim_a f \neq A$. Ez azt jelentené, hogy $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0$ esetén $\exists x \in (K_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap D(f)$, amelyre $f(x) \notin K_\varepsilon(A)$. Emiatt $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén a $\delta := \frac{1}{n} > 0$ számhoz is $\exists x_n \in K_{\frac{1}{n}}(a),\ x_n \neq a,\ x_n \in D(f)$ olyan, hogy $f(x_n) \notin K_\varepsilon(A)$. Nyilván az ilyen (x_n) sorozatra $x_n \to a$, de az ezen a sorozaton tekintett $(f(x_n))$ függvényértékek sorozatára $f(x_n) \nrightarrow A$, hiszen $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $f(x_n) \notin K_\varepsilon(A)$. Ez ellentmond a feltételünknek, így igaz az állítás.

Megjegyezzük, hogy a $\lim_{x\to a} f(x) = A$ jelölést az átviteli elvből származtathatjuk. Ugyanis $\forall (x_n)$ sorozatra $\lim_{x_n \to a} f(x_n) = A$ lenne az állítás. (Az n-et elhagyva kapjuk a határértéket. Az $x \to a$ „x tart az a-hoz” kifejezés mögött is minden esetben egy olyan tetszőleges (x_n) sorozatot értsünk, amelyre $x_n \to a$.)

6.3.2. Műveletek függvények határértékével

6.8. Tétel. *Ha* $\lim_a f = A$ *és* $\lambda \in \mathbb{R}$*, akkor*

$$\lim_a \lambda f = \begin{cases} \lambda \odot A, & ha\ \lambda \neq 0 \\ 0, & ha\ \lambda = 0 \end{cases}$$

Bizonyítás. Legyen $(x_n) \subset D(f) \setminus \{a\},\ x_n \to a$ tetszőleges sorozat. Ekkor $\lambda \neq 0$ esetén $(\lambda f)(x_n) = \lambda f(x_n) \to \lambda \odot A$, ezért $\lim_a \lambda f = \lambda \odot A$. Ha $\lambda = 0$, akkor $0 \cdot f = 0$ függvény, amelyre $\lim_a 0 = 0$.

6.9. Tétel. *Ha* $\lim_a f = A$, $\lim_a g = B$*, és* $a \in (D(f) \cap D(g))^{\cdot}$*, akkor* $\lim_a (f + g) = A \oplus B$*.*

Bizonyítás. Legyen $(x_n) \subset (D(f) \cap D(g)) \setminus \{a\},\ x_n \to a$ tetszőleges sorozat. Ekkor $(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to A \oplus B$, ezért $\lim_a (f + g) = A \oplus B$.

(Szorzatra hasonlóan.)

6.10. Tétel. *Ha* $\lim_a g = B,\ B \neq 0$*, akkor*

$$\lim_a \frac{1}{g} = \begin{cases} \frac{1}{B},\ ha\ B \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0,\ ha\ B = +\infty\ vagy\ -\infty. \end{cases}$$

Bizonyítás. Mivel $\lim_a g \neq 0$, ezért $\exists K(a)$ olyan, hogy $\forall x \in K(a) \cap (D(g) \setminus \{a\})$ esetén $g(x) \neq 0$. Ekkor $K(a) \cap (D(g) \setminus \{a\}) \subset D(\frac{1}{g})$. Az a a torlódási pontja volt a $D(g)$-nek, így $a \in \dot{D}(\frac{1}{g})$. Legyen $(x_n) \subset D(\frac{1}{g}) \setminus \{a\},\ x_n \to a$ tetszőleges sorozat.

$$\frac{1}{g}(x_n) = \frac{1}{g(x_n)} \to \begin{cases} \frac{1}{B},\ \text{ha } B \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0,\ \text{ha } B = +\infty \text{ vagy } -\infty. \end{cases}$$

Tehát igaz az állítás.

6.11. Tétel. *Ha* $\lim_a g = b,\ b \in \mathbb{R}$ *és* $f \in C[b]$*, akkor* $\lim_a f \circ g = f(b)$*.*

Bizonyítás. Legyen $(x_n) \subset D(f \circ g) \setminus \{a\},\ x_n \to a$ tetszőleges sorozat. Mivel $D(f \circ g) \subset D(g)$, ezért $g(x_n) \to b$. Az $f \in C[b]$, így $(f \circ g)(x_n) = f(g(x_n)) \to f(b)$. Tehát $\lim_a f \circ g = f(b)$.

[Megjegyezzük, hogy $\frac{f}{g}$, f^g függvények határértéke nagy körültekintést igényel, az ilyenekre vonatkozó határértéktételek csak körülményesen fogalmazhatók meg.]

6.12. Tétel. *(Monoton függvény határértéke)*
Legyen $a, b \in \overline{\mathbb{R}},\ f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *monoton függvény. Ekkor* $\exists \lim_a f$ *és* $\exists \lim_b f$*.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f monoton fogyó.
Legyen

$$\sup f := \begin{cases} \sup\{f(x) \mid x \in (a, b)\}, & \text{ha } R(f) \text{ felülről korlátos,} \\ +\infty, & \text{ha } R(f) \text{ felülről nem korlátos.} \end{cases}$$

A $\sup f$ értelmezéséből következik, hogy $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_0 \in (a, b)$ olyan, hogy $f(x_0) \in K_\varepsilon(\sup f)$.
Legyen $\delta > 0$ olyan, hogy $(a, x_0) = K_\delta(a) \cap (a, b)$. Ekkor f monoton fogyása miatt $\forall x \in K_\delta(a) \cap (a, b)$ esetén $x < x_0$, ezért ha $f(x_0) \in K_\varepsilon(\sup f)$ és $f(x) \geq f(x_0)$, akkor $f(x) \in K_\varepsilon(\sup f)$ is teljesül.
Tehát $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in K_\delta(a) \cap (a, b)$ esetén $f(x) \in K_\varepsilon(\sup f)$, így $\exists \lim_a f = \sup f$.
Hasonlóan látható be a $\lim_b f$ létezése is.

7. fejezet

Differenciálhatóság

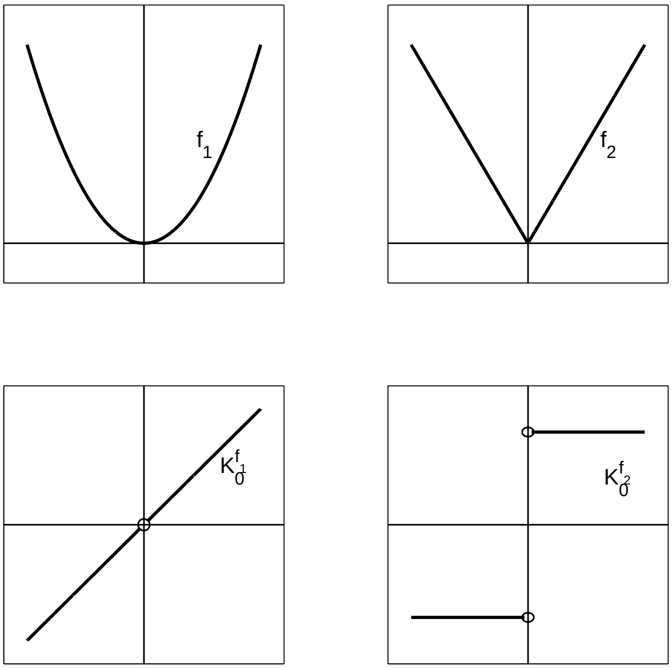
A differenciálhatóság a függvény simaságát jelenti. A differenciálható függvény folytonos, és nincs rajta törés, csúcs. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk.

- Derivált fogalma és geometriai jelentése
- Elemi függvények deriváltjai
- Deriválási szabályok
- Monotonitás és szélsőérték
- Konvexitás és inflexió
- Függvényvizsgálat
- Taylor polinom
- L'Hospital szabály
- Középértéktételek

7.1. Differenciálhatóság $\boxed{\text{A}}$

7.1.1. A derivált fogalma és geometriai jelentése

Vizsgáljunk meg két egyszerű függvényt: $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(t) := t^2$, és $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(t) := |t|$. Rögzítsük az $x := 0$ pontot. Könnyen ellenőrizhető, hogy f_1 és f_2 is páros; alulról korlátos és felülről nem korlátos; a pozitív számok halmazán növekvő, a negatív számok halmazán fogyó; az $x = 0$ pontban minimuma van, és a minimum értéke 0; az $x = 0$ pontban folytonos.
Szembetűnő a sok hasonlóság ellenére, hogy az $x = 0$ pontban az f_1 függvény sima, az f_2 függvénynek pedig törése van.
Van-e olyan „műszer”, amely kimutatja, hogy egy függvény valamely pontban



7.1. ábra.

sima, egy másik pedig nem?

Legyen $f : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény, $x \in D(f)$ egy rögzített pont. Az f függvény x-hez tartozó különbségihányados-függvénye legyen a

$$K_x^f : D(f) \setminus \{x\} \to \mathbb{R} \quad K_x^f(t) := \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

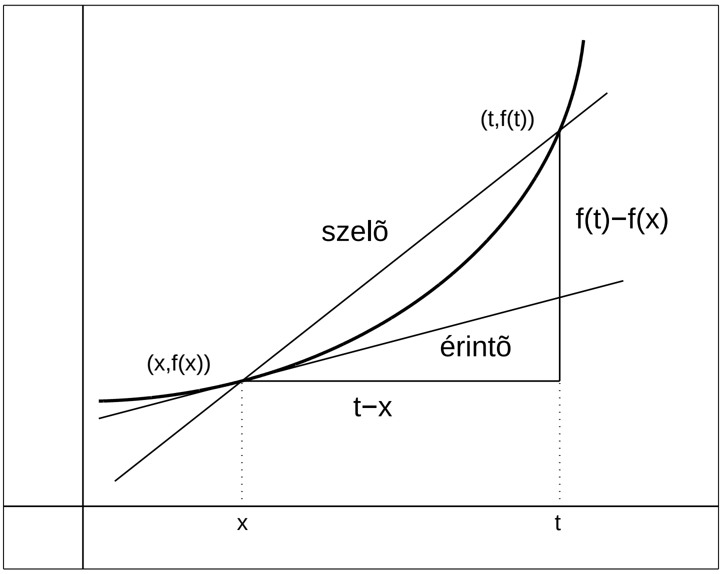
függvény. Vizsgáljuk meg ezzel a „műszerrel” az f_1 és f_2 függvényt az $x := 0$ pont esetén (7.1. ábra)!

Látjuk, hogy a sima f_1 függvény esetén van határértéke (folytonossá tehető) a $K_0^{f_1}$ különbségihányados-függvénynek, míg a töréssel rendelkező f_2 függvény $K_0^{f_2}$ különbségihányados-függvényének nincs határértéke a 0 pontban.

Ez a vizsgálat motiválja, hogy azokat a függvényeket, amelyek különbségihányados-függvényének van határértéke abban a pontban, amelyhez tartozik, **differenciálható**nak nevezzük az adott pontban. Az $f \in D[x]$ jelölje ezt a tulajdonságot.

Ha $f \in D[x]$, akkor a különbségi hányados határértékét az f függvény x pontbeli **differenciálhányadosá**nak nevezzük:

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} =: f'(x).$$



7.2. ábra.

Könnyen beláthatjuk, hogy $t \to x$ esetén $t - x \to 0$, de $\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ mégsem lesz végtelen, ez csak úgy lehet, ha $f(t) - f(x) \to 0$, ami azt jelenti, hogy ha az f függvény differenciálható az x pontban, akkor ott folytonos is.

Honnan került elő az a „műszer", amely alkalmas egy függvény simaságát kimutatni? Először egy geometriai megközelítést mutatunk be. Legyen $f \in D[x]$. A koordináta-rendszer $(x, f(x))$ és a tőle különböző $(t, f(t))$ pontjain át fektessünk egy egyenest (szelőt). Az egyenes meredeksége (iránytangense)

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

[Ezt jelöltük $K_x^f(t)$-vel.]

Ha t tart az x-hez, akkor a szelők tartanak egy határhelyzethez, amit **érintő**nek neveznek, így a szelők meredeksége is tart az érintő meredekségéhez (7.2. ábra). [Ezt a határértéket neveztük el differenciálhányadosnak.]

A másik egy fizikai interpretáció legyen. Tegyük fel, hogy egy pont mozgását a $t \mapsto s(t)$ út-idő függvény írja le. A $[t_0, t]$ időintervallumban az átlagsebesség a megtett $s(t) - s(t_0)$ út és a megtételéhez szükséges $t - t_0$ idő hányadosa, azaz

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

[Gyakran ezt a hányadost $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ jelöli.] Ha „minden határon túl" rövidítjük az idő-intervallumot, az átlagsebesség egy szám körül keveset ingadozik (feltéve, hogy sima volt az út-idő függvény), ezt a számot nevezik **pillanatnyi sebesség**nek:

$$\lim_{t\to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0} =: v(t_0) \quad \text{vagy} \quad \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v.$$

[Látható, hogy a pillanatnyi sebesség az átlagsebesség határértéke és az út-idő függvény differenciálhányadosa: $s'(t_0) = v(t_0)$.]
Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t) := t^2$ függvény nem csak az $x := 0$ pontban tűnik simának. Legyen $x \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges valós szám. Nézzük meg, hogy az f függvény x-hez tartozó különbségihányadosának van-e határértéke!

$$\lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{t\to x} \frac{t^2-x^2}{t-x} = \lim_{t\to x} \frac{(t-x)(t+x)}{t-x} = \lim_{t\to x}(t+x) = 2x.$$

Tehát $f \in D[x]$ és $f'(x) = 2x$.
Azt a függvényt, amely minden x pontban (ahol a függvény differenciálható) megadja az x-beli differenciálhányadost, az f függvény **deriváltjá**nak nevezik, és f'-vel jelölik. Példánkban $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f'(x) = 2x$.
Gyakran az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t) := t^2$ függvényt röviden x^2 függvényként emlegetik, a deriváltját pedig $(x^2)'$ jelöli. Ezzel a megállapodással

$$(x^2)' = 2x.$$

7.1.2. Elemi függvények deriváltja és a deriválási szabályok

Nézzünk néhány további példát. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t) := t^3,\ x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{t\to x} \frac{t^3-x^3}{t-x} = \lim_{t\to x} \frac{(t-x)(t^2+tx+x^2)}{t-x} = \lim_{t\to x}(t^2+tx+x^2) = 3x^2,$$

tehát $f \in D[x]$ és $f'(x) = 3x^2$, vagy röviden $(x^3)' = 3x^2$.
Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t) := \sin t,\ x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{t\to x} \frac{\sin t - \sin x}{t-x} = \lim_{t\to x} \frac{2\sin\frac{t-x}{2}\cos\frac{t+x}{2}}{t-x} =$$
$$= \lim_{t\to x} \left(\frac{\sin\frac{t-x}{2}}{\frac{t-x}{2}} \cos\frac{t+x}{2} \right) = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

(Az átalakítás során a trigonometrikus függvények addíciós tételeinek egy következményét használtuk. Mivel $\lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$, ezért $t \to x$ esetén az $u := \frac{t-x}{2} \to 0$, így $\lim_{t\to x} \frac{\sin\frac{t-x}{2}}{\frac{t-x}{2}} = 1$.)
Tehát $f \in D[x]$, azaz a szinusz függvény minden $x \in \mathbb{R}$ pontban differenciálható, és $f'(x) = \cos x$, vagy röviden $(\sin x)' = \cos x$.
Hasonló gondolatmenettel egy sereg függvény differenciálhatóságát ki lehet mutatni, és a számolások eredményeként a deriváltakat is megkapjuk.

Néhány fontos függvény deriváltját tartalmazza a következő összefoglaló:

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad \alpha \in \mathbb{R}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0,\ a \neq 1)$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arcsin\ x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(e^x)' = e^x$	$(\arccos\ x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0)$	$(\mathrm{arctg}\ x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$(\mathrm{tg}\ x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\mathrm{arsh}\ x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$(\mathrm{ctg}\ x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\mathrm{arch}\ x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1)$
$(\mathrm{sh}\ x)' = \mathrm{ch}\ x$	$(\mathrm{arth}\ x)' = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (-1 < x < 1)$
$(\mathrm{ch}\ x)' = \mathrm{sh}\ x$	
$(\mathrm{th}\ x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	

Differenciálható függvényekkel végzett műveletek eredményeként gyakran kapunk differenciálható függvényt. Például ha $f, g \in D[x]$, akkor

$$\lim_{t\to x} \frac{(f+g)(t) - (f+g)(x)}{t-x} = \lim_{t\to x} \frac{f(t) - f(x) + g(t) - g(x)}{t-x} =$$
$$= \lim_{t\to x} \frac{f(t) - f(x)}{t-x} + \lim_{t\to x} \frac{g(t) - g(x)}{t-x} = f'(x) + g'(x).$$

Tehát az $f + g$ függvény is differenciálható az x pontban és $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
Ehhez hasonlóan igazolható még néhány tétel:

7.1. Tétel. *Ha $f \in D[x]$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda f \in D[x]$ és $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$.*

7.2. Tétel. *Ha $f, g \in D[x]$, akkor $f + g \in D[x]$ és $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$, továbbá $f \cdot g \in D[x]$ és $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.*

7.3. Tétel. *Ha $g \in D[x]$ és $g(x) \neq 0$, akkor $\frac{1}{g} \in D[x]$ és $(\frac{1}{g})'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$.*

7.4. Tétel. *Ha $f, g \in D[x]$ és $g(x) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g} \in D[x]$ és $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.*

7.5. Tétel. *Ha $g \in D[x]$ és $f \in D[g(x)]$, akkor $f \circ g \in D[x]$ és $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.*

7.6. Tétel. *Ha $f \in D[x]$, $f'(x) \neq 0$, és létezik az f^{-1} inverzfüggvény, akkor az $u := f(x)$ jelöléssel $f^{-1} \in D[u]$, és $(f^{-1})'(u) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(u))}$.*

7.1.3. A derivált kapcsolata a függvény tulajdonságaival

Milyen előny származik abból, ha egy függvényről tudjuk, hogy differenciálható (sima), és ismerjük a deriváltját?

a) Legyen $f \in D[x]$. Akkor ez azt jelenti, hogy ha t közel van az x-hez, akkor $\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ közel van $f'(x)$-hez. Ez indokolja a differenciálhatóság egy további szemléletes és hasznos jelentését. Ugyanis ha $t \approx x$, akkor

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \approx f'(x), \text{ amiből } f(t)-f(x) \approx f'(x)(t-x) \text{ vagy}$$

$$f(t) \approx f(x) + f'(x)(t-x)$$

következik. Ez azt jelenti, hogy x-hez közeli t pontokban a függvényérték egy legfeljebb elsőfokú polinom (egyenes) helyettesítési értékével közelíthető. Az $e_x(t) := f(x) + f'(x)(t-x)$ $(t \in \mathbb{R})$ az f függvény $(x, f(x))$ pontjához tartozó **érintő**je.

b) A derivált előjeléből következtethetünk a függvény növekedésére. Legyen $f \in D[x]$ és $f'(x) > 0$. Ekkor

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \approx f'(x), \text{ ha } t \approx x.$$

Mivel $f'(x) > 0$, ezért $\frac{f(t)-f(x)}{t-x} > 0$, ha $t \approx x$. Ez azt jelenti, hogy ha $t_1 < x$, akkor $f(t_1) < f(x)$ és ha $t_2 > x$, akkor $f(t_2) > f(x)$. Tehát bármely t_1, t_2 pontra, ahol t_1 és t_2 is közel van az x-hez és $t_1 < x < t_2$, $f(t_1) < f(x) < f(t_2)$. Igazolható az is, hogy ha $f'(x) > 0$ egy I intervallum minden $x \in I$ pontjában, akkor az f függvény szigorúan monoton növekedő az I intervallumon, azaz bármely $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$.

c) Lokális szélsőérték keresésére is alkalmas a derivált. Egy f függvénynek az $a \in D(f)$ pontban **lokális minimuma** van, ha van olyan, az a pontot körülvevő intervallum, hogy ebből vett bármely x értelmezési tartománybeli pontra $f(x) \geq f(a)$.
Ha $f \in D[a]$, és az f függvénynek minimuma van az a pontban, akkor $f'(a) = 0$. Ugyanis ha $f'(a) \neq 0$, például $f'(a) > 0$ lenne, akkor lenne olyan $t_1 < a < t_2$, a-hoz közeli két pont, amelyekre $f(t_1) < f(a) < f(t_2)$, amely ellentmond annak, hogy f-nek a-ban lokális minimuma van.
Tehát egy nyílt intervallum minden pontjában differenciálható függvénynek csak ott lehet lokális szélsőértéke, ahol a deriváltja 0.

Vigyázat! Ha $f \in D[a]$ és $f'(a) = 0$, akkor az a-ban lehet, hogy nincs szélsőérték. Például az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) := t^3$ esetén $(t^3)' = 3t^2$, ezért $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$, de az f függvénynek nincs lokális szélsőértéke a 0-ban.

d) A függvény alakjára is következtethetünk a deriváltjából. Az f függvényt **konvex**nek nevezzük az I intervallumon, ha bármely $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ esetén az $(x_1, f(x_1))$ és $(x_2, f(x_2))$ pontot összekötő húr alatt marad a függvény grafikonja az $[x_1, x_2]$ intervallumon.
Igazolható, hogy egy differenciálható f függvény pontosan akkor konvex az I intervallumon, ha az f' deriváltja monoton növekedő ezen az intervallumon.
Az f' függvény monoton növekedésére a deriváltjának előjeléből következtethetünk. Ha az f' differenciálható függvény, akkor bevezetve az $f'' := (f')'$ második deriváltat, igaz lesz az a tétel, hogy $f''(x) > 0$ $(x \in I)$ esetén f konvex az I intervallumon.
(Értelemszerűen megfogalmazhatjuk a **konkáv** függvény fogalmát, és ilyen függvényre is hasonló elégséges feltétel adható.)
Az olyan $a \in D(f)$ pontot, amelyet megelőző és az őt követő intervallumokon az f függvény alakja eltérő (vagy konvexből konkávba, vagy konkávból konvexbe megy át a függvény), **inflexiós pont**nak nevezzük. Például az $f(x) = x^3$ függvénynek 0-ban inflexiója van.
Igazolható, hogy ha az $a \in D(f)$ inflexiós pontja a kétszer differenciálható f függvénynek, akkor $f''(a) = 0$.

Vigyázat! Ha f kétszer deriválható az a pontban, és $f''(a) = 0$, akkor még lehet, hogy nincs inflexiója a függvénynek az a-ban. Például az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) := t^4$ függvény esetén $f''(t) = 12t^2$, ezért $f''(0) = 0$, de az f függvény az egész $\mathbb{R}$ intervallumon konvex (és nem konkáv egyetlen részintervallumon sem).

e) Hogyan használhatjuk az eddigi eredményeket differenciálható függvények menetének vizsgálatához? Célszerű a következő lépéseket a 3. feladat példáján nyomon követni.

1. Elkészítjük az f' deriváltfüggvényt.
2. Megkeressük az f' zérushelyeit (illetve azokat a pontokat, ahol f' előjelet válthat).
3. Kiszámítjuk az f'' második deriváltat.
4. Megkeressük az f'' zérushelyeit (illetve azokat a pontokat, ahol f'' előjelet válthat).
5. A függvény értelmezési tartományát az f', az f'' zérushelyei (illetve lehetséges előjelváltási helyei) nyílt intervallumokra szabdalják. Ezeken az intervallumokon megállapítjuk a deriváltak előjelét, amiből a monotonitási és alaki viszonyokra következtetünk. (Áttekinthetővé válik a vizsgálat egy táblázat elkészítésével.)
6. Néhány támpontot kiszámolunk. Ha vannak, kiszámoljuk a lokális maximum és minimum értékeit, a függvény határértékét (esetleg jobb oldali és bal oldali határértékét) minden olyan pontban, amely az értelmezési tartomány olyan torlódási pontja, amelyben nincs értelmezve a függvény.

7. Vázoljuk a függvény menetét.

7.1.4. Többszörös derivált és a Taylor-polinom

Láttuk egy függvény első és második deriváltjának szerepét. Ezek általánosításaként vezessük be a magasabbrendű deriváltakat.
Ha f' differenciálható, akkor $f'' := (f')'$.
Ha f'' differenciálható, akkor $f''' := (f'')'$.
$\vdots$
Ha $f^{(k)}$ differenciálható, akkor $f^{(k+1)} := (f^{(k)})'$, $k = 1, 2, \ldots$.
Megjegyezzük, hogy vesszőkkel csak az első három deriváltat szoktuk jelölni, tehát $f^{(1)} := f'$, $f^{(2)} := f''$, $f^{(3)} := f'''$. Néha az $f^{(0)} := f$ megállapodás is hasznos.

Az „elég sima” függvényeket jól közelíthetjük polinomokkal. Azt már láttuk, hogy ha $f \in D[a]$, akkor az

$$e_a(t) := f(a) + f'(a)(t-a) \quad (t \in \mathbb{R})$$

érintőfüggvényre

$$e_a(a) = f(a);$$

$e'_a(t) = f'(a)$, így $e'_a(a) = f'(a)$, azaz az e_a-nak és az f-nek az a-beli differenciálhányadosa is megegyezett.
Látható az is, hogy

$$\lim_{t \to a} \frac{f(t) - e_a(t)}{t-a} = \lim_{t \to a} \frac{f(t) - (f(a) + f'(a)(t-a))}{t-a} = \lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t-a} - f'(a) = 0,$$

ami azt fejezi ki, hogy az e_a érintőfüggvény olyan közelítése az f függvénynek, hogy ha az $f(t) - e_a(t)$ különbséget olyan módon felnagyítjuk, hogy $(t-a)$-val elosztjuk, még ez a hányados is 0-hoz közeli, ha t közel van az a-hoz.

Az e_a érintőfüggvény csak egy elsőfokú polinom. Milyen legyen az a magasabb fokú polinom, amely a még pontosabb közelítést lehetővé teszi?
Legyen $P(x) := 3 - 2x + 4x^2 - 5x^3$. Ekkor $P(0) = 3$.

$$\begin{array}{ll} P'(x) = -2 + 8x - 15x^2, & P'(0) = -2. \\ P''(x) = 8 - 30x, & P''(0) = 8 \\ P'''(x) = -30, & P'''(0) = -30. \end{array}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$P(x) = P(0) + P'(0)x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \frac{P'''(0)}{3!}x^3,$$

azaz egy polinomot igen jól közelítettünk (ebben az esetben pontosan előállítottunk) egy olyan polinommal, amelynek együtthatói a függvény magasabbrendű deriváltjai egy pontban (most ez a pont a 0 volt), elosztva a derivált rendjének faktoriálisaival.

E kétféle tapasztalat vezet el minket az úgynevezett Taylor-formulához. Tegyük fel, hogy f olyan „sima", hogy az $f^{(n+1)}$ deriváltfüggvény még folytonos is az $a \in D(f)$ egy $K(a) \subset D(f)$ környezetében. Legyen $T_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$T_n(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

az úgynevezett n-edik Taylor-polinom. (Látható, hogy $T_1 = e_a$.) Könnyen ellenőrizhető, hogy $T_n(a) = f(a)$, $T_n'(a) = f'(a)$, $T_n''(a) = f''(a), \ldots, T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$ (azaz az e_a érintőfüggvényhez hasonló tulajdonsággal rendelkezik a T_n Taylor-polinom is.) Igazolható, hogy ilyen feltétel mellett bármely $x \in K(a)$ esetén van olyan c az x és az a között, hogy

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

ami azt jelenti, hogy az f függvényt a T_n Taylor-polinom olyan jól közelíti, hogy

$$\frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a) \approx 0, \text{ ha } x \approx a.$$

Tehát a Taylor-polinom jól (n-edrendben) simul az f függvényhez; az f függvény a-hoz közeli helyettesíti értékeit egy polinom helyettesítési értékeivel nagyon pontosan közelíthetjük.

7.1.5. L'Hospital-szabály

A deriváltak segítségével éppen a nehéznek tűnő határérték-számítások is elvégezhetők. A L'Hospital-féle szabályok egyike arról szól, hogy ha f és g differenciálható egy I nyílt intervallumon és az a pontban (amely vagy eleme vagy végpontja az I intervallumnak, akár $+\infty$ vagy $-\infty$ is lehet), és

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0,$$

de létezik a deriváltak hányadosának a határértéke

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: L,$$

akkor az f és g hányadosának is van határértéke, és

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Ugyanez igaz akkor is, ha az a pontban f és g a 0 helyett $(+\infty)$-hez vagy $(-\infty)$-hez tart [nem szükséges, hogy azonos előjelű végtelen legyen a két

függvény határértéke].
A L'Hospital-szabállyal számítsuk ki a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$$

határértéket. Mind a számláló, mind a nevező 0-ban 0, ezért a deriváltak hányadosának a határértékét elég kiszámítani.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-\cos 3x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+3\sin 3x}{2x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}+\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=$$
$$=-\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{9}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=-\frac{1}{2}+\frac{9}{2}=4.$$

Így

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=4.$$

[A deriváltak hányadosának határértékét szintén számolhattuk volna a L'Hospital-szabállyal:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+3\sin 3x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x+9\cos 3x}{2}=\frac{-1+9}{2}=4.]$$

Sajnos, még a L'Hospital szabályok sem tudnak minden „kritikus" határérték-feladatra könnyű választ adni. Például

$$\lim_{x\to\infty}\mathrm{sh}(x+2)=\lim_{x\to\infty}\mathrm{sh}(x-2)=+\infty.$$

Ha a deriváltakat nézzük, akkor

$$\lim_{x\to\infty}\mathrm{ch}(x+2)=\lim_{x\to\infty}\mathrm{ch}(x-2)=+\infty,$$

ha ezek deriváltjait vizsgáljuk, akkor

$$\lim_{x\to\infty}\mathrm{sh}(x+2)=\lim_{x\to\infty}\mathrm{sh}(x-2)=+\infty,$$

és így tovább. Nem kapjuk meg a

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{sh}(x+2)}{\mathrm{sh}(x-2)}$$

határértéket a L'Hospital szabály alkalmazásával. [Megjegyezzük, hogy

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{sh}(x+2)}{\mathrm{sh}(x-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x+2}-e^{-(x+2)}}{e^{x-2}-e^{-(x-2)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^2-\frac{e^{-2}}{e^{2x}}}{e^{-2}-\frac{e^2}{e^{2x}}}=e^4.]$$

7.2. Feladatok

1. Deriváljuk az $f(x) := 3x^5 + \sqrt{x} + \ln\sin^2(\frac{1}{x})$ függvényt!
Megoldás: $f'(x) = 3\cdot 5x^4 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sin^2(\frac{1}{x})}\cdot 2\sin(\frac{1}{x})\cdot\cos(\frac{1}{x})\cdot(-\frac{1}{x^2})$.

2. Deriváljuk a

$$g(x) := 4x^3 - 2x^2 + 5x - 3$$
$$h(x) := (x-2)^3\sin(4x)$$
$$l(x) := x^a + a^x + ax + \frac{x}{a} + \frac{a}{x} \quad \text{(a>0)}$$
$$k(x) := (\sin x)^{\cos x}$$
$$m(x) := \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}x+1}{1-\mathrm{tg}x}$$

függvényeket!

3. Vizsgáljuk meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) := \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ függvény menetét!
Megoldás:

a) $f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2+1}-(2x-1)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{2(x^2+1)-2x^2+x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x+2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

b) $\frac{x+2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = 0,\ x = -2$ (a tört máshol nem vált előjelet, mert a nevező pozitív)

c) $f''(x) = \frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}-(x+2)\frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}2x}{(x^2+1)^3} = \frac{x^2+1-(3x^2+6x)}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}} = \frac{-2x^2-6x+1}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}$

d) $\frac{-2x^2-6x+1}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}} = 0,\quad -2x^2-6x+1 = 0 \begin{cases} x_1 = \frac{6+\sqrt{44}}{-4} \approx -3,16 \\ x_2 = \frac{6-\sqrt{44}}{-4} \approx 0,16 \end{cases}$

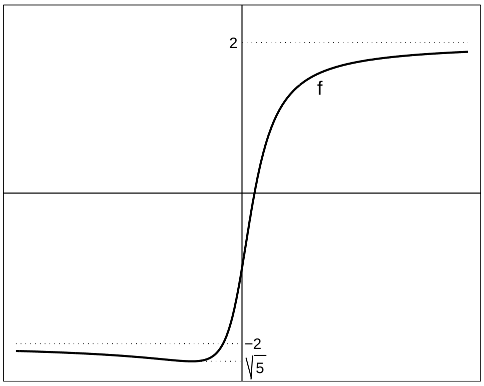
e)

	-3.16	-2	0.16
f'	- - - - - - - - - - - - - - - - - - - | + + + + + + + + + + + + +		
f mon.	csökken	min	nő
f''	- - - - - - - | + + + + + + + + + + + + + + | - - - - - -		
f alak	konkáv | inflexió |	konvex	| inflexió | konkáv

f)

$$f(-2) = -\frac{5}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5} \approx -2,23$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -2$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 2$$

g)



7.3. ábra.

4. Vizsgáljuk meg a következő függvények menetét:

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) := e^{-x^2}$$
$$h : \mathbb{R} \setminus \{-2, 8\},\ h(x) := \tfrac{x}{x^2-6x-16}$$
$$l : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ l(x) := x \ln x$$
$$k : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ k(x) := \tfrac{e^x}{1+e^x}$$

5. Készítsük el az $f(x) := \sin x$ függvény $a := 0$ ponthoz tartozó Taylor-polinomját $n := 11$ esetén.
Megoldás:

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \sin x & f(0) = 0 \\
f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\
f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 \\
f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -1 \\
f^{(4)}(x) = \sin x & f^{(4)}(0) = 0 \\
f^{(5)}(x) = \cos x & f^{(5)}(0) = 1 \\
\vdots & \vdots \\
f^{(11)}(x) = -\cos x & f^{(11)}(0) = -1 \\
f^{(12)}(x) = \sin x & f^{(12)}(0) = 0
\end{array}$$

[Látható, hogy $f = f^{(4)} = f^{(8)} = \ldots = f^{(4k)} = \ldots = \sin .$]

Tehát

$$T_{11}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11}$$

Megjegyzés: Ha a sin függvényt a T_{11} Taylor-polinomjával közelítjük, akkor például az $x := 0,1$ helyen

$$|\sin 0,1 - T_{11}(0,1)| = \frac{|\sin c|}{12!} 0,1^{12} \le \frac{0,1^{12}}{12!} = \frac{10^{-12}}{479001600} < 2\cdot 10^{-9}\cdot 10^{-12} = 2\cdot 10^{-21}.$$

Sőt, ha $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, akkor (kihasználva, hogy $x \le \frac{\pi}{2} < 2$)

$$|\sin x - T_{11}(x)| = \frac{|\sin c|}{12!} x^{12} \le \frac{1}{12!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{12} < \frac{2^{12}}{12!} \le 2\cdot 10^{-9}\cdot 2^{12} = 8192\cdot 10^{-9} < 10^{-9}.$$

Látható, hogy a T_{11} a sin függvény értékeit a $[0, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon elég jól (legalább négy tizedes pontossággal) megadja.

6. Készítsük el a következő függvények Taylor-polinomjait:

$g(x) := e^x$	$a := 0$	$n := 10$
$h(x) = \cos x$	$a := 0$	$n := 12$
$l(x) = \sqrt{1+x}$	$a := 0$	$n := 2$
$k(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$a := 0$	$n := 2$

7. Számítsuk ki a $\lim_{x\to 0} x^2 \ln x$ határértéket!
Megoldás:

$$\lim_{x\to 0} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-2}}.$$

Mivel

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\ln x)'}{(x^{-2})'} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{-1}}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2}x^2 = 0,$$

ezért

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-2}} = 0, \text{ így } \lim_{x\to 0} x^2 \ln x = 0.$$

8. Számítsuk ki a következő határértékeket!

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x\operatorname{tg} x - 1}{x^2}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\sin^2 2x}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$

d) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$

7.3. Differenciálhatóság $\boxed{\text{E}}$

7.3.1. A derivált fogalma és kapcsolata a folytonossággal

7.1. Definíció. *Legyen $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$. Azt mondjuk, hogy a* **belső pontja** *az A halmaznak, ha $\exists K(a)$, hogy $K(a) \subset A$.*
Az A halmaz belső pontjainak halmazát jelölje $\text{int}A$.

7.2. Definíció. *Legyen $f : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$, $a \in \text{int}D(f)$. Azt mondjuk, hogy az f függvény* **differenciálható** *az a pontban, ha*

$$\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}.$$

Ha az f függvény differenciálható az a pontban, akkor ezt $f \in D[a]$ jelölje.
Ha $f \in D[a]$, akkor

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Az $f'(a) \in \mathbb{R}$ számot az f függvény a pontbeli **differenciálhányados***ának nevezzük.*
Az $f'(a)$ helyett gyakran használják még az $\dot{f}(a)$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$, $Df(a)$ jelöléseket is.

7.7. Tétel. *(Főtétel)*
Legyen $f : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$, $a \in \text{int}D(f)$.
$f \in D[a] \Leftrightarrow \exists F_a : D(f) \to \mathbb{R}$, $F_a \in C[a]$ olyan, hogy $\forall x \in D(f)$ esetén $f(x) - f(a) = F_a(x)(x - a)$.

Bizonyítás. ($\Rightarrow$) Legyen $f \in D[a]$. Ekkor vezessük be az

$$F_a : D(f) \to \mathbb{R}, \quad F_a(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, & \text{ha } x \neq a \\ f'(a) & \text{ha } x = a \end{cases}$$

függvényt. Az $F_a \in C[a]$, ugyanis $\forall x \in D(f) \setminus \{a\}$ esetén

$$F_a(x) - F_a(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a),$$

ezért

$$\lim_{x \to a} (F_a(x) - F_a(a)) = 0.$$

Legyen ezután $x \in D(f)$ tetszőleges. Ha $x \neq a$, akkor

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) = F_a(x) \cdot (x - a);$$

ha $x = a$, akkor

$$f(a) - f(a) = F_a(a) \cdot (a - a)$$

nyilván igaz.
($\Leftarrow$) Tegyük fel, hogy $\exists F_a \in C[a]$ olyan, hogy $\forall x \in D(f)$ esetén $f(x) - f(a) =$

$F_a(x) \cdot (x-a)$.
Ha $x \neq a$, akkor

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = F_a(x),$$

és mivel $F_a \in C[a]$, ezért $\exists \lim_{x\to a} F_a(x) = F_a(a)$, de akkor $\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ is (azaz $f \in D[a]$), sőt $F_a(a) = f'(a)$.

7.8. Tétel. *Ha $f \in D[a]$, akkor $f \in C[a]$.*

Bizonyítás. Ha $f \in D[a]$, akkor $\exists F_a \in C[a]$ olyan, hogy $\forall x \in D(f)$ esetén $f(x) - f(a) = F_a(x) \cdot (x-a)$, azaz $f = f(a) + F_a \cdot (id - a)$. Mivel folytonos függvények összege, szorzata is folytonos, ezért f is folytonos az a pontban.

Megjegyzés: Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := |x|$ függvény folytonos az $a := 0$ pontban, de $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$ esetén

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{|x|-0}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

miatt nem létezik a

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

határérték, ezért f nem differenciálható a 0 pontban. A példa azt mutatja, hogy a tétel nem fordítható meg.

7.3.2. Műveletek differenciálható függvényekkel, deriválási szabályok

7.9. Tétel. *Ha $f \in D[a]$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda f \in D[a]$, és $(\lambda f)'(a) = \lambda \cdot f'(a)$.*

Bizonyítás.

$$\lim_{x\to a} \frac{(\lambda f)(x) - (\lambda f)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \lambda \cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lambda \cdot f'(a).$$

7.10. Tétel. *Ha $f, g \in D[a]$, akkor $f \cdot g \in D[a]$, és $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.*

Bizonyítás.

$$\lim_{x\to a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} =$$
$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot g(x) + f(a) \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Mivel $g \in D[a]$, ezért $g \in C[a]$, így $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$.

7.11. Tétel. *Ha $g \in D[a]$ és $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{1}{g} \in D[a]$, és $(\frac{1}{g})'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$.*

Bizonyítás. Mivel $g \in D[a]$, ezért $g \in C[a]$, így a $g(a) \neq 0$ feltétel miatt $\exists K(a) \subset D(g)$, hogy $\forall x \in K(a)$ esetén $g(x) \neq 0$. Tehát $a \in \mathrm{int} D(\frac{1}{g})$. Ekkor

$$\lim_{x \to a} \frac{(\frac{1}{g})(x) - (\frac{1}{g})(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{g(a)-g(x)}{g(x)g(a)}}{x-a} =$$
$$= \lim_{x \to a} \left(-\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \cdot \frac{1}{g(x)g(a)} \right) = -g'(a) \cdot \frac{1}{g^2(a)}.$$

7.12. Tétel. *Ha $f, g \in D[a]$ és $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g} \in D[a]$ és $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.*

Bizonyítás. Mivel $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$, és a feltételek szerint $\frac{1}{g} \in D[a]$, ezért a szorzatfüggvény differenciálhatóságára vonatkozó tétel miatt $\frac{f}{g} \in D[a]$ és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a)\frac{1}{g(a)} + f(a)\left(-\frac{g'(a)}{g^2(a)}\right) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

7.13. Tétel. *Ha $g \in D[a]$ és $f \in D[g(a)]$, akkor $f \circ g \in D[a]$, és $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$.*

Bizonyítás. Mivel $g \in D[a]$, ezért a főtétel miatt $\exists G_a \in C[a]$ olyan, hogy $\forall x \in D(g)$ esetén $g(x) - g(a) = G_a(x) \cdot (x-a)$. Mivel $f \in D[g(a)]$, ezért szintén a főtétel miatt $\exists F_{g(a)} \in C[g(a)]$ olyan, hogy $\forall y \in D(f)$ esetén $f(y) - f(g(a)) = F_{g(a)}(y) \cdot (y - g(a))$. Legyen $x \in D(f \circ g)$, ekkor az $y := g(x)$ jelöléssel

$$(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a) = f(g(x)) - f(g(a)) = F_{g(a)}(g(x)) \cdot (g(x) - g(a)) =$$
$$= F_{g(a)}(g(x)) \cdot G_a(x) \cdot (x-a) = (F_{g(a)} \circ g \cdot G_a)(x) \cdot (x-a).$$

Mivel $g \in D[a]$, ezért $g \in C[a]$; $F_{g(a)} \in C[g(a)]$, így az összetett függvény folytonosságára vonatkozó tétel szerint $F_{g(a)} \circ g \in C[a]$. A $G_a \in C[a]$ miatt, a szorzatfüggvény folytonosságát felhasználva, az $F_{g(a)} \circ g \cdot G_a$ is folytonos az a pontban, azaz $F_{g(a)} \circ g \cdot G_a \in C[a]$. Ez éppen azt jelenti, hogy $f \circ g \in D[a]$, sőt

$$(f \circ g)'(a) = (F_{g(a)} \circ g \cdot G_a)(a) = F_{g(a)}(g(a)) \cdot G_a(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

7.14. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton és folytonos függvény. Legyen $a \in I$, $f \in D[a]$ és $f'(a) \neq 0$. Ekkor a $b := f(a)$ pontban $f^{-1} \in D[b]$, és $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.*

Bizonyítás. A szigorú monotonitás miatt az f függvény bijekció az I és a $J := f(I)$ között (a Bolzano-tétel következményeként J is nyílt intervallum). Ezért létezik az $f^{-1} : J \to I$ inverzfüggvény. Az f^{-1} függvény b pontbeli differenciálhatóságához meg kell mutatni, hogy létezik a

$$\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}$$

határérték (és ez valós szám).
Legyen $(y_n) \subset J$, $y_n \to b$ tetszőleges sorozat. Bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $x_n := f^{-1}(y_n)$. Az $(x_n) \subset I$ sorozat konvergens, és $\lim x_n = a$, mert az inverzfüggvény folytonosságáról szóló tétel és az átviteli elv szerint

$$y_n \to b \Rightarrow f^{-1}(y) \to f^{-1}(b), \text{ azaz } x_n \to a.$$

Ezért
$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} = \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n - a}} \to \frac{1}{f'(a)},$$

hiszen $f'(a) \neq 0$. Mivel bármely $(y_n) \subset J$, $y_n \to b$ esetén az $(\frac{f^{-1}(y_n)-f^{-1}(b)}{y_n-b})$ konvergens, ezért a határértékre vonatkozó átviteli elv szerint létezik a

$$\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}$$

határérték. Tehát $f^{-1} \in D[b]$, és az is látható, hogy

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

7.3.3. Lokális növekedés, fogyás, lokális szélsőérték

7.3. Definíció. *Legyen $f : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$, $a \in D(f)$. Azt mondjuk, hogy f* **lokálisan nő az a pontban**, *ha $\exists K(a) \subset D(f)$, hogy $\forall x_1 \in K(a)$, $x_1 < a$ esetén $f(x_1) \leq f(a)$ és $\forall x_2 \in K(a)$, $x_2 > a$ esetén $f(x_2) \geq f(a)$.*

Értelemszerű módosítással kapjuk a lokális fogyás fogalmát.

7.15. Tétel. *Ha $f \in D[a]$, és f az a pontban lokálisan nő, akkor $f'(a) \geq 0$.*

Bizonyítás. Mivel f lokálisan nő az a-ban, ezért $\exists K(a) \subset D(f)$, hogy $\forall x \in K(a)$, $x \neq a$ esetén
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

(ha $x < a$, akkor $x - a < 0$ és $f(x) - f(a) \leq 0$, míg $x > a$ esetén $x - a > 0$ és $f(x) - f(a) \geq 0$).
Az $f \in D[a]$, ezért

$$\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0, \text{ azaz } f'(a) \geq 0.$$

7.16. Tétel. *Ha $f \in D[a]$, és f lokálisan fogyó az a pontban, akkor $f'(a) \leq 0$.*

Bizonyítás. Az előző tétel bizonyításának mintájára történik.

Megjegyzés: Az f függvény **szigorúan lokálisan nő**, ha $\exists K(a) \subset D(f)$, hogy $\forall x_1, x_2 \in K(a),\ x_1 < a < x_2$ esetén $f(x_1) < f(a) < f(x_2)$.
Ha $f \in D[a]$ és szigorúan lokálisan nő az a-ban, akkor ugyan $\forall x \in K(a),\ x \neq a$ esetén

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0,$$

de a határértékre

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

mondható, így $f'(a) \geq 0$. Például az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t) := t^3$ a 0-ban szigorúan lokálisan nő, de $f'(0) = (t^3)'_{|t=0} = 3t^2_{|t=0} = 0$.

7.17. Tétel. *Ha $f \in D[a]$, és $f'(a) > 0$, akkor f szigorúan lokálisan nő az a pontban.*

Bizonyítás. Mivel $f \in D[a]$, ezért a főtétel miatt $\exists F_a \in C[a]$ olyan, hogy $\forall x \in D(f)$ esetén $f(x) - f(a) = F_a(x) \cdot (x - a)$.
$F_a(a) = f'(a) > 0$, ezért a folytonos függvény jeltartásáról szóló tétel miatt $\exists K(a) \subset D(f)$ olyan, hogy $\forall x \in K(a)$ esetén $F_a(x) > 0$. Ezért $\forall x_1 \in K(a),\ x_1 < a$ esetén

$$f(x_1) - f(a) = F_a(x_1) \cdot (x_1 - a) < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(a),$$

míg $\forall x_2 \in K(a),\ x_2 > a$ esetén

$$f(x_2) - f(a) = F_a(x_2) \cdot (x_2 - a) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(a),$$

7.18. Tétel. *Ha $f \in D[a]$, és $f'(a) < 0$, akkor f szigorúan lokálisan fogy az a pontban.*

Bizonyítás. Az előző tétel mintájára történik a bizonyítás.

7.4. Definíció. *Legyen $f : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$, $a \in D(f)$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban* **lokális minimuma** *van, ha $\exists K(a)$, hogy $\forall x \in K(a) \cap D(f)$ esetén $f(x) \geq f(a)$.*
Szigorú lokális minimum *akkor van, ha $\forall x \in K(a) \cap D(f)$, $x \neq a$ esetén $f(x) > f(a)$.*
Értelemszerű változtatással kapjuk a **lokális maximum** *és a* **szigorú lokális maximum** *fogalmát.*
A minimum és a maximum közös elnevezése a **szélsőérték**.

7.19. Tétel. *Ha $f \in D[a]$, és az f függvénynek lokálisan szélsőértéke van az a pontban, akkor $f'(a) = 0$.*

Bizonyítás. Ha $f'(a) \neq 0$ lenne (például $f'(a) > 0$), akkor f az a-ban szigorúan lokálisan növekedne, így nem lehetne lokális szélsőérték a-ban.

7.3.4. Középértéktételek

7.5. Definíció. *Azt mondjuk, hogy f* **differenciálható az** $A \subset D(f)$ **halmazon** *(jele $f \in D(A)$), ha $\forall a \in A$ esetén $f \in D[a]$.*

7.20. Tétel. *(Rolle)*
Ha $f \in C[a,b]$, $f \in D(a,b)$, és $f(a) = f(b)$, akkor $\exists c \in (a,b)$ olyan, hogy $f'(c) = 0$.

Bizonyítás. Ha $\forall x \in [a,b]$ esetén $f(x) = f(a) = f(b)$, azaz f konstansfüggvény, akkor például a $c := \frac{a+b}{2} \in (a,b)$ pontban $f'(c) = 0$. (A c másként is választható!)
Ha $\exists x_0 \in (a,b)$, hogy $f(x_0) \neq f(a)$, akkor az $f \in C[a,b]$ miatt a Weierstrass-tétel szerint van minimuma és van maximuma is az f-nek, és legalább az egyiket nem az $[a,b]$ intervallum végpontjában veszi fel, hanem az intervallum belsejében. Legyen ez a pont c. Ekkor a szélsőérték szükséges feltétele szerint $f'(c) = 0$.

7.21. Tétel. *(Cauchy-féle középértéktétel)*
Legyen $f, g \in C[a,b]$, $f, g \in D(a,b)$, és tegyük fel, hogy $\forall x \in (a,b)$ esetén $g'(x) \neq 0$. Ekkor $\exists c \in (a,b)$ olyan, hogy

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Bizonyítás. Ha $g(b) = g(a)$ lenne, akkor Rolle tétele miatt g' az (a,b) intervallum valamelyik pontjában 0 lenne, de ezt kizártuk. Így beszélhetünk az $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ hányadosról.
Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$, és tekintsük a $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\phi(t) := f(t) - \lambda g(t)$ függvényt. Könnyű ellenőrizni, hogy $\lambda := \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ esetén $\phi(a) = \phi(b)$. Továbbá $\phi \in C[a,b]$ és $\phi \in D(a,b)$. Így a Rolle-tétel szerint $\exists c \in (a,b)$ olyan, hogy $\phi'(c) = 0$. Mivel $\phi'(t) := f'(t) - \lambda g'(t)$ $(t \in (a,b))$, ezért

$$0 = \phi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c),$$

amelyből $g'(c) \neq 0$ miatt

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

következik.

7.22. Tétel. *(Lagrange-féle középértéktétel)*
Legyen $f \in C[a,b]$, $f \in D(a,b)$. Ekkor $\exists c \in (a,b)$ olyan, hogy

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b-a)$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a Cauchy-féle középértéktételt a $g(t) := t$ függvényre.

7.23. Tétel. *(Darboux-tétel)*
Legyen I nyílt intervallum, $f \in D(I)$. Ekkor $\forall [a,b] \subset I$ és $\forall d \in \mathbb{R}$ számra, amely $f'(a)$ és $f'(b)$ közé esik, $\exists c \in (a,b)$ olyan, hogy

$$f'(c) = d.$$

Bizonyítás. Legyen $[a,b] \subset I$. Tegyük fel, hogy $f'(a) < f'(b)$ és $d \in (f'(a), f'(b))$. Tekintsük a $\phi : I \to \mathbb{R}$, $\phi(t) = f(t) - dt$ függvényt. Nyilván $\phi \in C[a,b]$, ezért a Weierstrass-tétel szerint van minimuma és van maximuma is a ϕ-nek az $[a,b]$ intervallumon. Megmutatjuk, hogy ϕ-nek sem az a-ban, sem b-ben nincs minimuma. Ugyanis $\phi'(t) = f'(t) - d$, és

$$\begin{aligned} &\phi'(a) = f'(a) - d < 0, \text{ ezért } \phi \text{ } a\text{-ban szigorúan lokálisan fogyó,} \\ &\phi'(b) = f'(b) - d > 0, \text{ ezért } \phi \text{ } b\text{-ben szigorúan lokálisan nő.} \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy ϕ-nek az $[a,b]$ intervallum belsejében van a minimuma, azaz $\exists c \in (a,b)$, hogy $\forall x \in [a,b]$ esetén $\phi(c) \leq \phi(x)$. Ekkor a lokális szélsőérték szükséges feltétele szerint $\phi'(c) = 0$, azaz $f'(c) - d = 0$.

7.3.5. A globális monotonitás elégséges feltételei

7.24. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f \in D(I)$, és $\forall x \in I$ esetén $f'(x) > 0$. Ekkor f szigorúan monoton növekedő az I intervallumon.*

Bizonyítás. Legyen $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. A Lagrange-féle középértéktétel szerint $\exists c \in (x_1, x_2)$ olyan, hogy

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1).$$

Az $f'(c) > 0$, $x_2 - x_1 > 0$, ezért $f(x_2) - f(x_1) > 0$, azaz $f(x_1) < f(x_2)$.

7.25. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f \in D(I)$, és $\forall x \in I$ esetén $f'(x) < 0$. Ekkor f szigorúan monoton csökken az I intervallumon.*

Bizonyítás. Hasonló az előbbi tételhez.

7.26. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f \in D(I)$, és $\forall x \in I$ esetén $f'(x) = 0$. Ekkor $\exists c^* \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $\forall x \in I$ esetén $f(x) = c^*$ azaz f konstans az I intervallumon.*

Bizonyítás. Legyen $x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2$. A Lagrange-féle középértéktétel szerint $\exists c \in (x_1, x_2)$ olyan, hogy

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1) = 0 \cdot (x_2 - x_1) = 0,$$

azaz $f(x_1) = f(x_2)$.

7.1. Megjegyzés. A tétel intervallumon differenciálható függvényről szól. Például az $f : (0,1) \cup (2,3) \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 2, & \text{ha } 2 < x < 3 \end{cases}$$

függvényre $\forall x \in (0,1) \cup (2,3)$ esetén $f'(x) = 0$, de a függvény mégsem konstansfüggvény.

7.3.6. Konvex és konkáv függvények

7.6. Definíció. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f* **konvex függvény***, ha $\forall x_1, x_2 \in I$ és $\forall \lambda \in (0,1)$ esetén $f(\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1) \leq \lambda f(x_2) + (1-\lambda) f(x_1)$. Az f* **konkáv függvény***, ha a $(-f)$ konvex, azaz az egyenlőtlenségben $\geq$ áll.*

7.27. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f \in D(I)$. Ha f' szigorúan monoton növekedő az I intervallumon, akkor f konvex.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f' szigorúan monoton növekedő, és legyen $x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2$. Vezessük be az

$$l : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ l(x) := f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

és az

$$r(x) : I \to \mathbb{R},\ r(x) := f(x) - l(x)$$

függvényeket. Nyilván $r \in D(I)$, $r(x_1) = f(x_1) - l(x_1) = 0$ és $r(x_2) = f(x_2) - l(x_2) = 0$, ezért a Rolle-tétel szerint $\exists c \in (x_1, x_2)$ olyan, hogy $r'(c) = 0$. Mivel $\forall t \in I$ esetén

$$r'(t) = f'(t) - l'(t) = f'(t) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

ezért f' szigorú monoton növekedéséből következik, hogy a tőle egy konstansban különböző r' is szigorúan monoton növekedő. Mivel $r'(c) = 0$, ezért

$$\forall x \in (x_1, c) \text{ esetén } r'(c) < 0$$

$$\forall x \in (c, x_2) \text{ esetén } r'(c) > 0.$$

Ez azt jelenti, hogy az r függvény az (x_1, c) intervallumon fogyó, a (c, x_2) intervallumon pedig növekedő. Figyelembe véve, hogy $r(x_1) = r(x_2) = 0$, $\forall x \in (x_1, x_2)$ esetén $r(x) \leq 0$. Eszerint

$$\forall x \in (x_1, x_2) \text{ esetén } f(x) - (f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)) \leq 0.$$

Legyen $\lambda := \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \in (0, 1)$. Ekkor egyrészt $x = \lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1$, másrészt

$$f(\lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1) \leq f(x_1) + (f(x_2) - f(x_1)) \cdot \lambda,$$

vagy

$$f(\lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1) \leq \lambda f(x_2) + (1 - \lambda)f(x_1).$$

Tehát az f konvex az I intervallumon.

7.7. Definíció. *Legyen I nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f* **kétszer folytonosan differenciálható** *az I intervallumon, ha $f' \in D(I)$, és $f'' = (f')' \in C(I)$.*
Jele: $f \in C^2(I)$.

7.28. Tétel. *Legyen $f \in C^2(I)$ és $\forall x \in I$ esetén $f''(x) > 0$ Ekkor f konvex.*

Bizonyítás. Mivel f' deriváltja pozitív az I intervallumon, ezért f' szigorúan monoton növekedő az I-n. Az előző tétel szerint, ha f' szigorúan monoton növekedő, akkor f konvex.

7.29. Tétel. *Ha $f \in C^2(I)$, és $\forall x \in I$ esetén $f''(x) < 0$, akkor f konkáv.*

Bizonyítás.A $(-f)$ függvényre alkalmazzuk az előző tételt.

7.8. Definíció. *Legyen $f : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$, $a \in D(f)$, és tegyük fel, hogy $\exists \delta > 0$ olyan, hogy $(a - \delta, a + \delta) \subset D(f)$.*
Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban **inflexiója** *van, ha $f_{|(a-\delta,a)}$ konvex és $f_{|(a,a+\delta)}$ konkáv, vagy $f_{|(a-\delta,a)}$ konkáv és $f_{|(a,a+\delta)}$ konvex.*

7.30. Tétel. *Legyen $f \in C^2(\alpha, \beta)$. Ha az f függvénynek inflexiója van az $a \in (\alpha, \beta)$ pontban, akkor $f''(a) = 0$.*

Bizonyítás. Indirekt módon, tegyük fel, hogy $f''(a) \neq 0$, például $f''(a) > 0$. Akkor az $f'' \in C[a]$ miatt $\exists \delta > 0$, hogy $\forall x \in (a - \delta, a + \delta)$ esetén $f''(x) > 0$, amiből következik, hogy f konvex az $(a - \delta, a + \delta)$ intervallumon, de akkor f-nek nincs inflexiója a-ban. Ez ellentmondás, tehát $f''(a) = 0$.

Megjegyezzük, hogy ha az f függvény egy I intervallumon elsőfokú polinom, azaz $\exists A, B \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $\forall x \in I$ esetén $f(x) = Ax + B$, akkor f konvex és konkáv is az I bármely részintervallumán, ezért az I intervallum minden pontjában inflexiója van az f függvénynek.

7.3.7. Taylor-formula

Legyen f az a pont egy környezetében n-szer differenciálható függvény. Legyen

$$T_{n,a} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ T_{n,a}(x) := f(a)+f'(a)\cdot(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

az f függvény a ponthoz tartozó Taylor-polinomja. A következő tétel segítségével meg lehet becsülni, hogy az n-ed fokú Taylor-polinom mennyire jól közelíti a függvényt.

7.31. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$, $a \in D(f)$. Tegyük fel, hogy $\exists K(a) \subset D(f)$, hogy $f \in C^{n+1}(K(a))$. Legyen $x \in K(a)$ tetszőleges. Ekkor $\exists c \in K(a)$ az a és az x között olyan, hogy*

$$f(x) = T_{n,a}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \quad (\textit{Taylor-formula})$$

Bizonyítás. Legyen $r : K(a) \to \mathbb{R},\ r(t) := f(t) - T_{n,a}(t)$, továbbá

$$p : K(a) \to \mathbb{R},\ p(t) := (t-a)^{n+1}.$$

Legyen $x \in K(a)$ tetszőleges. Tegyük fel, hogy $x > a$. Alkalmazzuk a Cauchy-féle középértéktételt az $[a, x]$ intervallumon az r és p függvényekre. Mivel $t \in (a, x)$ esetén $p'(t) = (n+1)(t-a)^n \neq 0$, azért $\exists c_1 \in (a, x)$ olyan, hogy

$$\frac{r(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{r(x)-r(a)}{p(x)-p(a)} = \frac{r'(c_1)}{p'(c_1)}.$$

Vegyük észre, hogy

$$r'(t) = f'(t)-T'_{n,a}(t) = f'(t)-(f'(a)+\frac{f''(a)}{2!}2(t-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}n(t-a)^{n-1}),$$

így $r'(a) = 0$. Nyilván $p'(t) = (n+1)(t-a)^n$, így $p'(a) = 0$. Ezért a Cauchy-féle középértéktételt alkalmazva az $[a, c_1]$ intervallumon az r' és p' függvényekre azt kapjuk, hogy $\exists c_2 \in (a, c_1)$ olyan, hogy

$$\frac{r'(c_1)}{p'(c_1)} = \frac{r'(c_1)-r'(a)}{p'(c_1)-p'(a)} = \frac{r''(c_2)}{p''(c_2)}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy bármely $1 \leq k \leq n$ esetén

$$r^{(k)}(t) = f^{(k)}(t) - (f^{(k)}(a) + \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(k+1)k(k-1)\ldots 2(t-a) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}n(n-1)\ldots(n-k+1)(t-a)^{n-k}),$$

így $r^{(k)}(a) = 0$. Nyilván $p^{(k)}(t) = (n+1)n\ldots(n+1-(k-1))(t-a)^{n+1-k}$, így $p^{(k)}(a) = 0$; de $\forall t \in K(a)$ esetén $p^{(n+1)}(t) = (n+1)!$ Az előző lépést még $(n-1)$-szer alkalmazva, az utolsó esetben $\exists c_{n+1} \in (a, c_n)$ olyan, hogy

$$\frac{r^{(n)}(c_n)}{p^{(n)}(c_n)} = \frac{r^{(n)}(c_n)-r^{(n)}(a)}{p^{(n)}(c_n)-p^{(n)}(a)} = \frac{r^{(n+1)}(c_{n+1})}{p^{(n+1)}(c_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}.$$

(Nyilván $T_{n,a}$ legfeljebb n-edfokú polinom, ezért $T_{n,a}^{(n+1)}$ már azonosan 0.) Összefoglalva

$$\frac{f(x)-T_{n,a}(x)}{(x-a)^{n+1}}=\frac{r(x)}{p(x)}=\frac{r'(c_1)}{p'(c_1)}=\ldots=\frac{r^{(n)}(c_n)}{p^{(n)}(c_n)}=\frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!},$$

ezért a $c:=c_{n+1}\in(a,x)$ választással

$$f(x)-T_{n,a}(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

7.3.8. L'Hospital-szabály

7.32. Tétel. *Legyen $I\subset\mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f,g\in D(I)$. Legyen $a\in\dot{I}$ és $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$. Ha $\exists\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, akkor $\exists\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ is, és*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bizonyítás. Abban a speciális esetben végezzük el a bizonyítást, amikor $a\in I,\ f(a)=g(a)=0$ és $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=:L\in\mathbb{R}$. Ekkor $\forall\varepsilon>0$ számhoz $\exists\delta>0$, hogy $\forall x\in K_\delta(a)\subset I,\ x\neq a$ esetén

$$L-\varepsilon<\frac{f'(x)}{g'(x)}<L+\varepsilon.$$

Legyen $x\in K_\delta(a)$ tetszőleges, $x\neq a$. A Cauchy-féle középértéktétel szerint $\exists c\in K_\delta(a)$ az a és x között, hogy

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Így

$$L-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<L+\varepsilon$$

is teljesül, amiből következik, hogy

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L.$$

8. fejezet

Integrálhatóság, integrálszámítás

Egy függvény integrálhatósága azt jelenti, hogy a „függvény alatti tartománynak” van területe. Módszert dolgozunk ki a terület meghatározására. Számos problémát ilyen területszámításra vezetünk vissza. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk.

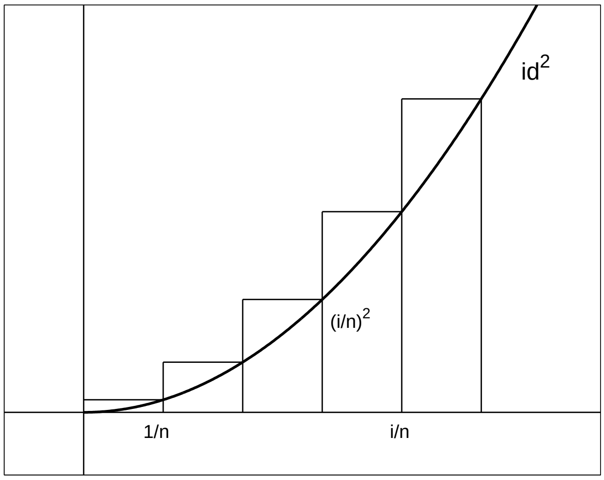
- Riemann-integrál fogalma és geometriai jelentése
- Integrálási szabályok
- Newton-Leibniz formula
- Primitív függvény
- Elemi függvények primitív függvényei
- Az integrál néhány geometriai és fizikai alkalmazása
- Fourier sor
- Improprius integrál

8.1. Integrálszámítás $\boxed{\text{A}}$

8.1.1. A Riemann-integrál fogalma és geometriai jelentése

Ismert, hogy az $u > 0,\ v > 0$ oldalú téglalap területe uv. Állapodjunk meg abban, hogy ha $u > 0$ és $v < 0$, akkor uv a téglalap „előjeles területe” legyen. Már a matematika korai korszakában is foglalkoztak görbevonalú alakzatok területével. Nézzük meg mi is, hogy a

$$H := \{(x, y) \mid x \in [0, 1],\ y \in [0, x^2]\}$$



8.1. ábra.

„parabola alatti tartománynak” mi lehet a területe.
Osszuk fel a $[0,1]$ intervallumot n egyenlő részre. Az osztópontok $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{n}$, $x_2 = \frac{2}{n}, \ldots,$ $x_n = \frac{n}{n}$. Legyen $S_n := \frac{1}{n} \cdot (\frac{1}{n})^2 + \frac{1}{n} \cdot (\frac{2}{n})^2 + \ldots + \frac{1}{n} \cdot (\frac{n}{n})^n$, azaz olyan téglalapok területének az összege, amelyeknek az alapja $\frac{1}{n}$, a magassága pedig az id^2 függvény osztópontokban vett függvényértéke (8.1. ábra).

S_n egy „lépcsősidom” területe. Ha növeljük az n osztópontszámot, akkor a lépcsősidomok egyre jobban illeszkednek a H halmazhoz, így elvárható, hogy az (S_n) sorozat határértéke éppen a H halmaz területe legyen. Felhasználva, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$,

$$\lim S_n = \lim \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) = \lim \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$
$$= \lim \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} = \lim \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{6} = \frac{1}{3}.$$

Legyen tehát a H halmaz területe $\frac{1}{3}$.
Ezt a gondolatmenetet általánosítjuk.
Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény.
Legyen

$$\tau := \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n\} \subset [a,b],$$

ahol

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$$

az $[a,b]$ intervallum egy **felosztása**.
Minden $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumban vegyünk fel egy ξ_i pontot $(i = 1, 2, \ldots, n.)$

Készítsük el az f függvény τ felosztáshoz tartozó közelítő összegét:

$$\sigma(\tau) := f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\ldots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}).$$

(Ez a $\sigma(\tau)$ felel meg a bevezető példa S_n lépcsősidom területének, ott a ξ_i pontot mindig az intervallum jobb szélén vettük.)
Akkor mondjuk a függvényt integrálhatónak, ha a $\sigma(\tau)$ közelítő összegek „finomodó" felosztások során tetszőlegesen közel kerülnek egy számhoz. Pontosabban:

8.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény* **integrálható az [a,b] intervallumon**, *ha van olyan $I \in \mathbb{R}$ szám, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan $\delta > 0$, hogy az $[a, b]$ intervallum minden olyan τ felosztására, amelyben*

$$\max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, 2, \ldots, n\} < \delta$$

és a τ felosztáshoz tartozó $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumokban vett tetszőleges $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pontok esetén a $\sigma(\tau) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ közelítő összegre

$$|\sigma(\tau) - I| < \varepsilon.$$

Ha f integrálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor ezt $f \in R[a, b]$ jelölje (Riemann tiszteletére, aki az integrált ilyen módon bevezette), és legyen

$$\int_a^b f := I.$$

(„integrál a-tól b-ig"). Továbbá ekkor azt mondjuk, hogy a

$$H := \{(x, y) \mid x \in [a, b],\ y \in [0, f(x)],\ \textit{ha } f(x) \geq 0,\ \textit{vagy } y \in [f(x), 0],\ \textit{ha } f(x) < 0, \}$$

halmaznak („görbe alatti tartomány") van előjeles területe, és ez a terület az $I \in \mathbb{R}$ szám.

Röviden úgy szoktak hivatkozni erre a fogalomra, hogy bevezetve a $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$ jelölést,

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum f(\xi_i)\Delta x_i = I$$

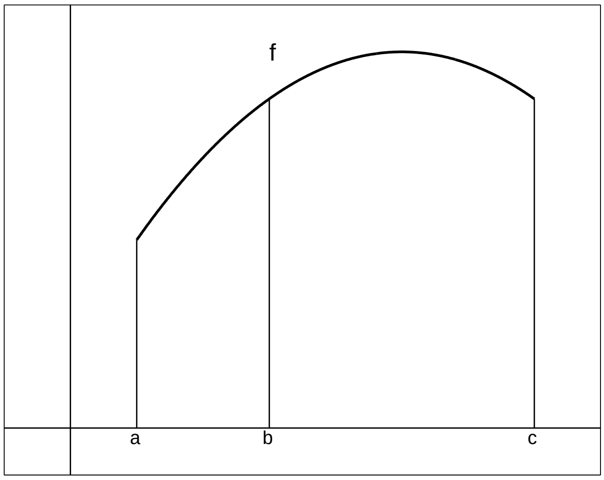
vagy

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum f(\xi)\Delta x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(Érdemes nyomon követni a szimbólumok metamorfózisát!)
Könnyű látni, hogy ha $f : [a, b] \to \mathbb{R},\ f(x) = c$ egy konstans függvény, akkor

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1}) = c(b - a),$$

amint ezt a szemlélet alapján is vártuk, tehát $f \in R[a, b]$ és $\int_a^b f = c(b - a)$.



8.2. ábra.

8.1.2. A Riemann-integrál és a műveletek kapcsolata

Belátható, hogy ha $f \in C[a,b]$, akkor $f \in R[a,b]$. A szemléletből is következik, hogy ha $f \in R[a,b]$ és $f \in R[b,c]$, akkor $f \in R[a,c]$, sőt

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f \qquad \text{(8.2. ábra)}.$$

Már nem olyan nyilvánvaló, de igazolható, hogy

8.1. Tétel. *Ha $f \in R[a,b]$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda f \in R[a,b]$, és*

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

8.2. Tétel. *Ha $f, g \in R[a,b]$, akkor $f + g \in R[a,b]$, és*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

8.3. Tétel. *Ha $f, g \in R[a,b]$, és $f(x) \geq g(x)$ minden $x \in [a,b]$ esetén, akkor*

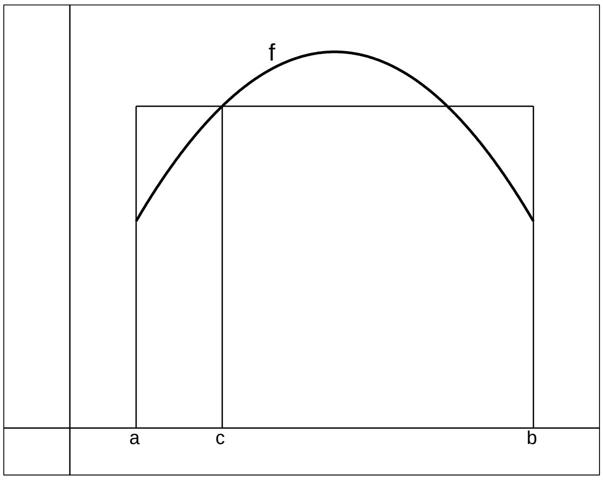
$$\int_a^b f \geq \int_a^b g.$$

Az utóbbi tétel fontos következménye, hogy ha $f \in R[a,b]$, akkor $|f| \in R[a,b]$, és

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

miatt

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$



8.3. ábra.

következik, így

$$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|.$$

8.1.3. Newton–Leibniz-formula

Szemléletesen jól látható, hogy

8.4. Tétel. *Ha $f \in C[a,b]$, akkor van olyan $c \in [a,b]$, hogy*

$$\int_a^b f = f(c)\cdot(b-a) \qquad \textit{(8.3. ábra).}$$

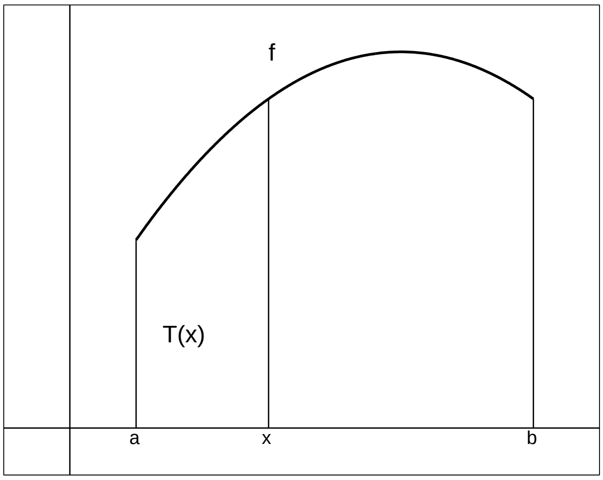
Az $\frac{\int_a^b f}{b-a}$ számot az f **integrálközepé**nek nevezik. Ez a véges sok szám átlagának az egyik általánosítása. (A tétel szerint az integrálközép egy függvényérték.)
Az eddigi állítások valóban szemléletesek, de az integrál kiszámításának kényelmes módszerével még adósak vagyunk.
Az egyszerűség kedvéért legyen $f \in C[a,b]$. Vezessük be a $T : [a,b] \to \mathbb{R}$, $T(x) := \int_a^x f$ **területfüggvény**t (8.4. ábra).

Legyen $\alpha \in (a,b)$ egy tetszőleges pont, és vizsgáljuk meg az $x \in (a,b)$, $x \ne \alpha$ esetén a

$$\frac{T(x)-T(\alpha)}{x-\alpha}$$

különbségi hányadost.

$$\frac{T(x)-T(\alpha)}{x-\alpha} = \frac{\int_a^x f - \int_x^\alpha f}{x-\alpha} = \frac{1}{x-\alpha}\int_\alpha^x f = \frac{1}{x-\alpha} f(c)(x-\alpha) = f(c),$$



8.4. ábra.

ahol $c \in [\alpha, x]$ (8.5. ábra). Ebből kihasználva, hogy $f \in C[\alpha]$ is,

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{T(x) - T(\alpha)}{x - \alpha} = \lim_{x\to\alpha} f(c) = f(\alpha),$$

másrészt

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{T(x) - T(\alpha)}{x - \alpha} = T'(\alpha).$$

Tehát a T területfüggvény olyan, hogy a deriváltja az f. Mivel $T(a) = 0$ és $T(b) = \int_a^b f$, ezért

$$\int_a^b f = T(b) - T(a).$$

Eljutottunk (meglehetősen heurisztikus úton) egy nevezetes eredményhez.

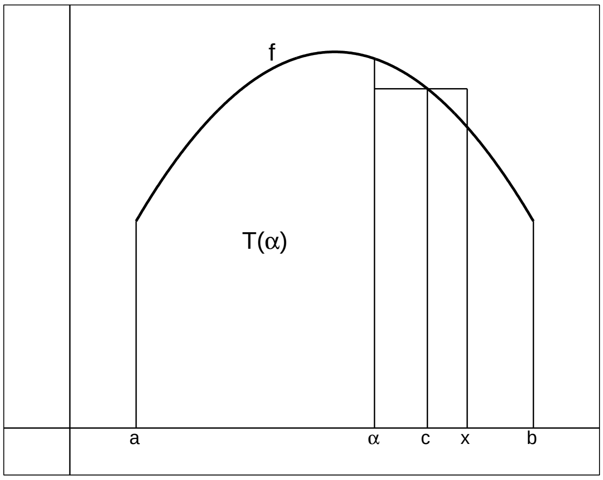
8.5. Tétel. *(Newton–Leibniz-formula)*
Ha $f \in C[a, b]$, és T olyan függvény, hogy $T' = f$, akkor

$$\int_a^b f = T(b) - T(a).$$

Például ha $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, akkor ilyen T függvénynek alkalmas a $T : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $T(x) := \frac{x^3}{3}$ (hiszen $(\frac{x^3}{3})' = x^2$), így

$$\int_0^1 f = T(1) - T(0) = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3},$$

ami összhangban van a bevezető példában kapott eredménnyel.



8.5. ábra.

8.1.4. Primitív függvény

A primitív függvény bizonyos értelemben a deriválás inverze.

8.2. Definíció. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$. Az $F : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény* **primitív függvénye** *az f-nek, ha $F' = f$.*

Ha F és G primitív függvénye f-nek, akkor $F' = f$ és $G' = f$, így $(F - G)' = 0$, de egy intervallumon a függvény deriváltja csak akkor 0, ha a függvény konstans. Tehát létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy $F - G = c$, azaz egy függvény primitív függvényei legfeljebb konstansban különböznek egymástól (a T területfüggvény is csak egy konstansban különbözhet bármely más primitív függvénytől).
Végtelenül leegyszerűsödött az integrál kiszámítása, hiszen csupán az f egy primitív függvényét kell megkeresni. Ha ez F, akkor a hagyományos írásmód szerint

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b,$$

ahol $[F(x)]_a^b := F(b) - F(a)$.
Például a $\int_0^\pi \sin x \mathrm{d}x$ kiszámításához az $F(x) := -\cos x$ alkalmas primitív függvény ($(-\cos x)' = \sin x$), így

$$\int_0^\pi \sin x \mathrm{d}x = [-\cos x]_0^\pi = 1 - (-1) = 2.$$

Állapodjunk meg abban, hogy az f egy primitív függvényét F helyett $\int f$, illetve $F(x)$ helyett $\int f(x)\mathrm{d}x$ jelölje. A primitív függvény keresése a deriválás „inverze". Néhány egyszerű módszer primitív függvény keresésére (deriválással ellenőrizhető!):

$\int \lambda f = \lambda \int f, \quad \int (f+g) = \int f + \int g,$

$\int f'g = fg - \int fg'$ (parciális integrálás elve)

$\int \phi^\alpha \cdot \phi' = \frac{\phi^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, ha $\alpha \neq -1$

$\int \frac{\phi'}{\phi} = \ln \circ \phi$, ha $\phi(x) > 0$ $(x \in I)$

Ha $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)$, akkor $\int f(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b)$.

$(\int f) \circ \phi = \int (f \circ \phi \cdot \phi')$ (helyettesítéses integrál)

A deriválási „szabályok” megfordításából kapjuk az alábbi integráltáblázatot.

$\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $(\alpha \neq -1)$

$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x$, ha $x > 0$, és $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(-x)$, ha $x < 0$

$\int e^x \mathrm{d}x = e^x$, $\qquad \int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a}$

$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x$, $\qquad \int \cos x \mathrm{d}x = \sin x$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x$, $\qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x$

$\int \mathrm{sh}x \mathrm{d}x = \mathrm{ch}x$, $\qquad \int \mathrm{ch}x \mathrm{d}x = \mathrm{sh}x$

$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}x$, $\qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \mathrm{arcsin}x,\ x \in (-1,1)$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x = \mathrm{arsh}x$, $\qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \mathrm{arch}x,\ x \in (1,+\infty)$

8.1.5. Az integrál alkalmazásai

1. Ha $f, g \in R[a,b]$, és minden $x \in [a,b]$ esetén $f(x) \geq g(x)$, akkor a

$$H := \{(x,y) \mid x \in [a,b] \text{ és } g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

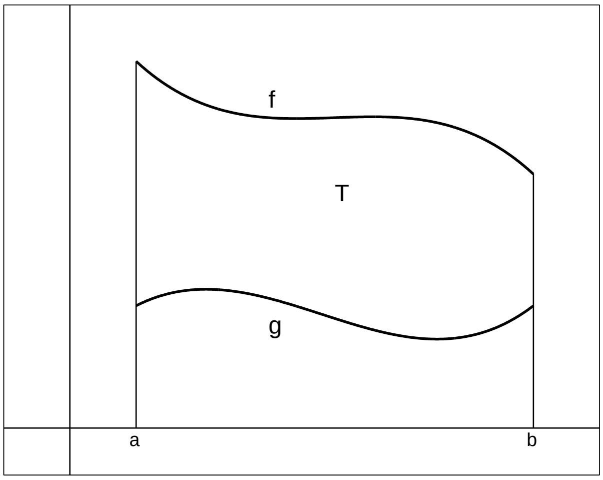
halmaz **területét** a

$$T = \int_a^b f - \int_a^b g = \int_a^b (f-g) \left(= \int_a^b f(x) - g(x)\mathrm{d}x \right)$$

képlettel számítjuk ki (8.6. ábra). (Az f és g nem feltétlenül nemnegatív függvények!)

2. A geometriából tudjuk, hogy a, b, m élű tégla térfogata $V = ab \cdot m$. Ezt általánosítva, egy T alapterületű és m magasságú hasáb térfogata $V = T \cdot m$.

Most vegyünk egy H térbeli alakzatot (pl. egy krumplit). A koordinátarendszer x tengelyére merőlegesen készítsük el a H összes síkmetszetét. (A krumplinál egy rajta átszúrt kötőtű játszhatja az x tengely szerepét.



8.6. ábra.

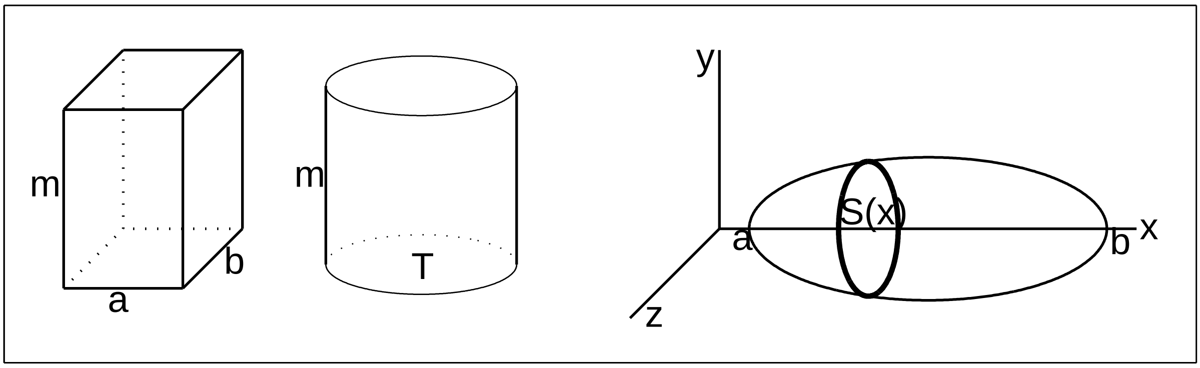
Erre merőlegesen szeletelünk.) Tegyük fel, hogy az x-nél keletkezett $S(x)$ síkmetszetnek van területe, és az a függvény, amely

$$S : [a, b] \to \mathbb{R}, \ x \mapsto S(x),$$

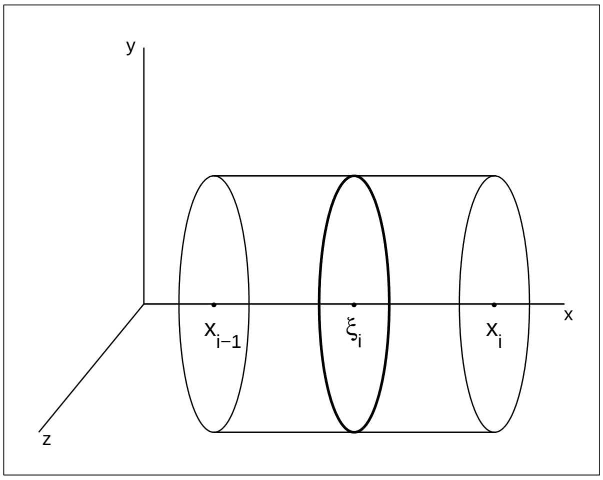
folytonos az $[a, b]$ intervallumon (ha x' és x'' közel van, akkor $S(x')$ és $S(x'')$ is közeliek) (8.7. ábra).
Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot:

$$\tau : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b,$$

és vegyünk fel tetszőlegesen $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pontokat $(i = 1, 2, \ldots, n)$ (8.8. ábra).



8.7. ábra.



8.8. ábra.

Az $S(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ egy olyan hasábnak a térfogata, amelynek „alapterülete” $S(\xi_i)$, a magassága pedig $(x_i - x_{i-1})$. Ezeket összegezve egy közelítőösszeget kapunk:

$$\sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Finomítva az $[a, b]$ intervallum felosztását, a közelítőösszegeknek lesz határértéke ($S \in C[a, b]$, ezért $S \in R[a, b]$), ez lesz a test térfogata:

$$V = \lim_{x_i - x_{i-1} \to 0} \sum S(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x.$$

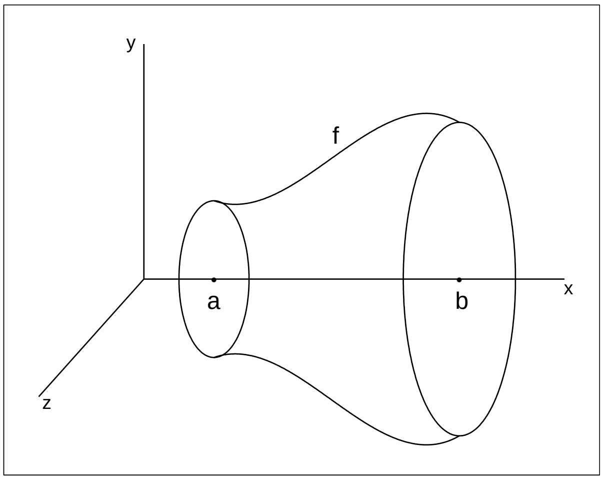
Különösen egyszerűvé válik a térfogat kiszámítása, ha egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C[a, b]$, $f(x) \geq 0$ ($x \in [a, b]$) függvény „x tengely körüli megforgatásával” származtatott a H „forgástest” (8.9. ábra). Ekkor az $S(x)$ síkmetszet területe egy kör területe:

$$S(x) = \pi f^2(x),$$

így

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)\mathrm{d}x.$$

Könnyen látható a **Cavalieri-elv** is, amely szerint ha két testnek egy síkkal párhuzamos összes síkmetszete páronként egyenlő (minden x-re $S_1(x) = S_2(x)$), ahol az x tengely a síkra merőleges egyenes), és az így nyert S_1



8.9. ábra.

és S_2 függvények folytonosak, akkor a két test térfogata is egyenlő, hiszen $S_1 = S_2$ miatt

$$\int_a^b S_1(x)\mathrm{d}x = \int_a^b S_2(x)\mathrm{d}x.$$

3. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonosan deriválható függvény. A

$$H := \{(x, f(x) \mid x \in [a, b])\}$$

halmazt az f **grafikonjá**nak is szokták nevezni. Szeretnénk ennek az ívhosszát is kiszámítani. Ismét osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot:

$$\tau : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b.$$

Az $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ és az $(x_i, f(x_i))$ pontot összekötő szakasz hossza (8.10. ábra)

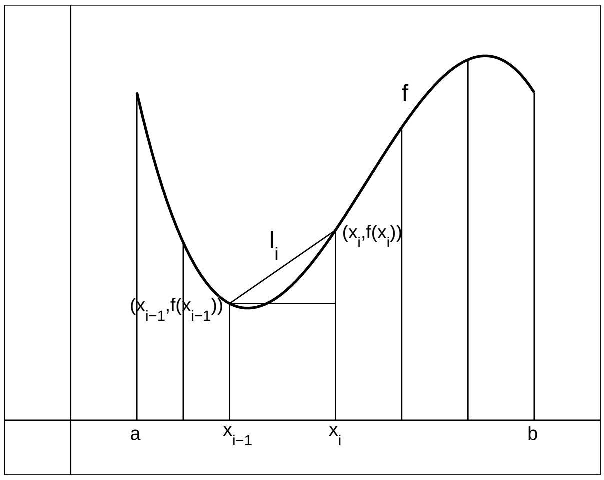
$$l_i := \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = (x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + \left[\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right]^2}.$$

A Lagrange-középértéktétel szerint van olyan $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, amelyre $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$, ezért

$$l_i = (x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}.$$

Látható, hogy az f grafikonjához közel eső töröttvonal hossza

$$\sum_{i=1}^{n} l_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}(x_i - x_{i-1}),$$



8.10. ábra.

amely a $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}, \phi(x) := \sqrt{1+[f'(x)]^2}$ függvénynek egy integrálközelítő összege. Tehát az f **grafikonjának ívhossza**

$$I(f) = \lim_{x_i - x_{i-1} \to 0} \sum \sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x.$$

4. Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f(x) \geq 0\ (x \in [a,b])$ folytonosan deriválható függvény, akkor az f grafikonjának x tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest palástjának **felszíne** hasonló meggondolással adódik:

$$P(f) = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x.$$

5. Ismert, hogy egy tömegpontrendszer tömegközéppontjához vezető vektort az

$$\underline{r}_s = \frac{m_1\underline{r}_1 + m_2\underline{r}_2 + \ldots + m_n\underline{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

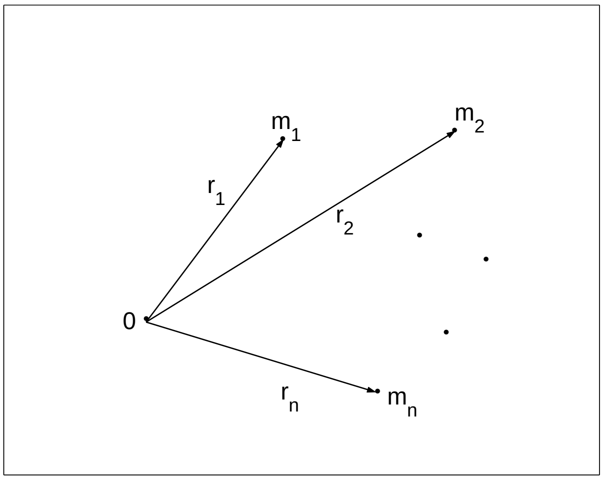
adja, ahol m_i az i-edik tömegpont tömege, $\underline{r}_i$ pedig egy rögzített pontból a tömegponthoz vezető helyvektor (8.11. ábra). Legyen $f \in R[a,b],\ f(x) \geq 0,\ x \in [a,b]$, és

$$H := \{(x,y) \mid x \in [a,b],\ y \in [0, f(x)]\}$$

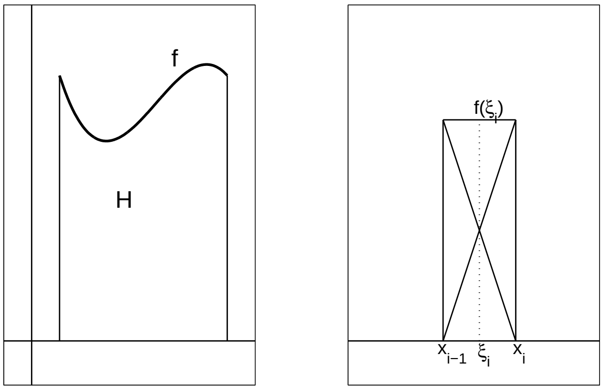
egy homogén, ρ sűrűségű lemez (8.12. ábra).

A lemez tömegközéppontjának meghatározásához osszuk fel az $[a,b]$ intervallumot.

$$\tau : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b.$$



8.11. ábra.



8.12. ábra.

A $\xi_i := \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ pontokat választva az $[x_{i-1}, x_i] \times [0, f(\xi_i)]$ téglalap tömegközépponjához vezető helyvektor

$$\underline{r}_i\left(\xi_i, \frac{f(\xi_i)}{2}\right),$$

és a téglalapot helyettesítő tömegpont tömege

$$m_i = \rho f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

A tömegközéppont első koordinátájának közelítőértéke

$$\frac{m_1\xi_1 + m_2\xi_2 + \ldots + m_n\xi_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n \rho f(\xi_i) \cdot \xi_i(x_i - x_{i-1})}{\sum_{i=1}^n \rho f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})},$$

a második koordináta közelítőértéke pedig

$$\frac{m_1\frac{f(\xi_1)}{2} + m_2\frac{f(\xi_2)}{2} + \ldots + m_n\frac{f(\xi_n)}{2}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \rho f^2(\xi_i)(x_i - x_{i-1})}{\sum_{i=1}^n \rho f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})}.$$

Látható, hogy mindkét kifejezés integrálközelítő összegeket tartalmaz, ezért nem meglepő, hogy a **lemez tömegközéppontjá**hoz vezető $\underline{r}_s = (x_s, y_s)$ vektor a következő lesz:

$$x_s = \frac{\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}; \quad y_s = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}.$$

6. Az O pont körül forgó m tömegű tömegpont tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = ml^2$, ahol l a tömegpont O-tól mért távolsága (8.13. ábra).

   Ha egy L hosszúságú és M tömegű rúd a rúd egyik végéhez rögzített, rá merőleges tengely körül forog, akkor a rúdnak a tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát ki tudjuk számítani. Osszuk fel a $[0, L]$ intervallumot:

$$\tau : 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = L.$$

   Az $[x_{i-1}, x_i]$ rúddarab tömege

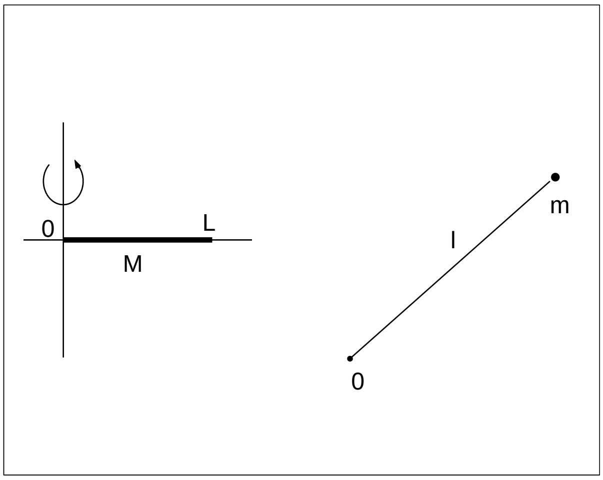
$$\frac{M}{L} \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

   a forgástengelytől mért távolságának a

$$\xi_i := x_i$$

   is választható, így ennek a darabnak a tehetetlenségi nyomatéka

$$\frac{M}{L} \cdot (x_i - x_{i-1})\xi_i^2.$$



8.13. ábra.

Az egyes részek tehetetlenségi nyomatékainak összege az egész rúd tehetetlenségi nyomatékának közelítő értéke

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{M}{L} \xi_i^2 (x_i - x_{i-1}).$$

Látható, hogy ez alapján a rúd tehetetlenségi nyomatéka

$$\Theta = \lim_{x_i - x_{i-1} \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{M}{L} \xi_i^2 (x_i - x_{i-1}) = \int_0^L \frac{M}{L} x^2 \mathrm{d}x,$$

amely a Newton–Leibniz-formula szerint

$$\int_0^L \frac{M}{L} x^2 \mathrm{d}x = \left[\frac{M}{L} \frac{x^3}{3} \right]_0^L = \frac{M}{L} \frac{L^3}{3} = \frac{1}{3} M L^2,$$

tehát $\Theta = \frac{1}{3} M L^2$.

Ez a néhány gondolatmenet bemutatta, hogy szerteágazó problémák hogyan vezethetők vissza integrálra.

Még egy jelentős alkalmazást vázolunk.

8.1.6. Fourier-sor

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π szerint periodikus függvény. (Ha $p > 0$ szerint periodikus az f függvény, akkor egy egyszerű transzformációval ($x := \frac{2\pi}{p} t$) 2π szerint periodikus függvénnyé lehet alakítani.) Az f függvényt szeretnénk a jól ismert

$\cos \circ n\mathrm{id}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ és $\sin \circ n\mathrm{id}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ függvények „összegeként" előállítani, azaz megadni olyan $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ és $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ számsorozatot, amelyre minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots \tag{8.1}$$

Nem nyilvánvaló, hogy milyen f függvény esetén lehetséges ez, és ha el is jutunk egy (a_n) és (b_n) sorozathoz, akkor a jobb oldali összeg valóban visszaadja-e az f függvényt. Most csak formálisan okoskodva induljunk ki abból, hogy $f \in C(\mathbb{R})$, és előáll minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

végtelen sor összegeként.

1. Integráljuk az (8.1) egyenlőséget $(-\pi)$-től π-ig, feltéve, hogy az összeg tagonként integrálható:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\mathrm{d}x + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\mathrm{d}x.$$

Az

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}2\pi, \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\mathrm{d}x = \left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

ezért

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x.$$

2. Legyen $k \in \mathbb{N}$ egy rögzített index. Szorozzuk meg az (8.1) egyenlőséget $(\cos kx)$-szel, és integráljuk $(-\pi)$-től π-ig:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx\mathrm{d}x + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx\mathrm{d}x.$$

Trigonometrikus formulák szerint $n \neq k$ esetén

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(\cos(n+k)x + \cos(n-k)x)\mathrm{d}x = \\ = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{\sin(n+k)x}{n+k}\right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{\sin(n-k)x}{n-k}\right]_{-\pi}^{\pi}\right) = 0,$$

az $n = k$ esetén pedig

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2kx}{2} \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2kx}{4k}\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

Hasonló számolással

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx \mathrm{d}x = 0.$$

Tehát a végtelen sor tagjai egyetlen kivétellel nullák, így

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \mathrm{d}x.$$

Ha az (8.1) egyenlőséget $(\sin kx)$-szel szorozzuk végig, és integrálunk $(-\pi)$-től π-ig, akkor ugyanilyen számolással adódik, hogy

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \mathrm{d}x.$$

3. Az f folytonos függvény esetén nyert

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x, \; a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \mathrm{d}x, \; b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \mathrm{d}x,$$

$k = 1, 2, \ldots$ számokat az f **Fourier-együtthatói**nak nevezzük. Igazolható, hogy (nagyon kivételes, a gyakorlatban elképzelhetetlen függvényektől eltekintve) f elő is áll az ezekkel az együtthatókkal képezett **Fourier-sor** összegeként:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ez a módszer rezgések, hullámok vizsgálatában gyakran használható.

8.1.7. Az improprius integrál

Eddig csak $[a, b]$ zárt, korlátos intervallumon vizsgáltuk és számoltuk az integrálhatóságot és az integrált. Kiterjesztjük fogalmainkat.

8.3. Definíció. *Legyen $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre $\forall \omega \in \mathbb{R}$, $\omega > a$ esetén $f \in R[a, \omega]$. Azt mondjuk, hogy f* **improprius integrálja konvergens** *az $[a, +\infty)$ intervallumon, ha*

$$\exists \lim_{\omega \to \infty} \int_a^{\omega} f \in \mathbb{R}$$

határérték. Ezt $f \in R[a, +\infty)$ jelölje. Ha $f \in R[a, +\infty)$, akkor

$$\int_a^{+\infty} f := \lim_{\omega \to \infty} \int_a^{\omega} f.$$

Ha nem létezik $\lim_{\omega\to\infty}\int_a^\omega f$, *vagy létezik, de nem véges, akkor azt mondjuk, hogy divergens az* f *improprius integrálja.*

Például

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\lim_{\omega\to\infty}\int_1^\omega\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\lim_{\omega\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^\omega=\lim_{\omega\to\infty}\left(-\frac{1}{\omega}+1\right)=1,$$

tehát $\mathrm{id}^{-2}\in R[1,+\infty)$.
A

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_1^\omega\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\lim_{\omega\to\infty}[\ln x]_1^\infty=\lim_{\omega\to\infty}\ln\omega=+\infty,$$

ezért $\mathrm{id}^{-1}\notin R[1,+\infty)$, vagy az id^{-1} improprius integrálja divergens.

Másféle kiterjesztéssel is foglalkozunk.

8.4. Definíció. *Legyen* $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ *olyan függvény, amelyre* $\forall\mu\in(a,b)$ *esetén* $f\in R[\mu,b]$. *Azt mondjuk, hogy* $f\in R[a,b]$, *ha*

$$\exists\lim_{\mu\to a}\int_\mu^b f\in\mathbb{R}.$$

Ekkor

$$\int_a^b f:=\lim_{\mu\to a}\int_\mu^b f.$$

Ha nem létezik a $\lim_{\mu\to a}\int_\mu^b f$, *vagy létezik, de nem véges, akkor divergensnek nevezzük az* f *integrálját az* $[a,b]$ *intervallumon. (Ez a helyzet még korlátos függvények esetén is előfordul, de leggyakrabban nem korlátos függvények az áldozatok.)*

Például

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\lim_{\mu\to0}\int_\mu^1\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\lim_{\mu\to0}[2\sqrt{x}]_\mu^1=\lim_{\mu\to0}2-2\sqrt{\mu}=2,$$

tehát $\mathrm{id}^{-\frac{1}{2}}\in R[0,1]$.

$$\int_0^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\lim_{\mu\to0}\int_\mu^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\lim_{\mu\to0}[\ln x]_\mu^1=\lim_{\mu\to0}(\ln1-\ln\mu)=+\infty,$$

tehát id^{-1} integrálja divergens a $[0,1]$ intervallumon is.
Az egyik legfontosabb eredmény az improprius integrálok körében, hogy

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ennek következménye (a fogalmak további bővítésével), hogy ha $m\in\mathbb{R}$ és $\delta>0$, akkor

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\sqrt{2\pi}\sigma,$$

ami a valószínűségszámításban játszik fontos szerepet.

8.2. Feladatok

1. Ellenőrizzük a primitív függvény keresési eljárásokat!
Megoldás: Ha $\alpha \neq -1$, akkor

   a) $(\frac{\phi^{\alpha+1}}{\alpha+1})' = \frac{1}{\alpha+1} \cdot (\alpha+1)\phi^{\alpha} \cdot \phi'$, ezért $\int \phi^{\alpha} \cdot \phi' = \frac{\phi^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

   b) $(f \cdot g - \int f \cdot g')' = f' \cdot g + f \cdot g' - f \cdot g' = f' \cdot g$, ezért $\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'$ (parciális integrálás elve)

   c) $(\int f \circ \phi \cdot \phi')' = f \circ \phi \cdot \phi'$, másrészt $((\int f) \circ \phi)' = f \circ \phi \cdot \phi'$. Mivel mindkét függvény deriváltja egy intervallumon megegyezik, ezért a függvények legfeljebb egy konstansban térhetnek el, így $(\int f) \circ \phi = \int (f \circ \phi \cdot \phi')$ (helyettesítéses integrál)

2. Keressük meg:

$\int \sin^3 x \cos x \mathrm{d}x = ?$	$\int \mathrm{tg} x \cos^5 x \mathrm{d}x = ?$	$\int \frac{2x+3}{(x^2+3)^4} \mathrm{d}x = ?$
$\int \frac{x}{1+x^2} \mathrm{d}x = ?$	$\int \mathrm{tg} x \mathrm{d}x = ?$	$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+10} \mathrm{d}x = ?$
$\int \cos(5x-1) \mathrm{d}x = ?$	$\int \frac{1}{x^2+2} \mathrm{d}x = ?$	$\int \frac{1}{x^2+3x+10} \mathrm{d}x = ?$

3. Parciális integrálással keressük meg

$\int x e^{2x} \mathrm{d}x = ?$	$\int x^2 e^{2x} \mathrm{d}x = ?$	$\int e^{2x} \sin 3x \mathrm{d}x = ?$
$\int e^{ax} \cos bx \mathrm{d}x = ?$	$\int \ln x \mathrm{d}x = ?$	$\int \sqrt{1-x^2} \mathrm{d}x = ?$

   Megoldás:

$$\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = x\sqrt{1-x^2} - \int x \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x =$$

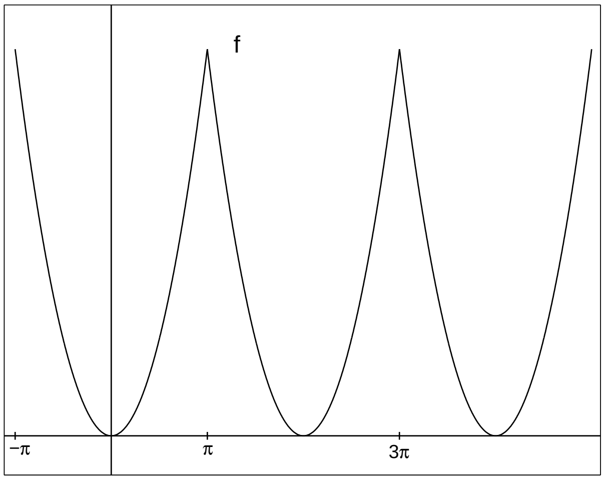
$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x + \mathrm{arcsin}x.$$

   Ebből $\quad 2\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = x\sqrt{1-x^2} + \mathrm{arcsin}x$, így

$$\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \mathrm{arcsin}x).$$

4. Az $f : [0,r] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sqrt{r^2-x^2}$ függvény grafikonja egy origó középpontú r sugarú negyedkör. Számoljuk ki a kör területét, kerületét, az r sugarú gömb térfogatát, felszínét.

5. Legyen $a > 0$. Számolja ki a $\mathrm{ch}_{|[0,a]}$ függvény görbe alatti területét és ívhosszát.



8.14. ábra.

6. Hol van a súlypontja az r sugarú homogén félkörlapnak?

7. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$, ha $x \in [-\pi, \pi]$, és minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $f(x + 2\pi) = f(x - 2\pi) =: f(x)$ (8.14. ábra).

   a) Állítsa elő az f Fourier-együtthatóit!

   b) Írja fel f Fourier-sorát!

   c) Mit ad ez a Fourier-sor $x := 0$, $x := \pi$ esetén?

8. Számoljuk ki az

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} \mathrm{d}x = ? \quad (\alpha > 1) \qquad \int_0^\infty e^{-at} \mathrm{d}t = ? \quad (a > 0)$$

   impróprius integrálokat!

9. A gamma-függvény.
   Legyen $\Gamma : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} \mathrm{d}t$. Mutassuk meg, hogy $\Gamma(0) = 1$ $\Gamma(1) = 1$, és bármely $\alpha > 0$ esetén $\Gamma(\alpha + 1) = (\alpha + 1)\Gamma(\alpha)$.
   Megoldás: $\Gamma(0) = \int_0^\infty e^{-t} \mathrm{d}t = [e^{-t}]_0^\infty = 1$ (Itt rövidítettünk: $\lim_{\omega \to \infty} [e^{-t}]_0^\omega$ helyett $[e^{-t}]_0^\infty$ áll.)

$$\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^\infty t^{\alpha+1} e^{-t} \mathrm{d}t = [-e^{-t} t^{\alpha+1}]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-t} (\alpha + 1) t^\alpha \mathrm{d}t =$$
$$= 0 + (\alpha + 1) \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} \mathrm{d}t = (\alpha + 1)\Gamma(\alpha).$$

Ezért

$$\begin{aligned}
&\Gamma(1) = (0+1)\Gamma(0) = 1 \\
&\Gamma(2) = (1+1)\Gamma(1) = 2\cdot 1 = 2! \\
&\Gamma(3) = (2+1)\Gamma(2) = 3\cdot 2! = 3! \\
&\vdots \\
&\Gamma(n) = n! \quad (n\in\mathbb{N})
\end{aligned}$$

Kiszámítható – közelítőleg – a $\Gamma(\alpha)$, $\alpha\notin\mathbb{N}$ esetén is.

10. Számolja ki a $\sin^2_{|[0,2\pi]}$ integrálközepét!
Megoldás:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}2\pi = \frac{1}{2}.$$

A $\sin^2_{|[0,2\pi]}$ integrálközepe $\frac{1}{2}$.

8.3. Integrálszámítás $\boxed{\text{E}}$

8.3.1. Az integrál fogalma

Az integrálhatóság fogalmának kiépítésében Darboux gondolatmenetét használjuk. Legyen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos függvény. Legyen $\tau = \{x_0,\ldots,x_n\}\subset[a,b]$ véges halmaz, melynek elemeire

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b.$$

τ az $[a,b]$ intervallum egy **felosztás**a.

$$F[a,b] := \{\tau \mid \tau \text{ felosztása az } [a,b] \text{ intervallumnak}\}.$$

Legyen $\tau\in F[a,b]$, és legyenek

$$m_i := \inf\{f(x)\mid x_{i-1}\le x\le x_i\},\ M_i := \sup\{f(x)\mid x_{i-1}\le x\le x_i\},\ i=1,2,\ldots,n.$$

Legyen a τ felosztáshoz tartozó **alsó-** ill. **felsőösszeg** az

$$s(\tau) := \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{és} \quad S(\tau) := \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}).$$

8.6. Tétel.

a) $\forall\tau\in F[a,b]$ *esetén* $s(\tau)\le S(\tau)$,

b) $\forall\tau,\sigma\in F[a,b]$ *esetén* $s(\tau)\le S(\sigma)$.

Bizonyítás.

a) $m_i\le M_i,\ i=1,2,\ldots,n$, így $s(\tau)\le S(\tau)$.

b) Legyen $\tau \in F[a,b]$, és az $[x_{k-1}, x_k]$ intervallumban vegyünk fel egy osztópontot: $x_{k-1} < \overline{x} < x_k$.
Ha $m' := \inf\{f(x) \mid x_{k-1} \le x \le \overline{x}\}$ és $m'' := \inf\{f(x) \mid \overline{x} \le x \le x_k\}$, akkor $m', m'' \ge m_k$. Ezért

$$s(\tau) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \le m_1(x_1 - x_0) + \ldots + m'(\overline{x} - x_{k-1}) +$$
$$+m''(x_k - \overline{x}) + \ldots + m_n(x_n - x_{n-1}) = s(\tau \cup \{\overline{x}\}).$$

Hasonló hatása van az $\overline{x}$ beiktatásának a felsőösszegre:

$$S(\tau) \ge S(\tau \cup \{\overline{x}\}).$$

Lépésenként végiggondolva igaz, hogy

$$s(\tau) \le s(\tau \cup \sigma) \le S(\tau \cup \sigma) \le S(\sigma).$$

Ennek a tételnek a következménye, hogy az

$$\{s(\tau) \in \mathbb{R} \mid \tau \in F[a,b]\} \text{ halmaz felülről korlátos}$$

(például az $S(\{a,b\})$ egy felső korlátja), ezért

$$\exists \sup\{s(\tau) \mid \tau \in F[a,b]\} =: I_*$$

és az

$$\{S(\tau) \in \mathbb{R} \mid \tau \in F[a,b]\} \text{ halmaz alulról korlátos}$$

(például az $s(\{a,b\})$) egy alsó korlátja), ezért

$$\exists \inf\{S(\tau) \mid \tau \in F[a,b]\} =: I^*.$$

8.5. Definíció. *Azt mondjuk, hogy f (Darboux-)integrálható, ha $I_* = I^*$. Ha f integrálható, akkor $\int_a^b f := I_* = I^*$.*

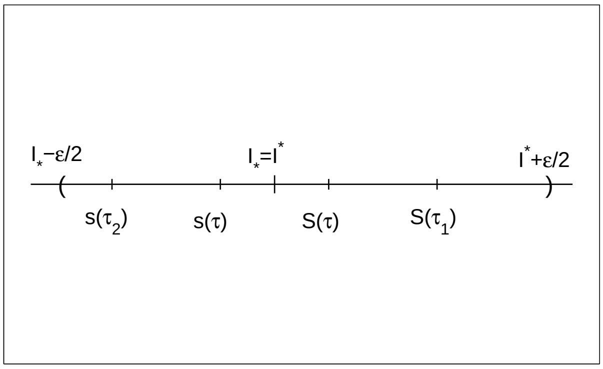
Megmutatható, hogy a $\boxed{\text{B}}$ részben bemutatott Riemann-integrálhatóság ekvivalens a Darboux-integrálhatósággal, ezért jelölésben sem teszünk különbséget közöttük. Ha f (Darboux-)integrálható, akkor ezt $f \in R[a,b]$ jelölje.

8.3.2. Az integrálhatóság feltételei

8.7. Tétel. *(Riemann-tétel)*
$f \in R[a,b] \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \tau \in F[a,b] : S(\tau) - s(\tau) < \varepsilon.$

Bizonyítás.($\Rightarrow$) Legyen $\varepsilon > 0$. Mivel I^* a felsőösszegek infimuma, ezért az $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ számhoz $\exists \tau_1 \in F[a,b]$, hogy

$$I^* + \frac{\varepsilon}{2} > S(\tau_1).$$



8.15. ábra.

Mivel I_* az alsóösszegek szuprémuma, ezért az $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ számhoz $\exists \tau_2 \in F[a,b]$, hogy
$$s(\tau_2) > I_* - \frac{\varepsilon}{2}.$$
Mivel $I_* = I^*$, ezért a $\tau := \tau_1 \cup \tau_2 \in F[a,b]$ felosztásra
$$S(\tau) - s(\tau) \leq S(\tau_1) - s(\tau_2) < \varepsilon. \qquad \text{(8.15. ábra)}$$
($\Leftarrow$) Nyilván $\forall \tau \in F[a,b]$ esetén $I^* \leq S(\tau)$ és $I_* \geq s(\tau)$, ezért a feltétel szerint $\underline{\forall \varepsilon > 0}$ esetén $\exists \tau \in F[a,b]$, hogy $\underline{0 \leq I^* - I_*} \leq S(\tau) - s(\tau) \underline{\leq \varepsilon} \iff I_* = I^*$. (Az aláhúzottak szerint ha egy nemnegatív szám bármely pozitív számnál kisebb, akkor az csak 0 lehet.)

8.8. Tétel. *Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton, akkor $f \in R[a,b]$.*

Bizonyítás. Legyen f monoton növekedő (ne legyen konstans, mert ennek integrálhatóságát már megmutattuk). Így $f(a) < f(b)$.
Legyen $\underline{\varepsilon > 0 \text{ tetszőleges.}}$ Legyen $\underline{\tau \in F[a,b]}$ olyan felosztás, amelyben
$$\max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, 2, \dots, n\} < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$
Ekkor $M_i \leq f(x_i)$ és $m_i \geq f(x_{i-1}),\ i = 1, 2, \dots, n$, így
$$\underline{S(\tau) - s(\tau)} = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$$
$$= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \ldots + f(x_n) - f(x_{n-1})) = \underline{\varepsilon},$$
tehát a Riemann-tétel szerint $f \in R[a,b]$.

8.9. Tétel. $f \in C[a,b] \Rightarrow f \in R[a,b]$.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. A Heine-tétel szerint az $[a,b]$ intervallumon folytonos f függvény egyenletesen folytonos az $[a,b]$-n, ezért az $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$ számhoz $\exists \delta > 0\ \forall x', x'' \in [a,b]$, $|x' - x''| < \delta$ esetén $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon/(b-a)$. Legyen $\underline{\tau} \in F[a,b]$ olyan, hogy $\max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1,2,\ldots,n\} < \delta$. Ekkor $\forall i = 1,2,\ldots,n$ esetén $\forall x', x'' \in [x_i, x_{i-1}]$ miatt

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

ezért

$$0 \le M_i - m_i \le \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Tekintsük a

$$\underline{S(\tau) - s(\tau)} = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \underline{\le} \sum \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (x_i - x_{i-1}) = \underline{\varepsilon},$$

így $f \in R[a,b]$.

Megjegyezzük, hogy $f \in R[a,b] \not\Rightarrow f \in C[a,b]$. Például az

$$f : [0,2] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \le x < 1 \\ 2, & \text{ha } x = 1 \\ 3, & \text{ha } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

monoton növekedő a $[0,2]$ intervallumon, ezért integrálható, de $f \notin C[1]$. Itt jegyezzük meg azt is, hogy van nem integrálható függvény is. Tekintsük a Dirichlet-függvény $d_{|[0,1]}$ leszűkítését. A $d_{|[0,1]} \notin R[0,1]$, mert az $\varepsilon := \frac{1}{2} > 0$ számhoz $\forall \tau \in F[0,1]$ esetén $m_i = 0$ és $M_i = 1$, így $S(\tau) - s(\tau) = \sum_{i=1}^{n}(1 - 0)(x_i - x_{i-1}) = 1 > \varepsilon$.

8.3.3. Műveletek és az integrál kapcsolata

Állapodjunk meg abban, hogy $f \in R[a,b]$ esetén

$$\int_b^a f := -\int_a^b f.$$

Néhány egyszerűen igazolható, de hosszadalmas számolást igénylő tételt csak kimondunk:

8.10. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, és $a,b,c \in I$. Ha $f \in R[a,b]$ és $f \in R[b,c]$, akkor $f \in R[a,c]$, és*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

8.11. Tétel. *Ha $f \in R[a,b]$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda f \in R[a,b]$, és*

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

8.12. Tétel. *Ha* $f, g \in R[a, b]$, *akkor* $f + g \in R[a, b]$, *és*

$$\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

8.13. Tétel. *Ha* $f, g \in R[a, b]$, *akkor* $fg \in R[a, b]$.

(Ne keressük az $\int_a^b fg$ előállítását, általános képlet nincs!)

8.14. Tétel. *Ha* $g \in R[a, b]$, *és* $\exists c > 0$, *hogy* $\forall x \in [a, b]$ *esetén* $|g(x)| \geq c$, *akkor* $\frac{1}{g} \in R[a, b]$.

(Itt nem elég, hogy $g(x) \neq 0$ $\forall x \in [a, b]$ esetén!)

8.15. Tétel. *Ha* $f \in R[a, b]$, *akkor* $|f| \in R[a, b]$.

8.16. Tétel. *Ha* $\phi \in R[a, b]$, $\phi(x) \geq 0$ $(x \in [a, b])$, *akkor* $\int_a^b \phi \geq 0$.

Bizonyítás.$\forall \tau \in F[a, b]$ esetén $m_i, M_i \geq 0$, ezért

$$s(\tau) = \sum m_i(x_i - x_{i-1}) \geq 0, \quad S(\tau) = \sum M_i(x_i - x_{i-1}) \geq 0,$$

és ezekkel együtt

$$I_* = \sup\{s(\tau) \mid \tau \in F[a, b]\} \geq 0, \quad I^* = \inf\{S(\tau) \mid \tau \in F[a, b]\} \geq 0.$$

Mivel $\phi \in R[a, b]$, ezért $\int_a^b \phi = I_* = I^* \geq 0$.

8.17. Tétel. *Ha* $f, g \in R[a, b]$, *és* $\forall x \in [a, b]$ *esetén* $f(x) \geq g(x)$ *akkor* $\int_a^b f \geq \int_a^b g$.

Bizonyítás. Legyen $\phi := f - g$. $\phi \in R[a, b]$, $\phi(x) \geq 0$ $(x \in [a, b])$, ezért

$$0 \leq \int_a^b \phi = \int_a^b f - g = \int_a^b f - \int_a^b g,$$

amiből $\int_a^b f \geq \int_a^b g$.

8.18. Tétel. *Ha* $f \in R[a, b]$, *akkor* $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.

Bizonyítás.$\forall x \in [a, b]$ esetén

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|,$$

ezért ($|f| \in R[a, b]$ miatt)

$$\int_a^b -|f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|,$$

de akkor

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

8.3.4. Primitív függvény és a Newton–Leibniz-formula

8.19. Tétel. *Ha* $f \in C[a,b]$*, akkor* $\exists c \in [a,b]$*, hogy* $\int_a^b f = f(c)\cdot(b-a)$*.*

Bizonyítás. A Weierstrass-tétel miatt $\exists \alpha, \beta \in [a,b]$, amelyre $\forall x \in [a,b]$ esetén

$$m := f(\alpha) \le f(x) \le f(\beta) =: M.$$

Ezért

$$m(b-a) = \int_a^b m \le \int_a^b f \le \int_a^b M = M(b-a),$$

azaz

$$m \le \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f \le M.$$

A Bolzano-tétel szerint az $f \in C[a,b]$ függvény két függvényérték, így m és M között is minden értéket, így az $\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f$ számot is valahol felveszi, azaz $\exists c \in [a,b]$, amelyre

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f.$$

Megjegyezzük, hogy a $\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f$ az $f \in C[a,b]$ függvény **integrálközepe**.

8.6. Definíció. *Legyen* $I \subset \mathbb{R}$ *nyílt intervallum,* $f : I \to \mathbb{R}$*. Azt mondjuk, hogy* $F : I \to \mathbb{R}$*,* $F \in D(I)$ **primitív függvénye** *az* f *függvénynek, ha* $\forall x \in I$ *esetén* $F'(x) = f(x)$*.*

8.20. Tétel. *Ha* F *és* G *primitív függvénye* f*-nek, akkor* $\exists c \in \mathbb{R}$*, hogy* $\forall x \in I$ *esetén* $F(x) = G(x) + c$*.*

Bizonyítás. $F' = f$ és $G' = f$, ezért $(F-G)' = 0$ az I intervallumon. Ha egy intervallumon egy függvény deriváltja 0, akkor ez a függvény konstans, azaz $\exists c \in \mathbb{R}$, hogy $\forall x \in I$ esetén $F(x) - G(x) = c$.

Az integrált és a primitív függvényt kapcsolja össze a

8.21. Tétel. *(Newton–Leibniz-formula)*
Legyen $f \in R[a,b]$*. Tegyük fel, hogy* f*-nek van* F *primitív függvénye. Ekkor*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Bizonyítás. Legyen $\tau \in F[a,b]$ tetszőleges. Ekkor

$$F(b) - F(a) = F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + \ldots + F(x_n) - F(x_{n-1}).$$

A Lagrange-középértéktétel szerint $\exists \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, hogy

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),\ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ezzel

$$F(b) - F(a) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}).$$

Mivel $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, ezért

$$m_1(x_1 - x_0) + \ldots + m_n(x_n - x_{n-1}) \le F(b) - F(a) \le M_1(x_1 - x_0) + \ldots + M_n(x_n - x_{n-1}),$$

azaz

$$s(\tau) \le F(b) - F(a) \le S(\tau)$$

Mivel $\forall \tau \in F[a, b]$ felosztásra igaz ez az egyenlőtlenség, azért

$$I_* \le F(b) - F(a) \le I^*$$

is igaz. Az $f \in R[a, b]$, így $I_* = I^*$, amiből következik, hogy

$$F(b) - F(a) = I_* = I^* = \int_a^b f.$$

Megjegyezzük, hogy van olyan $f \in R[a, b]$, amelynek nincs primitív függvénye (például az

$$f : [0, 2] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \le x < 1 \\ 2, & \text{ha } x = 1 \\ 3, & \text{ha } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

a deriváltról szóló Darboux-tétel miatt). Van olyan példa is, amikor van primitív függvény, de maga a függvény nem integrálható (Volterra példája néven ismert ilyen példa.)

A Newton–Leibniz-formula az integrál hatékony kiszámításának módszere. A módszer alkalmazásának sarkalatos pontja az f függvény primitív függvényének létezése. Ebben a kérdésben nyújt segítséget az integrálfüggvény fogalma.

8.7. Definíció. *Legyen $f \in R[a, b]$. A $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\phi(x) = \int\limits_a^x f$ függvényt az f függvény* **integrálfüggvényének** *nevezzük.*

Megjegyezzük, hogy az $\boxed{\text{A}}$ részben bevezetett T területfüggvény folytonos f függvény esetén éppen a ϕ integrálfüggvény.

8.22. Tétel. *Ha $f \in R[a, b]$, akkor $\phi \in C[a, b]$.*

Bizonyítás. Legyen $K > 0$ az $|f|$ egy felső korlátja az $[a, b]$ intervallumon. Bármely $s, t \in [a, b]$ esetén

$$|\phi(s) - \phi(t)| = |\int\limits_a^s f - \int\limits_a^t f| = |\int\limits_t^s f| \le |\int\limits_t^s |f|| \le K|s - t|.$$

Legyen $\alpha \in [a,b]$ egy tetszőlegesen rögzített pont, és legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. A $\delta = \varepsilon/K$ választás mellett bármely $x \in [a,b]$, $|x-\alpha| < \delta$ esetén

$$|\phi(x) - \phi(\alpha)| \leq K|x-\alpha| < K\delta = \varepsilon.$$

Tehát $\phi \in C[\alpha]$.

A bizonyításból látszik, hogy ϕ egyenletesen folytonos az $[a,b]$ intervallumon.

8.23. Tétel. *Ha $f \in C[a,b]$, akkor $\phi \in D(a,b)$, és bármely $x \in (a,b)$ esetén $\phi'(x) = f(x)$. Ez azt jelenti, hogy egy folytonos függvénynek van primitív függvénye, az integrálfüggvénye az egyik primitív függvény.*

Bizonyítás. Legyen $x \in [a,b]$ egy tetszőlegesen rögzített pont, és legyen $y \in [a,b]$, $y \neq x$. Ekkor

$$\frac{\phi(x)-\phi(y)}{x-y} = \frac{\int_a^x f - \int_a^y f}{x-y} = \frac{\int_x^y f}{x-y} = \frac{f(c)(x-y)}{x-y} = f(c),$$

ahol felhasználtuk az integrálközépről szóló 8.19 tételt és c az x és y közötti szám. Mivel f folytonos, azért $\lim_{y\to x} f(c) = f(x)$, így létezik

$$\lim_{y\to x} \frac{\phi(x)-\phi(y)}{x-y} = \phi'(x)$$

és $\phi'(x) = f(x)$.

9. fejezet

Függvénysorozatok, függvénysorok

Ez egy kiegészítő fejezet. A gyakorlatban felmerülő problémák (függvények közelítése, közönséges és parciális differenciálegyenletek megoldása közelítő módszerekkel) igényli a sorra kerülő fogalmakat, eredményeket. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk.

- Függvénysorozat konvergenciahalmaza
- Pontonkénti és egyenletes konvergencia
- A határfüggvény folytonossága, differenciálhatósága, integrálhatósága
- Függvénysor konvergenciája
- Weierstrass majoráns kritérium
- Az összegfüggvény folytonossága, differenciálhatósága, integrálhatósága
- Hatványsor
- Cauchy-Hadamard tétel
- Az összegfüggvény differenciálhatósága, Abel tétele

9.1. Függvénysorozatok, függvénysorok $\boxed{\text{A}}$

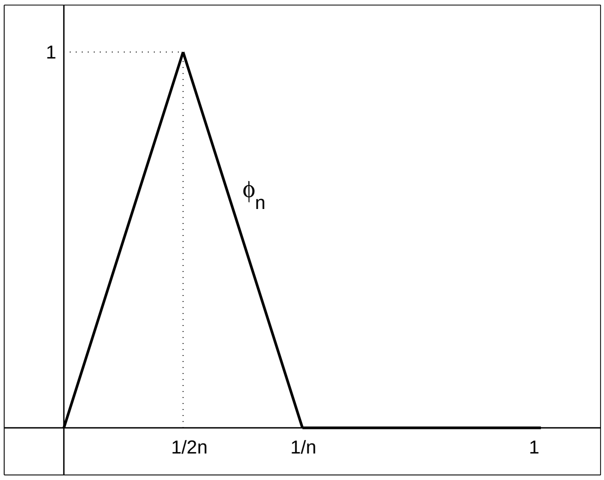
9.1.1. Függvénysorozatok

Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $H \neq \emptyset$ halmaz, és a $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots$ függvények mindegyike $\phi_n : H \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$. Az ilyen (ϕ_n) függvénysorozatról mondjuk, hogy „H halmazon értelmezett".
Például

1. (id^n) [itt $D(\mathrm{id}^n) = \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$]

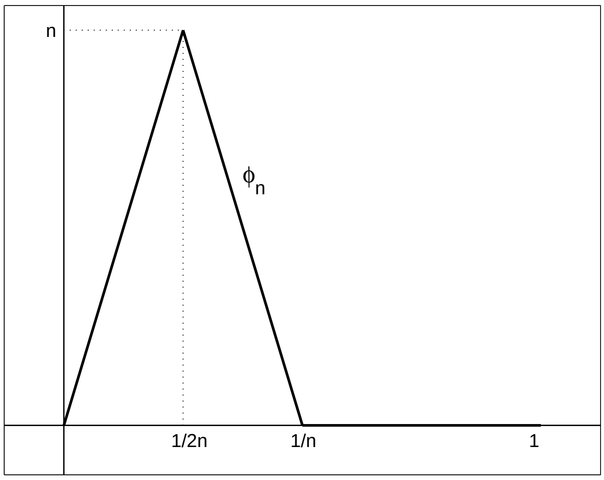
2. ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $\phi_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ \phi_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0 \\ 1, & \text{ha } 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0, & \text{ha } \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$

3. ha $n \in \mathbb{N}$, akkor lásd az 9.1. ábrát



9.1. ábra.

4. ha $n \in \mathbb{N}$, akkor lásd az 9.2. ábrát



9.2. ábra.

5. * $\left(\sum_{k=1}^{n} \sin\circ(k\cdot \mathrm{id})\right)$ [itt is $\mathbb{R}$ az egyes függvények értelmezési tartománya]

Érdekes lehet az a kérdés, hogy a (ϕ_n) függvénysorozat tagjai közelednek-e valamilyen függvényhez, ha n növekszik.

9.1. Definíció. *A (ϕ_n) függvénysorozat $[D(\phi_n) = H,\ n \in \mathbb{N}]$* **konvergenciahalmaza**

$$KH(\phi_n) := \{x \in H \mid (\phi_n(x)) \text{ számsorozat konvergens}\}$$

Az 1. példában $KH(\mathrm{id}^n) = (-1, 1]$, mert ha $-1 < x < 1$, akkor $\mathrm{id}^n(x) = x^n \to 0$; ha $x := 1$, akkor $\mathrm{id}^n(1) = 1 \to 1$, de ha $x > 1$ vagy $x \le -1$, akkor $(\mathrm{id}^n(x))$ nem konvergens.

A 2. példában $KH(\phi_n) = [0, 1]$, hiszen $\phi_n(0) = 0 \to 0$. Ha $0 < x < 1$, akkor van olyan N, hogy $\frac{1}{N} < x$, és ekkor a $(\phi_n(x))$ sorozat $1, 1, \ldots, 1, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots$ alakú, amely 0-hoz tart (ha $n \le N$, akkor $\phi_n(x) = 1$, ha $n > N$, akkor $\phi_n(x) = 0$).

Ugyanez mondható el a 3. és 4. példában is.

Az 5.* példa kicsit nehezebb. Ha $x = l\pi$ $(l \in \mathbb{Z})$, akkor $\left(\sum_{k=1}^{n} \sin(kl\pi)\right) = (0)$ a számsorozat, amely 0-hoz tart. Tehát

$$KH\left(\sum_{k=1}^{n} \sin\circ(k\cdot \mathrm{id})\right) \supset \{l\pi \mid l \in \mathbb{Z}\}.$$

Ha volna még $x \in \mathbb{R}$, $x \ne l\pi$ $(l \in \mathbb{Z})$ a függvénysorozat konvergenciahalmazában, akkor a $(\sin kx)$ sorozatnak 0-hoz kellene tartania. Tegyük fel, hogy $\sin kx \to 0$. Ekkor igaz lenne $\sin(k+1)x \to 0$ is, azaz

$$\sin(kx + x) = \sin kx \cos x + \cos kx \sin x \to 0.$$

Mivel $\sin x \ne 0$, $\sin kx \to 0$, ezért $\cos kx \to 0$ is igaz. Így $\sin^2 kx + \cos^2 kx \to 0$ is igaz lenne, de ez nem lehet, hiszen $\sin^2 kx + \cos^2 kx = 1$. Tehát

$$KH\left(\sum_{k=1}^{n} \sin\circ(k\cdot \mathrm{id})\right) = \{l\pi \mid l \in \mathbb{Z}\}.$$

Ez azért fontos példa, mert a Fourier-sorok problémaköre számos ehhez hasonló nehézséget vet fel.

9.2. Definíció. *Legyen (ϕ_n) egy H halmazon értelmezett függvénysorozat. Tegyük fel, hogy $KH(\phi_n) \ne \emptyset$. A (ϕ_n) függvénysorozat* **határfüggvénye** *az az $f : KH(\phi_n) \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre minden $x \in KH(\phi_n)$ esetén*

$$f(x) := \lim \phi_n(x).$$

Gyakran $f := \lim \phi_n$ jelölést is használnak.

Az 1. példában

$$\lim \mathrm{id}^n : (-1, 1] \to \mathbb{R}, \ (\lim \mathrm{id}^n)(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } -1 < x < 1 \\ 1, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

A 2., 3. és 4. példában

$$\lim \phi_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, \ (\lim \phi_n)(x) := 0.$$

Az 5.* példában

$$\lim \sum_{k=1}^{n} \sin \circ (k \cdot \mathrm{id}) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \circ (k \cdot \mathrm{id}) : \{l\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R},$$

$$(\lim \sum_{k=1}^{n} \sin \circ (k \cdot \mathrm{id}))(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin kx := 0.$$

Amikor a példákban szereplő függvénysorozatok tagjainak és a határfüggvénynek a tulajdonságait összehasonlítjuk, érdekes különbségek mutatkoznak. Az 1. példában id^n folytonos, differenciálható az $\mathbb{R}$-en, míg $\lim \mathrm{id}^n$ nem folytonos, így persze nem is differenciálható. A 2. példa ϕ_n függvényeinek egyike sem folytonos, a $\lim \phi_n$ folytonos és differenciálható is. A 3. és 4. példában ϕ_n és $\lim \phi_n$ is folytonos, a ϕ_n nem differenciálható, a $\lim \phi_n$ pedig sima. Itt azonban még egy izgalmas különbségre figyelhetünk fel:
A 3. példában

$$\int_0^1 \phi_n = \frac{1}{2}\frac{1}{n} \cdot 1 = \frac{1}{2n} \to 0, \quad \text{és} \quad \int_0^1 \lim \phi_n = \int_0^1 0 = 0,$$

míg a 4. példában

$$\int_0^1 \phi_n = \frac{1}{2}\frac{1}{n} \cdot n = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}, \quad \text{de} \quad \int_0^1 \lim \phi_n = \int_0^1 0 = 0,$$

tehát a függvénysorozat tagjainak integráljaiból álló sorozat határértéke nem a határfüggvény integrálja.
Az 5.* példában a függvénysorozat tagjai kellemes trigonometrikus, sima, periodikus függvények az egész $\mathbb{R}$-en, míg a határfüggvény igen szegényes, éppen csak a periodikusság maradt meg...
A példák azt mutatják, hogy a „pontonkénti konvergencia” fogalma nem elég hatékony a függvénysorozat tagjai jó tulajdonságainak a határfüggvényre való átörökítésére. Ezen próbálunk segíteni:

9.3. Definíció. *Legyen (ϕ_n) a $H \neq \emptyset$ halmazon értelmezett függvénysorozat. Tegyük fel, hogy $KH(\phi_n) \neq \emptyset$, és legyen $E \subset KH(\phi_n)$, $E \neq \emptyset$ halmaz. Azt* *mondjuk, hogy a (ϕ_n) függvénysorozat* **egyenletesen konvergens** *az E halmazon, ha bármely $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $\forall n > N$ esetén és bármely $x \in E$ helyen*

$$|\phi_n(x) - (\lim \phi_n)(x)| < \varepsilon.$$

Jelölje ezt a tényt $\phi_n \hookrightarrow_E \lim \phi_n$.

Ez azt jelenti, hogy a küszöbindex független x-től, ezért nevezzük egyenletes konvergenciának.
Az 1. példában a $(-1, 1]$ halmazon nem egyenletes az (id^n) konvergenciája. Még a $(-1, 1)$ halmazon sem! Ha $\delta > 0$, akkor az $E := [-1 + \delta, 1 - \delta]$ intervallumon már

$$\mathrm{id}^n \hookrightarrow_E 0.$$

A 2., 3. és 4. példában is a $[0, 1]$ intervallumon nem egyenletes a konvergencia, de $\delta > 0$ esetén

$$\phi_n \hookrightarrow_{[\delta,1]} 0$$

már igaz.
Az 5.* példában ugyan az $E := KH(\sum_{k=1}^{n} \sin \circ (k \cdot \mathrm{id}))$ halmazon egyenletes a konvergencia, de ezzel nem sokra megyünk...

Milyen következményei vannak egy függvénysorozat egyenletes konvergenciájának? Rend lesz a példákban tapasztalható kuszaságban.

9.1. Tétel. *Legyen $\phi_n \in C[a, b]$ $(n \in \mathbb{N})$. Tegyük fel, hogy $\phi_n \hookrightarrow_{[a,b]} f$. Ekkor $f \in C[a, b]$.*

9.2. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $\phi_n : I \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$. Tegyük fel, hogy van olyan $x_0 \in I$, hogy $(\phi_n(x_0))$ konvergens. Tegyük fel, hogy ϕ_n folytonosan differenciálható az I intervallumon ($\phi_n \in C_1(I)$, $n \in \mathbb{N}$) és $\phi_n' \hookrightarrow_I g$. Ekkor a (ϕ_n) függvénysorozat is egyenletesen konvergál az I intervallumon egy $f : I \to \mathbb{R}$ függvényhez ($\phi_n \hookrightarrow_I f$), és $f \in D(I)$, sőt $f'(x) = g(x) = \lim \phi_n'(x)$ minden $x \in I$ esetén.*

A tétel állítása röviden:

$$(\lim \phi_n)' = \lim \phi_n',$$

azaz a lim és a deriválás sorrendje felcserélhető.

9.3. Tétel. *Legyen $\phi_n \in R[a, b]$, $(n \in \mathbb{N})$. Tegyük fel, hogy $\phi_n \hookrightarrow_{[a,b]} f$. Ekkor $f \in R[a, b]$, és $\lim \int_a^b \phi_n = \int_a^b f$.*

A tétel röviden azt állítja, hogy egyenletes konvergencia esetén

$$\lim \int_a^b \phi_n = \int_a^b \lim \phi_n,$$

azaz a lim és az integrálás sorrendje felcserélhető.

9.1.2. Függvénysorok

A függvénysorozatra kiépített fogalmak értelemszerű módosítással függvénysorra is átvihetők.

9.4. Definíció. *Legyen (ϕ_n) a $H \neq \emptyset$ halmazon értelmezett függvénysorozat. Legyen $S_n := \phi_1 + \phi_2 + \ldots + \phi_n$ $(n \in \mathbb{N})$ az n-edik részletösszeg. A (ϕ_n) függvénysorozatból képezett* **függvénysor***on az (S_n) függvénysorozatot értjük, azaz $\sum \phi_n := (S_n)$.*

9.5. Definíció. $KH \sum \phi_n := KH(S_n)$.

Látható, hogy $KH \sum \phi_n = \{x \in H \mid \sum \phi_n(x) \text{ konvergens}\}$.

9.6. Definíció. *Tegyük fel, hogy $KH \sum \phi_n \neq \emptyset$. Legyen*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n : KH \sum \phi_n \to \mathbb{R}, \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n\right)(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)$$

a függvénysor **összegfüggvénye**.

Nyilván igaz, hogy $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n\right)(x) = \lim S_n(x)$ minden $x \in KH(S_n)$ esetén.
Például $\phi_n := \mathrm{id}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén bármely $x \in \mathbb{R}$ pontban

$$S_n(x) := x + x^2 + \ldots + x^n = \begin{cases} x\frac{x^n-1}{x-1}, & \text{ha } x \neq 1 \\ n, & \text{ha } x = 1. \end{cases}$$

Ezért $\lim S_n(x) = \frac{x}{1-x}$, ha $x \in (-1,1)$; ha $x \in \mathbb{R} \setminus (-1,1)$, akkor $(S_n(x))$ divergens. Tehát $KH \sum \mathrm{id}^n = (-1,1)$, és $(\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{id}^n)(x) = \frac{x}{1-x}$.

9.7. Definíció. *Legyen (ϕ_n) olyan függvénysorozat, amelyre $KH \sum \phi_n \neq \emptyset$. Legyen $E \subset KH \sum \phi_n$. Azt mondjuk, hogy $\sum \phi_n$* **egyenletesen konvergens** *az E halmazon, ha az (S_n) részletösszegek sorozata egyenletesen konvergens az E halmazon.*
Jelben: $\sum \phi_n \hookrightarrow_E \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n$.

Egy hasznos elégséges feltétel függvénysor egyenletes konvergenciájára:

9.4. Tétel. *(Weierstrass majoráns kritériuma)*
Legyen (ϕ_n) a $H \neq \emptyset$ halmazon értelmezett olyan függvénysorozat, amelyhez van olyan $(a_n) \subset \mathbb{R}^+$ pozitív számsorozat, hogy minden $x \in H$ esetén $|\phi_n(x)| \leq a_n$, $(n \in \mathbb{N})$, és még $\sum a_n$ is konvergens. Ekkor

$$\sum \phi_n \hookrightarrow_H \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n.$$

A függvénysor részletösszeg-sorozatára tett egyenletes konvergencia feltételek következtében igazak a vázlatosan megfogalmazott tételek:

- Ha $\phi_n \in C[a,b]$, és $\sum \phi_n \hookrightarrow_{[a,b]} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \in C[a,b]$.

- Ha $\phi_n \in C_1(I)$, és $\sum \phi_n' \hookrightarrow_I g$ akkor $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \in C_1(I)$, és

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n' = g.$$

(Az összegzés és a deriválás felcserélhető.)

- Ha $\phi_n \in R[a,b]$, és $\sum \phi_n \hookrightarrow_{[a,b]} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \in R[a,b]$, és

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \phi_n.$$

(A függvénysort tagonként lehet integrálni.)

9.1.3. Hatványsorok

A hatványsorok speciális függvénysorok.

9.8. Definíció. *Legyen* $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ *számsorozat,* $a \in \mathbb{R}$ *egy szám. A*

$$\sum c_n (id - a)^n$$

függvénysort **hatványsor***nak nevezzük, melynek együttható-sorozata a* (c_n)*, és a hatványsor „középpontja” az* $a \in \mathbb{R}$.

Állapodjunk meg, hogy a továbbiakban $a := 0$ az egyszerűbb fogalmazás kedvéért.

9.5. Tétel. *(Cauchy–Hadamard-tétel)*
Legyen $\sum c_n id^n$ *hatványsor.*

1^o *Ha* $(\sqrt[n]{|c_n|})$ *korlátos, és* $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} \neq 0$*, akkor legyen*

$$R := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}} \qquad (R \text{ a hatványsor } \textbf{konvergenciasugara}).$$

Ekkor

$$(-R, R) \subset KH \sum c_n id^n \subset [-R, R].$$

2^o *Ha* $(\sqrt[n]{|c_n|})$ *felülről nem korlátos, akkor*

$$KH \sum c_n id^n = \{0\}.$$

3^o *Ha* $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} = 0$*, akkor*

$$KH \sum c_n id^n = \mathbb{R}.$$

Látható, hogy egy hatványsor konvergenciahalmaza mindig intervallum (a 2^o esetben elfajult intervallum), de ez az intervallum lehet az 1^o esetben $(-R, R)$, $(-R, R]$, $[-R, R)$, $[-R, R]$ valamelyike. A hatványsorok konvergenciahalmazát összevetve az 5.* példában szereplő $\sum \sin \circ (k \cdot \mathrm{id})$ függvénysor konvergenciahalmazával, szembeötlő a különbség.

9.6. Tétel. *Legyen $\sum c_n id^n$ hatványsor, amelyre $(\sqrt[n]{|c_n|})$ felülről korlátos. Ekkor az $f : KH \sum c_n id^n \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ összegfüggvény az $intKH \sum c_n id^n$ nyílt intervallumon folytonos is és differenciálható is; sőt bármely $x \in intKH \sum c_n id^n$ esetén*

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1}.$$

A tétel következménye, hogy $(\sqrt[n]{|c_n|})$ felülről korlátosságából az $(\sqrt[n]{|nc_n|}) = (\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{|c_n|})$ felülről korlátossága is következik, sőt a $\sum nc_n \mathrm{id}^{n-1}$ hatványsor konvergenciahalmaza ugyanaz marad, mint a $\sum c_n \mathrm{id}^n$ konvergenciahalmaza volt. Ezért ennek a hatványsornak az összegfüggvénye is differenciálható, sőt

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

minden $x \in intKH \sum c_n \mathrm{id}^n$ esetén.
Ez a gondolatmenet folytatható:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) c_n x^{n-k}, \quad x \in intKH \sum c_n \mathrm{id}^n.$$

Látható az is, hogy $f(0) = c_0,\ f'(0) = c_1\ \dots,\ f^{(k)}(0) = k! c_k, \dots$

9.7. Tétel. *(Abel)*
Legyen $\sum c_n id^n$ hatványsor, amelynek konvergenciasugara $R > 0$. Tegyük fel, hogy még $\sum c_n R^n$ is konvergens. Ekkor az $f \in C[R]$, azaz $\lim_{x \to R} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n$.

9.2. Feladatok

1. Vizsgáljuk meg a következő hatványsorok konvergenciahalmazát:

$$\sum \mathrm{id}^n, \quad \sum \frac{1}{n}\mathrm{id}^n, \quad \sum \frac{(-1)^n}{n}\mathrm{id}^n, \quad \sum \frac{1}{n^2}\mathrm{id}^n, \quad \sum \frac{1}{5^n n}\mathrm{id}^n, \quad \sum \frac{1}{n!}\mathrm{id}^n, \quad \sum n^n \mathrm{id}^n$$

Megoldás: $\limsup \sqrt[n]{1} = 1$, $\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$, $\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$, $\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$, $\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{5^n n}} = \frac{1}{5}$, $(\sqrt[n]{n^n}) = (n)$ felülről nem korlátos.

$$KH \sum \mathrm{id}^n = (-1, 1)$$

$KH\sum \frac{1}{n}\mathrm{id}^n = [-1,1)$ (Leibniz-tétel)
$KH\sum \frac{(-1)^n}{n}\mathrm{id}^n = (-1,1]$
$KH\sum \frac{1}{n^2}\mathrm{id}^n = [-1,1]$
$KH\sum \frac{1}{5^n n}\mathrm{id}^n = [-5,5)$
$KH\sum \frac{1}{n!}\mathrm{id}^n = \mathbb{R}$
$KH\sum n^n\mathrm{id}^n = \{0\}$

2.
$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots=\frac{1}{1-x},\ \text{ha } |x|<1.$$

Igaz-e, hogy

$$1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},\ \text{ha } |x|<1?$$

Igaz-e, hogy

$$1+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n+\ldots=\frac{x}{(1-x)^2},\ \text{ha } |x|<1?$$

Mivel egyenlő az

$$1+2^2x+3^2x^2+\ldots+n^2x^{n-1}+\ldots,\ \text{ha } |x|<1?$$

3.
$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\frac{1}{1-x},\ \text{ha } |x|<1.$$

Legyen $x:=-t$. Ekkor

$$1-t+t^2-\ldots+(-1)^n t^n+\ldots=\frac{1}{1+t},\ \text{ha } |t|<1.$$

Igaz-e, hogy

$$t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{t^{n+1}}{n+1}+\ldots=\ln(1+t),\ \text{ha } |t|<1?$$

Igaz-e, hogy

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n+1}+\ldots=\ln 2?$$

4.
$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\frac{1}{1-x},\ \text{ha } |x|<1.$$

Legyen $x:=-t^2$. Ekkor

$$1-t^2+t^4-\ldots+(-1)^n t^{2n}+\ldots=\frac{1}{1+t^2},\ \text{ha } |t|<1.$$

Igaz-e, hogy

$$t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \operatorname{arctg} t, \text{ ha } |t| < 1?$$

Igaz-e, hogy

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \ldots = \frac{\pi}{4}?$$

9.3. Függvénysorozatok, függvénysorok $\boxed{\text{E}}$

Nem ismételjük meg a már pontosan bevezetett fogalmakat, csupán a fontos és egyszerűen igazolható állításokat vesszük sorra.

9.3.1. Függvénysorozatok

9.8. Tétel. *Legyen* $\phi_n \in C[a,b]$ $(n \in \mathbb{N})$.

$$\phi_n \hookrightarrow_{[a,b]} f \Rightarrow f \in C[a,b].$$

Bizonyítás. Legyen $\alpha \in [a,b]$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $\phi_n \hookrightarrow_{[a,b]} f$, ezért az $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ számhoz $\exists N$, hogy $\forall n > N$ és $\forall x \in [a,b]$ esetén

$$|\phi_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Legyen $n > N$. A $\phi_n \in C[\alpha]$, ezért az $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ számhoz $\exists \delta > 0$, hogy $\forall x \in [a,b]$, $|x - \alpha| < \delta$ esetén

$$|\phi_n(x) - \phi_n(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Legyen $x \in [a,b]$ tetszőleges, $|x - \alpha| < \delta$. Ekkor

$$|f(x) - f(\alpha)| = |f(x) - \phi_n(x) + \phi_n(x) - \phi_n(\alpha) + \phi_n(\alpha) - f(\alpha)| \leq$$
$$\leq |f(x) - \phi_n(x)| + |\phi_n(x) - \phi_n(\alpha)| + |\phi_n(\alpha) - f(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

9.9. Tétel. *Legyen* $\phi_n \in R[a,b]$ $(n \in \mathbb{N})$

$$\phi_n \hookrightarrow_{[a,b]} f \Rightarrow f \in R[a,b] \text{ és } \int_a^b \phi_n \to \int_a^b f.$$

Bizonyítás.A bizonyítást csak $\phi_n \in C[a,b]$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén végezzük el, mert ekkor $\phi_n \hookrightarrow_{[a,b]} f$ miatt $f \in C[a,b]$, így $f \in R[a,b]$.
Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $\phi_n \hookrightarrow_{[a,b]} f$, ezért az $\varepsilon/(b-a) > 0$ számhoz $\exists N$, hogy $\forall n > N$ és $\forall x \in [a,b]$ esetén

$$|\phi_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Legyen $\underline{n > N \text{ tetszőleges}}$. Ekkor

$$\underline{\left|\int_a^b \phi_n - \int_a^b f\right|} = \left|\int_a^b (\phi_n - f)\right| \leq \int_a^b |\phi_n - f| \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \underline{\varepsilon}.$$

Az aláhúzottak szerint $\lim \int_a^b \phi_n = \int_a^b f$.

9.10. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $\phi_n : I \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$. Tegyük fel, hogy van olyan $x_0 \in I$, hogy $(\phi_n(x_0))$ konvergens. Tegyük fel, hogy ϕ_n folytonosan differenciálható az I intervallumon ($\phi_n \in C_1(I)$, $n \in \mathbb{N}$) és $\phi_n' \hookrightarrow_I g$. Ekkor a (ϕ_n) függvénysorozat konvergál az I intervallumon egy $f : I \to \mathbb{R}$ függvényhez, és $f \in D(I)$, sőt $f'(x) = g(x) = \lim \phi_n'(x)$ minden $x \in I$ esetén.*

Bizonyítás. A Newton-Leibniz tétel miatt bármely $n \in \mathbb{N}$ és $x \in I$ esetén

$$\phi_n(x) - \phi_n(x_0) = \int_{x_0}^{x} \phi_n'.$$

Mivel ϕ_n' egyenletesen konvergál a g függvényhez az $[x_0, x]$ intervallumon, azért

$$\lim \int_{x_0}^{x} \phi_n' = \int_{x_0}^{x} g,$$

de ezzel együtt létezik a

$$\lim(\phi_n(x) - \phi_n(x_0)) = \lim \phi_n(x) - \lim \phi_n(x_0)$$

határérték is. Legyen $f(x) = \lim \phi_n(x)$. Tehát

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} g \qquad (x \in I, x \neq x_0).$$

A g folytonos függvény, hiszen a folytonos ϕ_n' függvényekből álló egyenletesen konvergens függvénysorozat határfüggvénye. Így g integrálfüggvénye differenciálható, azaz f differenciálható, és $f'(x) = g(x) = \lim \phi_n'(x)$ minden $x \in I$ esetén.

9.3.2. Függvénysorok

9.11. Tétel. *(Weierstrass majoráns kritérium)*
Legyen (ϕ_n) függvénysorozat és $(a_n) \subset \mathbb{R}^+$ számsorozat, melyekre

$$|\phi_n(x)| \leq a_n \quad (n \in \mathbb{N},\ x \in H)$$

és $\sum a_n$ konvergens. Ekkor $\sum \phi_n$ egyenletesen konvergens a H halmazon.

Bizonyítás. Legyen $\underline{\varepsilon > 0}$ és $x \in H$ tetszőleges. Mivel $\sum a_n$ konvergens, ezért $\underline{\exists N}$, hogy $\forall n, m > N,\ n > m$ esetén

$$|\phi_{m+1}(x)| + |\phi_{m+2}(x)| + \ldots + |\phi_n(x)| \leq a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n < \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy $\sum |\phi_k(x)|$ konvergens, de akkor $\sum \phi_n(x)$ is konvergens.
Legyen $f : H \to \mathbb{R},\ f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)$.
Legyen $\underline{m > N \text{ és } x \in H \text{ tetszőleges}}$. Ekkor

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{m} \phi_k(x) \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \phi_k(x) \right| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} |\phi_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \leq \varepsilon,$$

hiszen $\forall n > m > N$ esetén

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n < \varepsilon$$

igaz volt.
Az aláhúzottak szerint $\sum \phi_k \hookrightarrow_H f$.

9.3.3. Hatványsorok, Taylor-sorok

A Cauchy–Hadamard-tételnek is csak azt az esetét igazoljuk, amelyben:

9.12. Tétel. *Legyen* $(\sqrt[n]{|c_n|})$ *korlátos, és* $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} \neq 0$. *Legyen* $R := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}} > 0$. *Ekkor*

- 1^o $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| < R$ *esetén a* $\sum c_n x^n$ *abszolút konvergens,*
- 2^o $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| > R$ *esetén a* $\sum c_n x^n$ *abszolút divergens.*

Bizonyítás. 1^o Legyen $r > 0$ olyan, hogy $|x| < r < R$. Ekkor

$$\frac{1}{|x|} > \frac{1}{r} > \frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Legfeljebb véges sok olyan tagja van a sorozatnak, amely a sorozat limesz szuperiorjánál nagyobb számnál nagyobb, ezért $\exists N$, hogy $\forall n > N$ esetén

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{r}.$$

Szorozzuk ezt az egyenlőséget $|x|$-kel, és emeljük n-edik hatványra. Ekkor

$$|c_n| \cdot |x|^n < \left(\frac{|x|}{r}\right)^n.$$

Mivel $\frac{|x|}{r} =: q < 1$ és pozitív, ezért

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n||x|^n < \sum_{n=N+1}^{\infty} q^n.$$

Ez már elég a $\sum |c_n x^n|$ sor konvergenciájához.
2^o Most legyen $p > 0$ olyan, hogy

$$|x| > p > R.$$

Ekkor

$$\frac{1}{p} < \frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|c_n|}.$$

A sorozat limesz szuperiorjánál kisebb számnál nagyobb tagja a sorozatnak végtelen sok van, ezért végtelen sok olyan $n \in \mathbb{N}$ van, amelyre

$$\frac{1}{p} < \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Az $|x|$-kel beszorozva és n-edik hatványra emelve azt kapjuk, hogy végtelen sok n-re

$$1 < \left(\frac{|x|}{p}\right)^n < |c_n||x|^n.$$

Ha egy összeadandó sorozat végtelen sok tagja nagyobb 1-nél, akkor az a sorozat nem tarthat 0-hoz, így $\sum c_n x^n$ nem lehet konvergens.

9.13. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(K(a))$(az f függvény akárhányszor differenciálható az a pont valamely környezetében) és $\exists L > 0$, $A > 0$, hogy $\forall x \in K(a)$ esetén $|f^{(n)}(x)| \leq LA^n$. Ekkor $\forall x \in K(a)$ esetén*

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots,$$

azaz

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Bizonyítás.A Taylor-formula szerint $\forall x \in K(a)$ esetén minden $n \in \mathbb{N}$ mellett $\exists c_{n+1}$ az a és x között olyan, hogy a végtelen sor n-edik részletösszegének az $f(x)$-től való eltérése

$$|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k| = \frac{|f^{(n+1)}(c_{n+1})|}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \leq \frac{LA^{n+1}}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

Mivel $\frac{(A|x-a|)^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$, ezért $\lim \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(x)$.

10. fejezet

Többváltozós függvények

Számos jelenség leírásához kevésnek bizonyul a valós-valós függvény. Ezért általánosítjuk a már megismert fogalmainkat is. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk.

- Műveletek vektorokkal és mátrixokkal
- Többváltozós függvény fogalma és szemléltetése
- Vektorsorozat határértéke
- Többváltozós függvény határértéke és folytonossága
- Metrikus tér
- Sorozat konvergenciája metrikus térben
- Cauchy sorozat, teljes metrikus tér
- Nyílt, zárt, kompakt halmaz fogalma metrikus térben
- Folytonos függvények tulajdonságai metrikus térben
- Kontrakció fogalma, fixponttétel

10.1. Többváltozós függvények $\boxed{\text{A}}$

10.1.1. Az n-dimenziós tér

A Lineáris Algebra tanulmányozása során megismerkedtünk az $\mathbb{R}^n$ vektortérrel. Ha az $x \in \mathbb{R}^n$ egy vektor, akkor az $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ahol $x_i \in \mathbb{R}$ a vektor i-edik koordinátája. Az x vektor **normája** (hossza)

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \in \mathbb{R}.$$

A vektorok normájára igaz, hogy

1^o $\|x\| \geq 0$, és $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in \mathbb{R}^n$

2^o $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$

3^o $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Legyen $e_i := (0, \ldots, 1^{i)}, \ldots 0) \in \mathbb{R}^n$ az i-edik egységvektor ($\|e_i\| = 1$), $i = 1, 2, \ldots, n$. Ekkor $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$.
Az $a, b \in \mathbb{R}^n$ vektorok **skaláris szorzatán** az

$$\langle a, b\rangle := a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \in \mathbb{R}$$

számot értjük. A skaláris szorzat tulajdonságai:

1^o $\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle$

2^o $\langle a + b, c\rangle = \langle a, c\rangle + \langle b, c\rangle$

3^o ha $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle \lambda a, b\rangle = \langle a, \lambda b\rangle = \lambda\langle a, b\rangle$

4^o $\langle a, a\rangle = \|a\|^2 \geq 0$

5^o $|\langle a, b\rangle| \leq \|a\| \cdot \|b\|$ (Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség)

Az a és b vektor **ortogonális** (merőleges), ha $\langle a, b\rangle = 0$.
Megismerkedtünk a mátrixokkal is. Ha A egy m sorból és n oszlopból álló mátrix, akkor $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, amelynek i-edik sorának j-edik eleme a_{ij}.
Legyen $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor $C := A + B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, ahol $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, és $D := \lambda A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, ahol $d_{ij} = \lambda a_{ij}$.
Ha $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ és $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, akkor az $S := A \cdot B \in \mathbb{R}^{m\times p}$, ahol $s_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.
Állapodjunk meg abban, hogy az $\mathbb{R}^n$ vektorteret azonosítjuk az $\mathbb{R}^{n\times 1}$ oszlopmátrixok terével, aminek legyen az a következménye, hogy az $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektort azonosítjuk az

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

oszlopmátrixszal. (Jelölésben sem teszünk különbséget közöttük, sőt vektort mondunk, de oszlopmátrixot írunk.) Például, ha $a, b \in \mathbb{R}^n$, akkor skaláris szorzatuk felfogható a következő alakúnak is:

$$\langle a, b\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = [a_1\ a_2\ \ldots\ a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

azaz egy $\mathbb{R}^{1\times n}$-beli sormátrix és egy $\mathbb{R}^{n\times 1}$-beli oszlopmátrix szorzataként.

10.1.2. Többváltozós függvények

Legyen $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\rightarrow \mathbb{R}^k$ n változós, k dimenziós vektor értékű függvény. Ha $x \in D(f)$ és $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektor, akkor $f(x) \in \mathbb{R}^k$, és $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))$, ahol $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ az i-edik koordináta-függvény ($i = 1, 2, \dots, k$). Az ilyen f függvényt

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_k \end{bmatrix}$$

alakban is megadhatjuk.
Például legyen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x_1, x_2) := \begin{bmatrix} \sin(x_1 x_2) \\ x_1 + x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Itt $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_1(x_1, x_2) := \sin(x_1 x_2)$ az első koordináta-függvény, $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_2(x_1, x_2) := x_1 + x_2$ és $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_3(x_1, x_2) = x_2$ a második illetve a harmadik koordináta-függvény.
Nézzünk néhány speciális esetet.

1^o $n = 1,\ k = 1,\ f \in \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ az eddig tárgyalt valós-valós függvény.

2^o $n > 1,\ k = 1,\ f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ n változós, valós vagy skalár értékű függvény. Szemléltetése $n = 2$ esetén. Az $(x_1, x_2) \in D(f)$ pontba állított merőlegesre felmérjük az $f(x_1, x_2) \in \mathbb{R}$ számot. Az így kapott pontok egy **felületet** alkotnak (10.1. ábra). Másfajta szemléltetés $n = 2$ esetén. Legyen $c \in \mathbb{R}$ és

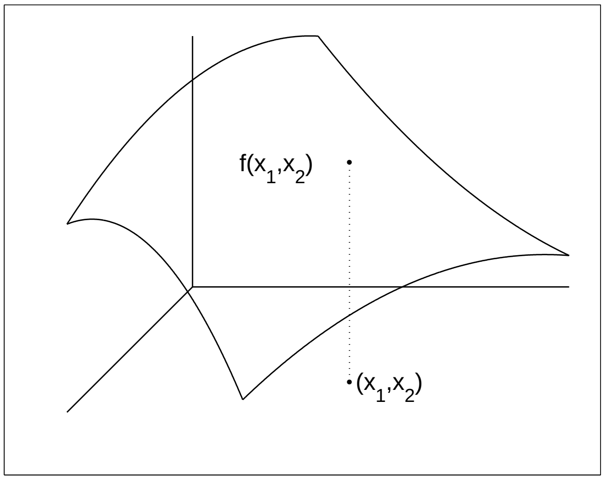
$$N_c := \{(x_1, x_2) \in D(f) \mid f(x_1, x_2) = c\}.$$

Az N_c az f függvény c-hez tartozó **szintvonala**. Néhány $c_1 \langle c_2 < \ldots < c_s$ számhoz tartozó szintvonal ábrázolása tartalmas képet ad az f függvényről. A térképészetben szintvonalas térképnek nevezik ezt (10.2. ábra).

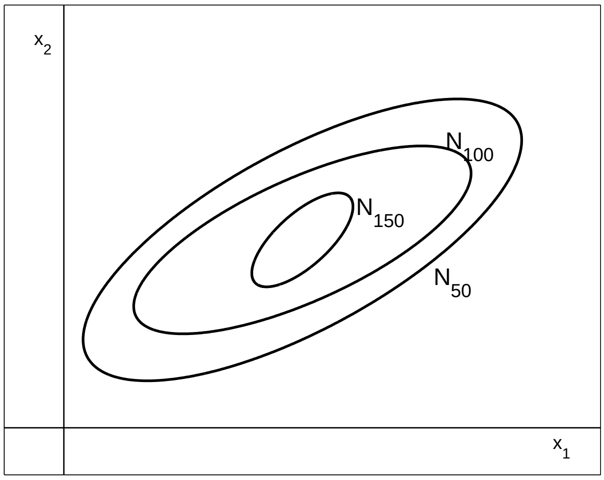
3^o $n := 1,\ k > 1,\ r \in \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^k$ valós változós, k dimenziós vektor értékű függvény.
Szemléltetése $k = 3$ esetén. Legyen $D(r) := [\alpha, \beta]$. A $t \in [\alpha, \beta]$ paraméterértékhez hozzárendeljük az $\mathbb{R}^3$ egy $r(t) := (x(t), y(t), z(t))$ koordinátákkal megadott pontját. Az így kapott pontok egy **térgörbét** alkotnak (10.3. ábra). (A térgörbe az r függvény értékkészlete!)

Például

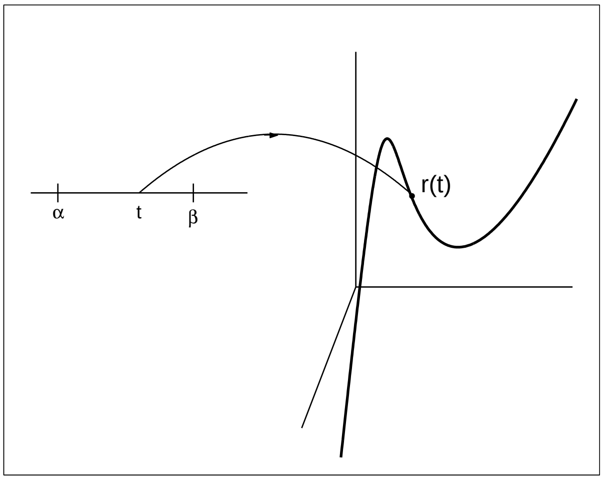
$$r : [0, 6\pi] \to \mathbb{R}^3,\ r(t) := \begin{bmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ 0.5t \end{bmatrix}$$



10.1. ábra.



10.2. ábra.



10.3. ábra.

egy hárommenetes csavarvonal lesz, amely 3π magasságig jut és egy 2 sugarú hengerre tekeredik fel (10.4. ábra).

4^o $n > 1$, $k > 1$, $f \in \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^k$ vektorváltozós vektorértékű (röviden vektor-vektor) függvény.
Amikor a légtér minden pontjához hozzárendeljük a pontbeli szélsebességet (vektort!), akkor egy

$$v \in \mathbb{R}^3 \rightarrowtail \mathbb{R}^3$$

sebességfüggvényről (néha sebességtérnek is nevezik) beszélünk. Amikor egy tömeg (például egy csillag) gravitációs teréről beszélünk, akkor az $\mathbb{R}^3$ minden pontjához hozzárendeljük az abban a pontban érvényes gravitációs erőt (vektort), így egy $g \in \mathbb{R}^3 \rightarrowtail \mathbb{R}^3$ függvény írja le a tömeg (csillag) gravitációs terét.

10.1.3. Határérték és folytonosság

Nézzük, hogy milyen tulajdonságok általánosíthatók ilyen függvényekre.

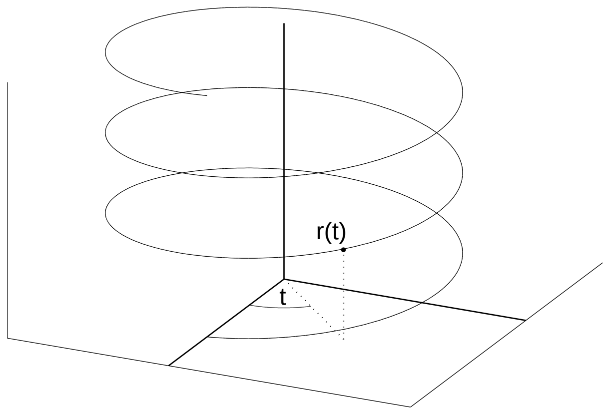
Legyen $a := (a_1, a_2, \dots, a_m) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^m$ vektorsorozat. Az (a_n) vektorsorozat konvergens, ha valamilyen ponthoz tetszőlegesen közel kerül, pontosabban

10.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az (a_n) vektorsorozat* **konvergens**, *ha van olyan $A \in \mathbb{R}^m$, $A = (A_1, A_2, \dots, A_m)$ vektor, hogy bármely $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan N küszöbindex, hogy minden $n > N$ esetén*

$$\|a_n - A\| < \varepsilon.$$

Ekkor is $\lim a_n = A$ vagy $a_n \to A$ lesz ennek a jele. Könnyen látható, hogy

$$\|a_n - A\| < \varepsilon \Leftrightarrow |a_{in} - A_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$



10.4. ábra.

ezért egy vektorsorozat konvergens akkor és csak akkor, ha mindegyik koordinátasorozat (számsorozat) konvergens. Például az $((\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}))$ vektorsorozat konvergens, mert $\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{n}{n+1} \to 1$, így $\lim(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}) = (0,1)$. Az $((\frac{1}{n}, (-1)^n))$ vektorsorozat nem konvergens (divergens), mert $((-1)^n)$ nem konvergens.

Legyen $f \in \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^k$ és $a \in D(f)$. Az f függvényt folytonosnak nevezzük az a pontban, ha a-hoz közeli pontokban a függvényértékek közel vannak $f(a)$-hoz, pontosabban

10.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy f folytonos az a pontban, ha minden $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan $\delta > 0$ ingadozási lehetőség, hogy minden $x \in D(f)$, $\|x-a\| < \delta$ esetén $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.*

Ezt is $f \in C[a]$ jelölje.
Könnyen látható, hogy $f = (f_1, f_2, \ldots, f_k)$ esetén

$$\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon \Leftrightarrow |f_i(x) - f_i(a)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

így f folytonos a-ban pontosan akkor, ha minden koordináta-függvénye folytonos az a-ban. Érvényes most is az

10.1. Tétel. *(átviteli elv)*
$f \in \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^k$, $a \in D(f)$.
$f \in C[a] \Longleftrightarrow minden (x_n) \subset D(f)$, $x_n \to a$ sorozatra $f(x_n) \to f(a)$.

Például

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x_1, x_2) := \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ x_1^2 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

folytonos az $a := (1,3)$ pontban, mert tetszőleges $(x_{1n}, x_{2n}) \to (1,3)$ sorozatra $x_{1n} \cdot x_{2n} \to 1 \cdot 3$, $(x_{1n})^2 \to 1^2$ és $x_{2n} \to 3$, ezért $f(x_{1n}, x_{2n}) \to f(1,3)$. Tehát $f \in C[(1,3)]$.
Néha szükség lehet mátrixértékű függvényekre is. Ha $f \in \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^{k\times p}$, akkor $f_{ij} \in \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ az (i,j)-edik komponense. Az f legyen akkor folytonos az $a \in D(f)$ pontban, ha minden f_{ij} komponense folytonos az a-ban. (Elég, ha meggondoljuk, hogy $\mathbb{R}^{k\times p}$ azonosítható az $\mathbb{R}^{kp}$ vektortérrel.)
Mátrixértékű függvény az

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad f(x_1, x_2) := \begin{bmatrix} x_1x_2 & e^{x_1} \\ 0 & x_1 + x_2 \end{bmatrix}.$$

Az f folytonos is minden $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ pontban.

Legyen $a \in \mathbb{R}^n$ és $r > 0$. Az a pont r sugarú környezete legyen

$$K_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}.$$

Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ és $a \in \mathbb{R}^n$. Az a pont **torlódási pontja** a H halmaznak, ha bármely $K(a)$ környezetben végtelen sok H-beli pont van. Ezt $a \in \dot{H}$ jelölje.
Legyen $f \in \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^k$ és $a \in (D(f))^{\cdot}$.

10.3. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az f függvénynek van* **határértéke** *az a pontban, ha van olyan $A \in \mathbb{R}^k$, hogy bármely $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan $\delta > 0$, hogy minden $x \in D(f)$, $\|x - a\| < \delta$, $x \neq a$ esetén*

$$\|f(x) - A\| < \varepsilon.$$

Ezt $\lim_a f = A$ vagy $\lim_{x\to a} f(x) = A$ vagy ha $x \to a$, akkor $f(x) \to A$ jelölje.
Könnyen látható, hogy az $f \in \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^k$ függvénynek az $a \in (D(f))^{\cdot}$ pontban pontosan akkor van határértéke, ha minden $f_i \in \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ koordinátafüggvényének van határértéke az a-ban.
Most is érvényes az

10.2. Tétel. *(átviteli elv)*
$\lim_a f = A \iff$ *minden* $(x_n) \subset D(f)$, $x_n \to a$, $x_n \neq a$ *esetén* $f(x_n) \to A$.

10.2. Feladatok

1. Igazoljuk a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenséget: minden $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ és $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ vektorra

   $$|\langle a, b\rangle| \le \|a\| \cdot \|b\|,$$

   vagy

   $$|a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n| \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}.$$

   Megoldás:

1^o Ha $b = (0, 0, \ldots, 0)$ vektor, akkor nyilván igaz.

2^o Ha $b \neq 0$, akkor bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle a + \lambda b, a + \lambda b \rangle &= \langle a, a \rangle + 2\langle a, b \rangle \lambda + \langle b, b \rangle \lambda^2 = \\ &= \|b\|^2 \lambda^2 + 2\langle a, b \rangle \lambda + \|a\|^2. \end{aligned}$$

A $\|b\| \neq 0$ miatt ez egy olyan másodfokú polinom, amely minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén nemnegatív értékű. Ezért a diszkriminánsa $D \leq 0$. Így

$$\begin{aligned} 4\langle a, b \rangle^2 - 4\|b\|^2 \|a\|^2 &\leq 0 \\ \langle a, b \rangle^2 &\leq \|a\|^2 \|b\|^2 \\ |\langle a, b \rangle| &\leq \|a\| \cdot \|b\|. \end{aligned}$$

2. Gondoljuk végig, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2$ szemléltetése egy forgásfelület. Hogyan nézhet ki a $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + 4x_2 + 1$ felület?

3. Legyen $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$, $F(r) := -\frac{Mr}{\|r\|^3}$, ahol $r = (x_1, x_2, x_3)$, $M > 0$. Adjuk meg az $F =: (P, Q, R)$ koordináta-függvényeit!

4. Legyen

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad g(x, y) := \begin{bmatrix} xy \\ x + y \\ x - y \end{bmatrix},$$

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(u, v, w) := u^2 v + w^3.$$

Írja fel az $f \circ g$ függvényt!

5. Legyen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{ha } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Van-e határértéke a $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ pontban az f függvénynek?
Megoldás: Legyen először $(x_n, y_n) := (\frac{1}{n}, 0)$ $(n \in \mathbb{N})$. $(x_n, y_n) \to (0, 0)$, de $(x_n, y_n) \neq (0, 0)$.

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot 0}{\frac{1}{n^2} + 0} = 0 \to 0.$$

Ha viszont $(x_n, y_n) := (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor ugyan $(x_n, y_n) \to (0, 0)$; $(x_n, y_n) \neq (0, 0)$, de

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}.$$

Mivel két megfelelő, $(0, 0)$-hoz tartó sorozaton különböző a függvényértékek sorozatának határértéke, ezért a függvénynek nincs határértéke $(0, 0)$-ban.

6. Legyen
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$
Mutassa meg, hogy $f \in C[(0,0)]$.

10.3. Többváltozós függvények $\boxed{E}$

10.3.1. Metrikus tér

Legyen $M \neq \emptyset$ és $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre

1^o $\rho(x,y) \geq 0$, és $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2^o $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

3^o $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ (háromszög-egyenlőtlenség)

Az ilyen tulajdonságú ρ függvényt M-beli **metriká**nak nevezzük, és az (M,ρ) legyen a **metrikus tér**.

Példák

1. $(\mathbb{R}, |x-y|)$ metrikus tér.
2. $M \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz és
$$d : M \times M \to \mathbb{R},\ d(x,y) := \begin{cases} 1, \text{ha } x \neq y \\ 0, \text{ha } x = y. \end{cases}$$
(M,d) egy **diszkrét metrikus tér**.
3. a) $(\mathbb{R}^2, \rho_e)$, ahol ha $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2)$, akkor
$$\rho_e(x,y) := \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} = \|x-y\| \quad \text{(euklideszi metrika)}$$
b) $(\mathbb{R}^2, \rho_m)$, ahol
$$\rho_m(x,y) := |x_1-y_1| + |x_2-y_2| \quad (Minkowski - metrika)$$
c) $(\mathbb{R}^2, \rho_c)$, ahol
$$\rho_c(x,y) := \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\} \quad (Csebisev - metrika)$$
d) $(\mathbb{R}^2, \rho_p)$, ahol $p > 1$ és
$$\rho_p(x,y) := (|x_1-y_1|^p + |x_2-y_2|^p)^{\frac{1}{p}}$$
Látható, hogy $\rho_2 = \rho_e$; $\rho_1 = \rho_m$, és belátható, hogy
$$\rho_\infty = \rho_c.$$

4. a) $(C[a,b],\rho_c)$, ahol $\rho_c(f,g) := \max\{|f(x)-g(x)| \mid x \in [a,b]\}$
   b) $(C[a,b],\rho_i)$, ahol $\rho_i(f,g) := \int_a^b |f-g|$

Számos további példa létezik metrikus térre.
Legyen (M,ρ) metrikus tér, és $(x_n) : \mathbb{N} \to M$ egy M-beli sorozat.

10.4. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az (x_n) konvergens, ha $\exists a \in M$, hogy $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N$ esetén $\rho(x_n, a) < \varepsilon$.*

Jele: $\lim x_n = a$ vagy $x_n \to a$.
Könnyen látható, hogy az $(\mathbb{R}, |x-y|)$ metrikus térben a valós konvergens sorozatok lesznek konvergensek.
Az (M,d) diszkrét metrikus térben csak az olyan (x_n) sorozat lesz konvergens, amelyhez $\exists N$, hogy $\forall i \geq N$ esetén $x_i = x_N$.
A 3/a), b), c), d) metrikus terekben pontosan azok a konvergens $(x_n) \subset \mathbb{R}^2$ sorozatok, melyeknek az $(x_{1n}) \subset \mathbb{R}$ és $(x_{2n}) \subset \mathbb{R}$ koordináta-sorozatai konvergensek.
A $(C[a,b],\rho_c)$ metrikus térben ha $(f_n) \subset C[a,b]$ egy konvergens sorozat, akkor $\exists f \in C[a,b]\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N$

$$\rho_c(f_n, f) = \max\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in [a,b]\} < \varepsilon,$$

ami ekvivalens azzal, hogy $\forall x \in [a,b]$ esetén $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Láthatjuk, hogy ez éppen az (f_n) egyenletes konvergenciáját jelenti, és $f_n \hookrightarrow_{[a,b]} f$.

10.5. Definíció. *Legyen (M,ρ) metrikus tér, és $(x_n) \subset M$ egy M-beli sorozat. Azt mondjuk, hogy (x_n)* **Cauchy-sorozat**, *ha $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$, hogy $\forall n,m > N$ esetén $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.*

10.3. Tétel. *Ha $(x_n) \subset M$ konvergens, akkor (x_n) Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás. Bizonyítása szó szerint megegyezik a valós sorozatok Cauchy konvergenciakritériuma bizonyításának első részével (természetesen $|x-y|$ helyett $\rho(x,y)$ értendő...).

Megfordítva általában nem igaz az állítás. Például a $(\mathbb{Q}, |x-y|)$ metrikus térben az $((\frac{n+1}{n})^n) \subset \mathbb{Q}$ egy Cauchy-sorozat, viszont az $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ irracionális számhoz kerül tetszőlegesen közel a sorozat, ezért nincs $\mathbb{Q}$-beli határértéke, így nem konvergens.

10.6. Definíció. *Az (M,ρ) metrikus teret* **teljes metrikus tér***nek nevezzük, ha $\forall (x_n) \subset M$ Cauchy-sorozat konvergens.*

Az $(\mathbb{R}, |x-y|)$, az $(\mathbb{R}^2, \rho_p)$ minden $p > 1$ esetén teljes. A $(C[a,b], \max|f-g|)$ is teljes, de $(C[a,b], \int_a^b |f-g|)$ már nem.

10.3.2. Nyílt és zárt halmazok; kompakt halmaz

Legyen (M,ρ) metrikus tér, $a \in M$ és $r > 0$.

10.7. Definíció. *Az a pont r sugarú* **környezete** *a*

$$K_r(a) := \{x \in M \mid \rho(x,a) < r\}.$$

A $K(a)$ halmaz az a **pont egy környezete**, *ha $\exists r > 0$, hogy*

$$K(a) = K_r(a).$$

Legyen $H \subset M$ és $a \in H$.

10.8. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a* **belső pontja** *H-nak, ha $\exists K(a)$, amelyre $K(a) \subset H$.*

10.9. Definíció. *Legyen $G \subset M$. A G halmazt* **nyílt halmaz***nak nevezzük, ha minden pontja belső pont.*

10.10. Definíció. *Legyen $F \subset M$. Az F halmazt* **zárt halmaz***nak nevezzük, ha a komplementere $\overline{F} := M \setminus F$ nyílt halmaz.*

10.4. Tétel.

1^o *M és $\emptyset$ nyílt halmaz.*

2^o *Ha G_γ $(\gamma \in \Gamma)$ nyílt halmazok $(G_\gamma \subset M,\ \gamma \in \Gamma)$, akkor $\cup_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$ is nyílt halmaz.*

3^o *Ha $G_1, G_2, \ldots, G_n$ véges sok nyílt halmaz $(G_i \subset M,\ i = 1, \ldots, n)$, akkor $\cap_{i=1}^n G_i$ is nyílt halmaz.*

Bizonyítás.

1^o Nyilvánvalóan igaz.

2^o Legyen $a \in \cup_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$ tetszőleges. Ekkor $\exists\hat\gamma \in \Gamma,\ a \in G_{\hat\gamma}$. Mivel $G_{\hat\gamma}$ nyílt, ezért $\exists K(a) \subset G_{\hat\gamma}$, de ekkor $K(a) \subset G_{\hat\gamma} \subset \cup_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$ miatt $K(a) \subset \cup_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$. Tehát a belső pontja a halmazok egyesítésének.

3^o Legyen $a \in \cap_{i=1}^n G_i$ tetszőleges. Ekkor $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ esetén $a \in G_i$. Mivel G_i nyílt, ezért $\exists K_{r_i}(a) \subset G_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$.
Legyen $r := \min\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$, nyilván $r > 0$. $K_r(a) \subset G_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$, így $K_r(a) \subset \cap_{i=1}^n G_i$, tehát a belső pontja a halmazok metszetének.

10.5. Tétel.

1^o *M és $\emptyset$ zárt halmaz.*

2^o *Ha F_γ $(\gamma \in \Gamma)$ zárt halmazok $(F_\gamma \subset M,\ \gamma \in \Gamma)$, akkor $\cap_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma$ is zárt halmaz.*

3^o *Ha $F_1, F_2, \ldots, F_n$ véges sok zárt halmaz $(F_i \subset M,\ i = 1, \ldots, n)$, akkor $\cup_{i=1}^n F_i$ is zárt halmaz.*

Bizonyítás.

1^o M komplementere $\emptyset$, ami nyílt. $\emptyset$ komplementere M, ami nyílt.

2^o A De Morgan-azonosság szerint $\overline{\cap_{\gamma\in\Gamma}F_\gamma} = \cup_{\gamma\in\Gamma}\overline{F_\gamma}$. Minden $\overline{F_\gamma}$ nyílt, az egyesítésük is nyílt, így $\cap_{\gamma\in\Gamma}F_\gamma$ zárt.

3^o $\overline{\cup_{i=1}^n F_i} = \cap_{i=1}^n \overline{F_i}$. $\overline{F_i}$ nyílt, $i = 1, 2, \ldots, n$, és véges sok nyílt metszete is nyílt, így $\cup_{i=1}^n F_i$ zárt.

Legyen $K \subset M$.

10.11. Definíció. *A K halmazt* **kompakt***nak nevezzük, ha bármilyen G_γ ($\gamma \in \Gamma$) nyílt halmazok esetén, amelyre $K \subset \cup_{\gamma\in\Gamma}G_\gamma$ [G_γ ($\gamma \in \Gamma$) a K halmaz „nyílt fedőrendszere”], van olyan $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$, hogy $K \subset \cup_{i=1}^n G_{\gamma_i}$ [van „véges fedőrendszere” is a K halmaznak].*

Az $(\mathbb{R}, |x-y|)$ metrikus térben az $[a, b]$ zárt intervallum, vagy az $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$,..., $[a_k, b_k]$ zárt intervallumok egyesítése kompakt. (Analízis könyvekben Borel-tétel néven megtalálható, hogy bármely $I_\gamma \subset \mathbb{R}$ ($\gamma \in \Gamma$) nyílt intervallumrendszerből, amelyre $[a, b] \subset \cup_{\gamma\in\Gamma}I_\gamma$, kiválasztható véges sok: I_{γ_1}, I_{γ_2},... I_{γ_n}, amelyre $[a, b] \subset \cup_{i=1}^n I_{\gamma_i}$.) A kompakt halmaz a véges sok pontból álló halmaz általánosítása.
$\mathbb{R}^n$-ben egy $H \subset \mathbb{R}^n$ halmaz **korlátos**, ha $\exists R > 0$, hogy $\forall x \in H$ esetén $\|x\| \le R$. Igazolható, hogy a $\rho(x, y) := \|x - y\|$ metrikával ellátott $\mathbb{R}^n$-ben $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt pontosan akkor, ha K korlátos és zárt.

10.3.3. Folytonos függvények

Legyen (M_1, ρ_1) és (M_2, ρ_2) metrikus tér, és legyen $f : M_1 \to M_2$.

10.12. Definíció. *Az f függvény az $a \in D(f)$ pontban* **folytonos**, *ha $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ $\forall x \in D(f)$, amelyre $\rho_1(x, a) < \delta$, teljesül, hogy $\rho_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Jele: $f \in C[a]$.*

Legyen $A \subset D(f) \subset M_1$.

10.13. Definíció. *Azt mondjuk, hogy f* **folytonos az A halmazon**, *ha $\forall a \in A$ esetén $f \in C[a]$. Jele: $f \in C(A)$. Ha $A = D(f)$, akkor $f \in C$.*

10.6. Tétel. *Legyen (M_1, ρ_1), (M_2, ρ_2) metrikus tér, $f : M_1 \to M_2$. $f \in C \Leftrightarrow \forall G \subset M_2$ nyílt halmaz esetén az $f^{-1}(G)$ őskép is nyílt.*

Bizonyítás.
($\Rightarrow$) Legyen $G \subset M_2$ nyílt és $a \in f^{-1}(G)$ tetszőleges. (Ha $f^{-1}(G)$ üres halmaz, akkor nyílt.) Ekkor $f(a) \in G$, és mivel G nyílt, ezért $\exists K(f(a)) \subset M_2$ környezet, amelyre $K(f(a)) \subset G$. Mivel $f \in C[a]$, ezért ehhez a $K(f(a))$ környezethez is

$\exists K(a) \subset M_1$ környezete az a-nak, hogy $\forall x \in K(a)$ esetén $f(x) \in K(f(a))$, azaz $f(K(a)) \subset K(f(a))$. Így $f(K(a)) \subset G$ is. Ebből

$$K(a) \subset f^{-1}(f(K(a))) \subset f^{-1}(G),$$

tehát a belső pontja $f^{-1}(G)$ ősképnek, ezért $f^{-1}(G)$ nyílt.

($\Leftarrow$) Legyen $a \in M_1$ tetszőleges. Belátjuk, hogy $f \in C[a]$. Legyen $K(f(a)) \subset M_2$ tetszőleges. Ez a környezet egy nyílt halmaz, ezért az őskép $f^{-1}(K(f(a))) \subset M_1$ nyílt. Nyilván $a \in f^{-1}(K(f(a)))$, ezért $\exists K(a)$, amelyre $K(a) \subset f^{-1}(K(f(a)))$. Ekkor $\forall x \in K(a)$ esetén $f(x) \in K(f(a))$, ami éppen azt jelenti, hogy $f \in C[a]$.

A folytonos függvényeket és kompakt halmazokat kapcsolja össze a

10.7. Tétel. *(Weierstrass-tétel)*
Legyen $f : M_1 \to M_2$ folytonos függvény és $K \subset M_1$ kompakt halmaz. Ekkor $f(K) \subset M_2$ is kompakt.

Bizonyítás. Legyen G_γ ($\gamma \in \Gamma$) az $f(K)$ egy tetszőleges, nyílt halmazokból álló fedőrendszere, $f(K) \subset \cup_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$. Mivel $K \subset f^{-1}(f(K))$, ezért $K \subset f^{-1}(\cup_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma) = \cup_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(G_\gamma)$. Az $f \in C$, így $f^{-1}(G_\gamma) \subset M_1$ nyílt ($\gamma \in \Gamma$). Tehát $f^{-1}(G_\gamma)$ ($\gamma \in \Gamma$) a K nyílt fedőrendszere. Mivel K kompakt, ezért $\exists \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$, hogy $K \subset \cup_{i=1}^n f^{-1}(G_{\gamma_i})$. Ekkor viszont $f(K) \subset f(\cup_{i=1}^n f^{-1}(G_{\gamma_i})) = \cup_{i=1}^n f(f^{-1}(G_{\gamma_i})) \subset \cup_{i=1}^n G_{\gamma_i}$. Megtaláltuk a G_γ ($\gamma \in \Gamma$) fedőrendszernek azt a véges részhalmazát, amely az $f(K)$ véges fedőrendszere, tehát $f(K)$ kompakt.

Ennek a tételnek a következménye, hogy ha (M, ρ) metrikus tér és $f : M \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor minden $K \subset M$ kompakt esetén az $f_{|K}$ függvénynek van maximuma és minimuma.

10.3.4. Fixponttétel

Legyen $A \neq \emptyset$ halmaz és $f : A \to A$ függvény. Az olyan $a \in A$ pontot, amelyre $f(a) = a$, az f függvény **fixpont**jának nevezzük. Legyen (M, ρ) metrikus tér és $f : M \to M$ leképezés.

10.14. Definíció. *Azt mondjuk, hogy f* **kontrakció** *(összehúzó leképezés), ha $\exists q \in [0, 1)$, hogy $\forall x, y \in M$ esetén $\rho(f(x), f(y)) \le q\rho(x, y)$.*

Könnyen látható, hogy ha $f : M \to M$ kontrakció, akkor folytonos. Ugyanis legyen $a \in M$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges, valamint legyen $\delta = \varepsilon/q > 0$. Ekkor minden $x \in K_\delta(a)$ esetén $\rho(f(x), f(a)) \le q\rho(x, a) < q\varepsilon/q = \varepsilon$.

10.8. Tétel. *(Banach–Cacciopoli–Tyihonov fixponttétel)*
Legyen (M, ρ) teljes metrikus tér. Legyen $f : M \to M$ kontrakció. Ekkor egyértelműen létezik olyan $x^* \in M$, amelyre $f(x^*) = x^*$, azaz pontosan egy fixpontja van az f leképezésnek.

Bizonyítás. Legyen $x_0 \in M$ tetszőleges. Tekintsük az $x_1 := f(x_0)$, $x_2 := f(x_1)$,... $x_{n+1} := f(x_n), \ldots$ sorozatot. Megmutatjuk, hogy $(x_n) \subset M$ Cauchy-sorozat.

1^o $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq q\rho(x_n, x_{n-1}) = q\rho(f(x_{n-1}), f(x_{n-2})) \leq$$
$$\leq q^2\rho(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \ldots \leq q^n\rho(x_1, x_0).$$

2^o Legyen $\forall n, m \in \mathbb{N},\ n > m$. Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség ismételt alkalmazásával, illetve az 1^o részben igazoltak szerint

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x_m) &\leq \rho(x_n, x_{n-1}) + \rho(x_{n-1}, x_{n-2}) + \ldots + \rho(x_{m+1}, x_m) \leq \\ &\leq q^{n-1}\rho(x_1, x_0) + q^{n-2}\rho(x_1, x_0) + \ldots + q^m\rho(x_1, x_0) = \\ &= q^m\rho(x_1, x_0)[1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-m-1}] \leq q^m\rho(x_1, x_0)\frac{1}{1-q}.\end{aligned}$$

3^o A $q \in [0, 1)$ miatt $q^m \to 0$, ezért $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N$ esetén

$$q^m\rho(x_1, x_0)\frac{1}{1-q} < \varepsilon.$$

Legyen $n, m > N,\ n > m$ tetszőleges. Ekkor

$$\rho(x_n, x_m) \leq q^m\rho(x_1, x_0)\frac{1}{1-q} < \varepsilon,$$

tehát (x_n) Cauchy-sorozat. Az (M, ρ) teljessége miatt (x_n) konvergens. Legyen $x^* := \lim x_n$. Megmutatjuk, hogy $x^* \in M$ a leképezés fixpontja. A folytonos függvényekre vonatkozó átviteli elv szerint

$$x^* = \lim x_n = \lim f(x_{n-1}) = f(\lim x_{n-1}) = f(x^*).$$

Az x^* egyértelműségéhez tegyük fel, hogy $y \in M$ is olyan, hogy $f(y) = y$. Ekkor

$$\rho(x^*, y) = \rho(f(x^*), f(y)) \leq q\rho(x^*, y),$$

amiből

$$0 \leq \rho(x^*, y) \cdot (q - 1)$$

következik. A $\rho(x^*, y) \geq 0$, $q - 1 < 0$, ezért szorzatuk csak úgy lehet nemnegatív, ha $\rho(x^*, y) = 0$, amelynek a metrika 1^o tulajdonsága szerint $x^* = y$ a következménye. Tehát egyetlen fixpont van csak.

11. fejezet

Többváltozós függvény differenciálhatósága

Megismerkedünk a parciális deriválttal, a függvény differenciálhatóságával, az iránymenti deriválttal. Szélsőérték-számítás eszköze is lesz a derivált. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk.

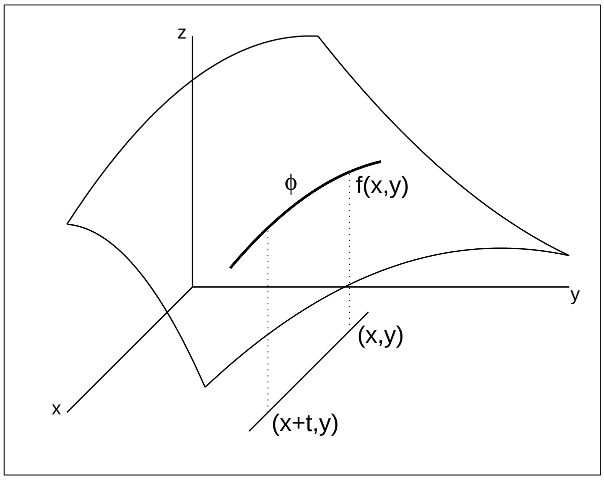
- Parciális derivált
- Többváltozós függvény deriváltja, derivált mátrix
- Parciális deriváltak és a derivált mátrix kapcsolata
- Felület érintősíkja
- Térgörbe érintője
- Szélsőérték fogalma és szükséges feltétele
- Young tétele
- Második derivált, Taylor-formula
- Szélsőérték elégséges feltétele

11.1. Többváltozós deriválás $\boxed{\text{A}}$

11.1.1. Parciális derivált

Legyen $f : \mathbb{R}^2 \supset\!\!\to \mathbb{R}$ függvény. Tekintsük az értelmezési tartomány egy $a = (x, y) \in intD(f)$ belső pontját. Fektessünk az a ponton át az x tengellyel párhuzamos egyenest, ennek egy pontja

$$(x + t, y),\ t \in \mathbb{R}$$



11.1. ábra.

lesz, majd vegyük a függvény értékeit ezekben a pontokban: $f(x+t, y)$. Ekkor egy $\phi : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$, $\phi(t) := f(x+t, y)$ valós-valós függvényt értelmeztünk, a képe egy, a felületen futó görbe (11.1. ábra).

11.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az f függvény az (x, y) pontban az* **első változó szerint parciálisan differenciálható***, ha ϕ differenciálható a $t = 0$ pontban.*
Ha $\phi \in D[0]$, akkor az f első változó szerinti **parciális deriváltja** *az (x, y) pontban legyen a $\phi'(0)$, azaz*

$$\partial_1 f(x, y) := \phi'(0).$$

Emlékezve a valós-valós függvény differenciálhatóságára

$$\partial_1 f(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t, y) - f(x, y)}{t}$$

lesz ez a parciális derivált.

Látható, hogy az első változó szerinti parciális deriválhatóság csak a felületi görbe simaságát jelenti a $t = 0$ pontban, és a $\partial_1 f(x, y)$ ennek a felületi görbének a meredekségét adja. Az is leolvasható, hogy

$$\frac{f(x+t, y) - f(x, y)}{t} \approx \partial_1 f(x, y), \text{ ha } t \approx 0,$$

ami úgy is olvasható, hogy csupán az első tengely irányába kimozdulva az (x, y) pontból

$$f(x+t, y) \approx f(x, y) + \partial_1 f(x, y) \cdot t, \text{ ha } t \approx 0.$$

Az előzőeknek megfelelően, ha az (x, y) ponton át az y tengellyel párhuzamos egyenest veszünk fel, akkor is kapunk egy $\psi : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$, $\psi(t) := f(x, y+t)$ felületi görbét. Ha $\psi \in D[0]$, akkor az f a második változója szerint parciálisan differenciálható az (x, y) pontban, és

$$\partial_2 f(x,y) := \psi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x,y+t) - f(x,y)}{t}$$

lesz az f második változó szerinti parciális deriváltja az (x, y) pontban. Az előzőekhez hasonló a $\partial_2 f(x, y)$ jelentése is.
Gyakran használják még $\partial_1 f(x, y)$ helyett a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $f'_x(x, y)$ és a $D_1 f(x, y)$ jelöléseket is. Ennek megfelelőek a $\partial_2 f(x, y)$ helyett használt jelölések is.
Megfigyelhető, hogy az f első változó szerinti parciális deriválhatóságánál a második koordináta, az y nem változik, állandó marad. Ez indokolja, hogy ha egy tetszőleges (x, y) pontban akarjuk például az

$$f(x,y) := x^2y^3 + 2x + y \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvény első változó szerinti parciális deriváltját kiszámítani az (x, y) pontban, akkor a deriválás során az y konstansnak számít, tehát

$$\partial_1 f(x,y) = 2xy^3 + 2 + 0 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

Ugyanígy a második változó szerinti parciális deriválás során x számít konstansnak, tehát

$$\partial_2 f(x,y) = x^2 3y + 1 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2).$$

Sajnos az f akár mindkét változó szerinti parciális differenciálhatóságából még a függvény folytonossága sem következik az adott pontban. Például az

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \begin{cases} 1, \text{ ha } xy = 0 \\ 0, \text{ ha } xy \neq 0 \end{cases}$$

függvényre $\partial_1 f(0, 0) = 0$ és $\partial_2 f(0, 0) = 0$, de $f \notin C[(0, 0)]$.

11.1.2. Deriváltmátrix

Most foglalkozzunk a differenciálhatóság fogalmának olyan kialakításával, amely valódi általánosítása a valós-valós függvény differenciálhatóságának.
Legyen $f : \mathbb{R}^2 \supset\!\!\to \mathbb{R}$, $(x, y) \in intD(f)$.

11.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy f* **differenciálható** *az (x, y) pontban, ha van olyan $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ és olyan $\alpha : \mathbb{R}^2 \supset\!\!\to \mathbb{R}$ függvény, hogy minden olyan $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ vektorra, amelyre $(x + h_1, y + h_2) \in D(f)$, teljesül, hogy*

$$f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y) = A_1h_1 + A_2h_2 + \alpha(h_1,h_2)$$

és

$$\lim_{h\to 0} \frac{\alpha(h)}{\|h\|} = 0.$$

A $\lim_{h\to 0} \frac{\alpha(h)}{\|h\|} = 0$ az $\alpha(h)$ maradéktag „kicsiségére" utal. Nyilván $\lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$ is igaz, de ha $\alpha(h)$ értékeit elosztjuk a $\|h\| \approx 0$ kicsi számmal, akkor ezzel „felnagyítjuk" az $\alpha(h)$ értékeit, így ha még ez a hányados is 0-hoz tart, akkor $\alpha(h)$ igazán „kicsi".
Amikor a $h := (h_1, 0)$ alakú, akkor átrendezés és határértékképzés után

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h_1, y) - f(x,y)}{h_1} = \lim_{h_1\to 0} \left(A_1 + \frac{\alpha(h_1, 0)}{|h_1|} \right) = A_1,$$

amely azt jelenti, hogy ha f differenciálható az (x,y) pontban, akkor A_1 csak $\partial_1 f(x,y)$ lehet.
A $h := (0, h_2)$ alakú vektorokra pedig az adódna, hogy A_2 csak $\partial_2 f(x,y)$ lehet.
Így ha f differenciálható az (x,y) pontban, akkor a függvény $f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y)$ megváltozása jól közelíthető a

$$\partial_1 f(x,y)h_1 + \partial_2 f(x,y)h_2$$

„lineáris függvénnyel", sőt az elkövetett hiba, az $\alpha(h_1, h_2)$ elhanyagolhatóan kicsi: még a felnagyított $\frac{\alpha(h)}{\|h\|}$ hányados is 0-hoz közeli, ha $\|h\|$ kicsi.
Mátrixokat használva az f differenciálhatósága azt jelenti, hogy van olyan $\alpha : \mathbb{R}^2 \supset\!\!\to \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y) = [\partial_1 f(x,y)\ \partial_2 f(x,y)] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \alpha(h_1, h_2)$$

és

$$\lim_{h\to 0} \frac{\alpha(h)}{\|h\|} = 0.$$

Az f függvény differenciálhatóságát az $(x,y) \in intD(f)$ pontban jelölje $f \in D[(x,y)]$, és az f deriváltja ebben a pontban

$$f'(x,y) := [\partial_1 f(x,y)\ \partial_2 f(x,y)] \in \mathbb{R}^{1\times 2}.$$

Ha $f \in D[(x,y)]$, akkor $f \in C[(x,y)]$ is, mert

$$\lim_{h_1,h_2\to 0} f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y) = \lim_{h_1,h_2\to 0} \partial_1 f(x,y)h_1 + \partial_2 f(x,y)h_2 + \alpha(h_1,h_2) = 0.$$

A matematika alkalmazásai során gyakran használják a $h_1 =: \Delta x$, $h_2 =: \Delta y$ jelölést; a függvény megváltozását

$$\Delta f := f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y)$$

jelöli. Ekkor a

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

arra utal, hogy a függvény Δf megváltozását jól közelíti a parciális deriváltakkal készített lineáris függvény. Ennek még van egy alig magyarázható, „végtelen kicsi mennyiségeket" használó változata is:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

A $\mathrm{d}f$ az „f függvény differenciálja” nevet viseli.

A kétváltozós függvényre kialakított fogalmakat minden nehézség nélkül általánosíthatjuk a sokváltozós függvényekre is.
Legyen $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\rightarrow \mathbb{R},\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \in intD(f)$.

$$\partial_i f(x) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_i + t, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{t}$$

az f i-edik változó szerinti parciális deriváltja.
Az $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az $x \in intD(f)$ pontban differenciálhatónak nevezzük, ha létezik olyan

$$A := [A_1\ A_2\ \ldots\ A_n] \in \mathbb{R}^{1\times n},\ \text{és létezik olyan}\ \alpha : \mathbb{R}^n \supset\!\!\rightarrow \mathbb{R}$$

függvény, hogy minden $h \in \mathbb{R}^n$ vektorra

$$f(x+h) - f(x) = Ah + \alpha(h),\ \text{ahol}\ \lim_{h\to 0} \frac{\alpha(h)}{\|h\|} = 0.$$

Itt is igaz, hogy $A_i = \partial_i f(x),\ i = 1, 2, \ldots, n$. Ha $f \in D[x]$, akkor

$$f'(x) = [\partial_1 f(x)\ \partial_2 f(x)\ \ldots\ \partial_n f(x)].$$

Végül legyen $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\rightarrow \mathbb{R}^k,\ x \in intD(f)$. Az f függvény differenciálható az x pontban, ha létezik olyan $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$, és van olyan $\alpha : \mathbb{R}^n \supset\!\!\rightarrow \mathbb{R}^k$ függvény, hogy minden $h \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$f(x+h) - f(x) = Ah + \alpha(h),\ \text{ahol}\ \lim_{h\to 0} \frac{\alpha(h)}{\|h\|} = 0.$$

Most $A_{ij} = \partial_j f_i(x)$, és így

$$f'(x) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(x) & \partial_2 f_1(x) & \ldots & \partial_n f_1(x) \\ \partial_1 f_2(x) & \partial_2 f_2(x) & \ldots & \partial_n f_2(x) \\ \vdots & & & \\ \partial_1 f_k(x) & \partial_2 f_k(x) & \ldots & \partial_n f_k(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times n}$$

az f deriváltja az x pontban. Jacobi-mátrixnak nevezik.
Például

1. $f(x,y,z) := xyz$ esetén $f'(x,y,z) = [yz\ xz\ xy]$
2. $r(t) := \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{bmatrix}$ esetén $r'(t) := \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{bmatrix}$
3. $F(x,y,z) = \begin{bmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{bmatrix}$ esetén $F'(x,y,z) = \begin{bmatrix} \partial_x P & \partial_y P & \partial_z P \\ \partial_x Q & \partial_y Q & \partial_z Q \\ \partial_x R & \partial_y R & \partial_z R \end{bmatrix}$

11.1.3. Érintő

Felület érintősíkja

Legyen $f : \mathbb{R}^2 \supset\!\!\to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in intD(f)$, és tegyük fel, hogy $f \in D[(x_0, y_0)]$. Ez azt jelenti, hogy

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \approx \partial_1 f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_2 f(x_0, y_0)(y - y_0),$$

ha $(x, y) \approx (x_0, y_0)$, és ez a közelítés „elég jó”. Legyen $z_0 := f(x_0, y_0)$, akkor a

$$z := \partial_1 f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_2 f(x_0, y_0)(y - y_0) + z_0$$

esetén $f(x, y) \approx z$, ha $(x, y) \approx (x_0, y_0)$. Vegyük észre, hogy ha

$$n := (\partial_1 f(x_0, y_0), \partial_2 f(x_0, y_0), -1),$$

$$r_0 := (x_0, y_0, z_0),$$

$$r := (x, y, z),$$

akkor az $\langle n, r - r_0 \rangle = 0$ egyenletű síkról láttuk be, hogy „elég jól” közelíti az f függvénnyel leírt felületet.
Az $\langle n, r - r_0 \rangle = 0$ egyenletű síkot az f felület $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ponthoz tartozó **érintősík**jának nevezzük.

Térgörbe érintője

Legyen $r : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}^3$, $t_0 \in intD(r)$, és tegyük fel, hogy $r \in D[t_0]$.
Ha

$$r(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix},$$

akkor

$$r(t) - r(t_0) = \begin{bmatrix} x(t) - x(t_0) \\ y(t) - y(t_0) \\ z(t) - z(t_0) \end{bmatrix} \approx \dot{r}(t_0) \cdot (t - t_0) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \\ \dot{z}(t_0) \end{bmatrix} (t - t_0),$$

és ez a közelítés „elég jó”. Ez azt jelenti, hogy a

$\underline{v} := \begin{bmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \\ \dot{z}(t_0) \end{bmatrix}$ irányvektorú és $\underline{r}_0 := \begin{bmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \\ z(t_0) \end{bmatrix}$ ponton átmenő

egyenes $\underline{r} := \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ futópontjára

$$\begin{aligned} x &= x(t_0) + \dot{x}(t_0) \cdot (t - t_0) \\ y &= y(t_0) + \dot{y}(t_0) \cdot (t - t_0) \\ z &= z(t_0) + \dot{z}(t_0) \cdot (t - t_0) \end{aligned}$$

és ez az egyenes közel halad a görbéhez, azaz $r(t) \approx \underline{r}$, ha $t \approx t_0$.
Az $\underline{r} = \underline{r}_0 + \underline{v}(t - t_0)$ egyenest az r térgörbe t_0 paraméterértékhez tartozó **érintőegyenes**ének nevezzük, amelynek irányvektora az $\dot{r}(t_0)$ **érintővektor**.
(Hagyományosan térgörbék esetén a deriváltat nem vessző, hanem pont jelöli.)

11.1.4. Szélsőérték

Legyen $f : \mathbb{R}^2 \supset\!\!\to \mathbb{R},\ a = (a_1, a_2) \in D(f)$.

11.3. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az f függvénynek* **lokális minimuma** *van az a pontban, ha van olyan $K(a)$ környezete az a pontnak, hogy minden $x = (x_1, x_2) \in K(a) \cap D(f)$ esetén*

$$f(x_1, x_2) \geq f(a_1, a_2) \text{ vagy } f(x) \geq f(a).$$

Hasonló a **lokális maximum** *fogalma is.*

11.1. Tétel. *(Lokális szélsőérték szükséges feltétele)*
Legyen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R},\ a = (a_1, a_2) \in intD(f)$ és $f \in D[a]$. Ha f-nek a-ban lokális szélsőértéke (vagy minimuma vagy maximuma) van, akkor $f'(a) = 0$.
$[f'(a) = 0 \Longleftrightarrow \partial_1 f(a_1, a_2) = 0$ *és* $\partial_2 f(a_1, a_2) = 0.]$

Bizonyításként elég arra gondolni, hogy ha f-nek az (a_1, a_2) pontban lokális minimuma van, akkor a

$$\phi : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}, \quad \phi(t) := f(t, a_2)$$

függvénynek a $t = a_1$ pontban lesz lokális minimuma.
Mivel $f \in D[(a_1, a_2)]$, ezért $\phi \in D[a_1]$, ezért $\phi'(a_1) = 0$, ami éppen azt jelenti, hogy $\partial_1 f(a_1, a_2) = 0$.
Ugyanez elmondható a

$$\psi : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}, \quad \psi(t) := f(a_1, t)$$

függvényről is. Így $\psi'(a_2) = 0$, ami $\partial_2 f(a_1, a_2) = 0$.
Ezzel a módszerrel kereshetjük meg egy differenciálható függvény lehetséges szélsőértékhelyeit.
Eredményeinket szinte változtatás nélkül vihetjük át $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R}$ függvényre is.

11.2. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R},\ a \in intD(f)$ és $f \in D[a]$. Ha f-nek a-ban lokális szélsőértéke van, akkor $f'(a) = 0$.*
$[f'(a) = 0 \Longleftrightarrow \partial_1 f(a) = 0,\ \partial_2 f(a) = 0, \ldots, \partial_n f(a) = 0.]$

Ha $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R}$ és $f \in D[a]$, akkor az $f'(a) \in \mathbb{R}^{1\times n}$ sormátrix helyett a $\text{grad} f(a) := (f'(a))^T$ vektort használják.
Tehát

$$\text{grad} f(a) = \begin{bmatrix} \partial_1 f(a) \\ \partial_2 f(a) \\ \vdots \\ \partial_n f(a) \end{bmatrix} \text{ (oszlopmátrix, amit azonosíthatunk egy vektorral).}$$

A grad$f(a)$ szemléletes jelentését a 4. feladatban mutatjuk meg.

11.2. Feladatok

1. Képzelje el az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

   $f(x, y) := x^2 + y^2$;
   $f(x, y) := x^2 + y^2 + 4x - 2y + 10$;
   $f(x, y) := 2x^2 + 5y^2$;

   függvényekkel származtatott felületeket. Hogyan nézhet ki a

   $$h : \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 100\} \to \mathbb{R}, \quad h(x, y) := -x^2 - y^2 + 100$$

   függvény felülete?

2. Írja fel az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := x^2 y^3$ függvény $(x_0, y_0) := (1, 2)$ ponthoz tartozó érintősíkját.

3. Írja fel az $r : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3$, $r(t) := (2\cos t, 2\sin t, t)$ térgörbe bármely $t_0 \in (0, 4\pi)$ ponthoz tartozó érintővektorát. Számolja ki az $\langle \dot{r}(t_0), e_3 \rangle$ skaláris szorzatot ($e_3 := (0, 0, 1)$). Értelmezze az eredményt!

4. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a \in intD(f)$ és $e \in \mathbb{R}^2$, amelyre $\|e\| = 1$. Az f függvény a pontbeli e **irány menti derivált**ján a

   $$\partial_e f(a) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(a + te) - f(a))$$

   határértéket értjük, ha ez a határérték létezik.
   Ha $f \in D[a]$, akkor megmutatható, hogy

   $$\partial_e f(a) = \langle \mathrm{grad} f(a), e \rangle.$$

   Mutassuk meg, hogy a felület a grad$f(a)$ vektorral párhuzamos irányban a legmeredekebb az a pontban.
   Megoldás: Azt az $\hat{e} \in \mathbb{R}^2$, $\|\hat{e}\| = 1$ irányt kellene megtalálni, amelyre $\partial_e f(a) \le \partial_{\hat{e}} f(a)$, ha $e \in \mathbb{R}^2$, $\|e\| = 1$. Síkbeli vektorok esetén láthattuk a Lineáris Algebrában, hogy

   $$\langle \mathrm{grad} f(a), e \rangle = \|\mathrm{grad} f(a)\| \cdot \|e\| \cos \alpha,$$

   ahol α a két vektor hajlásszöge. Mivel a $\|\mathrm{grad} f(a)\|$ nem változik (az $a \in intD(f)$ rögzített), az $\|e\| = 1$, ezért a szorzat akkor a legnagyobb, ha $\cos \alpha = 1$, azaz e párhuzamos a grad$f(a)$ vektorral.
   Ennek a következménye, hogy egy hegyről lefutó patak, de a gleccserek is minden pontban az abban a pontban érvényes gradienssel párhuzamosan mozognak.

5. **Legkisebb négyzetek módszere**
Tegyük fel, hogy valamilyen összefüggés kimutatásához méréseket végzünk. Az x_i értékhez y_i mérési eredmény tartozik. Az a sejtésünk, hogy az (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ pontoknak egy egyenesen kellene elhelyezkedniük. Keressük meg a mérési pontokhoz legjobban illeszkedő $y = Ax + B$ alakú egyenest!
Megoldás: A $\sum_{i=1}^{n}(Ax_i + B - y_i)^2$ a mérési pont és az egyenes közötti összes eltérés négyzetösszege. Szeretnénk, ha ez a legkisebb lenne.
Legyen $e(A, B) := \sum_{i=1}^{n}(Ax_i + B - y_i)^2$. Ott lehet minimális az e függvény, ahol $e'(A, B) = 0$, azaz

$$\partial_A e(A,B) = \sum 2(Ax_i + B - y_i)x_i = 0$$
$$\partial_B e(A,B) = \sum 2(Ax_i + B - y_i) = 0$$

Részletesebben

$$A\sum x_i^2 + B\sum x_i = \sum x_i y_i$$
$$A\sum x_i + Bn = \sum y_i$$

Ez egy kétismeretlenes (A és B) lineáris egyenletrendszer, amelynek megoldása (mindig megoldható, ha az x_i pontok különböznek)

$$A = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \quad B = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}.$$

(Az összegzések mindenütt 1-től n-ig értendők.) Megmutatható, hogy az ilyen A és B esetén az $y = Ax+B$ valóban a legközelebb megy a pontokhoz.

6. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := e^{xy}\cos(x^2y^3)$.
Számítsa ki a $\partial_x f(x,y)$, $\partial_y f(x,y), \partial_y(\partial_x f)(x,y)$ és $\partial_x(\partial_y f)(x,y)$ parciális deriváltakat. Mit tapasztal?

7. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

Mutassa meg, hogy

$$\partial_y(\partial_x f)(0,0) \neq \partial_x(\partial_y f)(0,0).$$

8. Keresse meg az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^4 + y^4 - 2x + 3y + 1$ függvény lokális szélsőértékeit.

9. A $2x^5y^3 + x^3y^5 - 3x^4y^2 + 5xy^3 = 6x^2 - 1$ egyenlőség $x = 1$ és $y = 1$ esetén teljesül. Van-e ezen kívül más megoldása az egyenletnek?

Megoldás: Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := 2x^5y^3 + x^3y^5 - 3x^4y^2 + 5xy^3 - 6x^2 + 1$. Nyilván $f \in C^1$ és $f(1, 1) = 0$.
$\partial_2 f(x, y) = 6x^5y^2 + 5x^3y^4 - 6x^4y + 15xy^2$, ezért $\partial_2 f(1, 1) = 20 \neq 0$.
Az implicit függvény tétele szerint létezik $K_\mu(1)$ és $K_\rho(1)$ környezet és van olyan $\phi : K_\mu(1) \to K_\rho(1)$ differenciálható függvény, amelyre minden $x \in (1-\mu, 1+\mu)$ esetén $f(x, \phi(x)) = 0$, azaz végtelen sok megoldása van az egyenletnek. (Természetesen ez nem jelenti azt, hogy az $(1, 1)$ számpáron kívül van még más, egészekből álló számpár is ezek között!) Mivel

$$\partial_1 f(x, y) = 10x^4y^3 + 3x^2y^5 - 12x^3y^5 + 5y^3 - 12x,\ \partial_1 f(1, 1) = -6,$$

ezért

$$\phi'(1) = -\frac{\partial_1 f(1, 1)}{\partial_2 f(1, 1)} = \frac{3}{10}.$$

Ezt felhasználva a ϕ függvényt közelítőleg elő tudjuk állítani:

$$\phi(x) \approx \phi(1) + \phi'(1)(x - 1),\ \text{ha } x \approx 1,$$

azaz

$$\phi(x) \approx 1 + \frac{3}{10}(x - 1),\ \text{ha } x \approx 1.$$

10. Tegyük fel, hogy van olyan $y : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, amelyet az $xy + e^{x+y} - y^2 + 5 = 0$ egyenlet definiál. Számítsuk ki a deriváltját!
Megoldás: Legyen $f : \mathbb{R}^2 \supset\!\!\to \mathbb{R}, f(x, y) := xy + e^{x+y} - y^2 + 5$. A feltétel szerint minden $x \in D(y)$ esetén

$$h(x) := f(x, y(x)) = 0,$$

ezért a h függvény deriváltja is 0, azaz minden $x \in D(y)$ esetén

$$h'(x) = (xy(x)+e^{x+y(x)}-y^2(x)+5)' = y(x)+xy'(x)+e^{x+y(x)}\cdot(1+y'(x))-2y(x)y'(x) = 0.$$

Ebből $y'(x)$ kifejezhető:

$$y'(x) = -\frac{y(x) + e^{x+y(x)}}{x + e^{x+y(x)} - 2y(x)} \quad (x \in D(y)).$$

Az eredményt gyakran a felületes

$$y' = -\frac{y + e^{x+y}}{x + e^{x+y} - 2y}$$

alakban is felírják.
Megjegyezzük, hogy ilyenkor a feltételek ellenőrzése nélkül az implicit módon definiált függvény deriválási szabályát alkalmazzuk valójában.

11. Egy gáz állapotát az $F(p, V, T) = 0$ állapotegyenlettel adjuk meg. (Ideális gáz esetén ez $pV - nRT = 0$ alakú.) Ez az egyenlet három implicit függvényt definiál:

$$\begin{aligned} p &= p(V, T), \\ V &= V(T, p), \\ T &= T(p, V). \end{aligned}$$

Mutassuk meg, hogy

$$\partial_V p(V, T) \cdot \partial_T V(T, p) \cdot \partial_p T(p, V) = -1.$$

Megoldás: Feltételezve, hogy teljesülnek az implicit függvény tételében szereplő feltételek, az implicit függvényeket rendre visszahelyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (V, T) &\mapsto F(p(V, T), V, T) = 0, \\ (T, p) &\mapsto F(p, V(T, p), T) = 0, \\ (p, V) &\mapsto F(p, V, T(p, V)) = 0. \end{aligned}$$

Az azonosan 0 függvény parciális deriváltja is 0, ezért

$$\begin{aligned} &\partial_V F(p(V,T), V, T) = \partial_1 F \cdot \partial_V p + \partial_2 F \cdot \partial_V V + \partial_3 F \cdot \partial_V T = 0 \Rightarrow \partial_V p = -\frac{\partial_2 F}{\partial_1 F}, \\ &\partial_T F(p, V(T,p), T) = \partial_1 F \cdot \partial_T p + \partial_2 F \cdot \partial_T V + \partial_3 F \cdot \partial_T T = 0 \Rightarrow \partial_T V = -\frac{\partial_3 F}{\partial_2 F}, \\ &\partial_p F(p, V, T(p,V)) = \partial_1 F \cdot \partial_p p + \partial_2 F \cdot \partial_p V + \partial_3 F \cdot \partial_p T = 0 \Rightarrow \partial_p T = -\frac{\partial_1 F}{\partial_3 F}. \end{aligned}$$

Ebből

$$\partial_V p \cdot \partial_T V \cdot \partial_p T = \left(-\frac{\partial_2 F}{\partial_1 F}\right)\left(-\frac{\partial_3 F}{\partial_2 F}\right)\left(-\frac{\partial_1 F}{\partial_3 F}\right) = -1.$$

Megjegyezzük, hogy a felületesen gondolkodók csodálkoznak azon, hogy hagyományos jelölésekkel és formális törteknek véve a parciális deriváltakat

$$\frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = 1$$

lenne a várható eredmény... A $pV - nRT = 0$ esetet végigszámolva győződjünk meg róla, hogy a szorzat valóban (-1).

12. Legyen $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \Phi(u, v) = \begin{bmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} u + v \\ u^2 + v^2 \\ u^3 + v^3 \end{bmatrix}$ egy „kétparaméteres módon adott felület”. Az $(u_0, v_0) := (1, 2)$ paraméterértékhez

tartozó érintősíkjának adjuk meg az egyik normálvektorát!
Megoldás: A

$$g : (u, v) \mapsto \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u + v \\ u^2 + v^2 \end{bmatrix}$$

függvény inverze a

$$g^{-1} : (x, y) \mapsto \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}$$

függvény lenne. Ezt a z függvénybe helyettesítve a

$$z \circ g^{-1} : (x, y) \mapsto z(u(x, y), v(x, y))$$

kétváltozós valós értékű függvényként állna elő a Φ felület. Az érintősíkjának normálvektora

$$\underline{n} = (\partial_x z(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)), \partial_y z(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)), -1).$$

Látható, hogy éppen a $(z \circ g^{-1})'(x_0, y_0)$ deriváltra lenne szükségünk. Felhasználva az inverz függvény tételét azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
(z \circ g^{-1})'(x_0, y_0) &= z'(g^{-1}(x_0, y_0)) \cdot (g^{-1})'(x_0, y_0) = \\
&= \begin{bmatrix} \partial_u z(u_0, v_0) & \partial_v z(u_0, v_0) \end{bmatrix} \cdot (g'(u_0, v_0))^{-1} = \\
&= \begin{bmatrix} 3u_0^2 & 3v_0^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2u_0 & 2v_0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & \frac{9}{2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Tehát $\partial_x z(u(1,2), v(1,2)) = -6$ és $\partial_y z(u(1,2), v(1,2)) = \frac{9}{2}$, így az érintősík egyik normálvektora $\underline{n}(-6, \frac{9}{2}, -1)$.

13. Keressük meg az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) := x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1$ függvénynek a

$$Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

zárt halmazon a lokális szélsőértékhelyeit.
Megoldás: Az

$$\mathrm{int}Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

nyílt körlemezen ott lehet lokális szélsőértéke az f függvénynek, ahol

$$\begin{aligned}
\partial_1 f(x, y) &= 2x - 2 = 0 \\
\partial_2 f(x, y) &= 2y + 4 = 0.
\end{aligned}$$

Ebből $(x_0, y_0) = (1, -2)$ adódik, ami nincs az $\mathrm{int}Q$ nyílt körlemezben, azaz f-nek nincs lokális szélsőértéke a körlemez belsejében. Mivel Q kompakt halmaz (korlátos és zárt), ezért a folytonos f függvénynek van minimuma és maximuma is Q-ban. Tehát Q határán vannak ezek a szélsőértékhelyek. Keressük meg az f függvény feltételes minimumát és maximumát a $g(x, y) :=$

$x^2 + y^2 - 1 = 0$ feltétel mellett!
Készítsük el az $F(x, y) := f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ függvényt.

$$\begin{aligned} \partial_1 F(x,y) = 2x - 2 + 2\lambda x &= 0 \\ \partial_2 F(x,y) = 2y + 4 + 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Megoldva a háromismeretlenes egyenletrendszert (éppen annyi egyenlet áll rendelkezésünkre, amennyi az ismeretlenek száma...), azt kapjuk, hogy $x = \frac{1}{1+\lambda}$, $y = -\frac{2}{1+\lambda}$, amelyekből

$$\frac{1}{(1+\lambda)^2} + \frac{4}{(1+\lambda)^2} = 1.$$

Két megoldás is van: $\lambda_1 = \sqrt{5} - 1$ és $\lambda_2 = -\sqrt{5} - 1$. Ezekhez a $P_1(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$ és a $P_2(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ pontok tartoznak.
Legyen először $\lambda_1 = \sqrt{5} - 1$ és $P_1(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$.

$$\begin{aligned} F_1(x,y) &= f(x,y) + \lambda_1 g(x,y) \\ F_1'(x,y) &= \left[\begin{array}{cc} 2x - 2 + 2(\sqrt{5}-1)x & 2y + 4 + 2(\sqrt{5}-1)y \end{array}\right] \\ F_1''(x_1,y_1) &= \left[\begin{array}{cc} 2 + 2(\sqrt{5}-1) & 0 \\ 0 & 2 + 2(\sqrt{5}-1) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 2\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{5} \end{array}\right] \end{aligned}$$

egy pozitív definit kvadratikus alak mátrixa, így bármely $h \in \mathbb{R}^2, h \neq 0$ vektor esetén $\langle F_1''(x_1, y_1)h, h\rangle > 0$. Emiatt a $P_1(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$ pontban minimuma van az f függvénynek a $g = 0$ feltétel mellett.
A $\lambda_2 = -\sqrt{5} - 1$ és $P_2(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ szintén definiál egy $F_2(x, y) = f(x, y) + \lambda_2 g(x, y)$ függvényt.

$$\begin{aligned} F_2'(x,y) &= \left[\begin{array}{cc} 2x - 2 + 2(-\sqrt{5}-1)x & 2y + 4 + 2(-\sqrt{5}-1)y \end{array}\right] \\ F_2''(x_2,y_2) &= \left[\begin{array}{cc} 2 + 2(-\sqrt{5}-1) & 0 \\ 0 & 2 + 2(-\sqrt{5}-1) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} -2\sqrt{5} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{5} \end{array}\right] \end{aligned}$$

egy negatív definit kvadratikus alak mátrixa, így bármely $h \in \mathbb{R}^2, h \neq 0$ vektor esetén $\langle F_2''(x_2, y_2)h, h\rangle < 0$. Emiatt a $P_2(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ pontban maximuma van az f függvénynek a $g = 0$ feltétel mellett.

11.3. Többváltozós deriválás $\boxed{E}$

11.3.1. Parciális derivált és deriváltmátrix

Legyen $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R},\ x \in intD(f)$.

11.4. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az f az i-edik változó szerint ($i = 1, 2, \ldots, n$) parciálisan differenciálható az x pontban, ha*

$$\exists \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x + te_i) - f(x)) \in \mathbb{R}.$$

(Itt $e_i = (0, \ldots, 1^{i)}, \ldots, 0)$ az i-edik egységvektor.)
Ha létezik a határérték, akkor az f i-edik változó szerinti parciális deriváltja az x pontban

$$\partial_i f(x) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x + te_i) - f(x)).$$

11.5. Definíció. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R}^k$, $x \in intD(f)$. Azt mondjuk, hogy f differenciálható az x pontban ($f \in D[x]$), ha $\exists F_x : D(f) \to \mathbb{R}^{k \times n}$ mátrixértékű függvény, amelyre $F_x \in C[x]$ és $\forall z \in D(f)$ esetén $f(z) - f(x) = F_x(z) \cdot (z - x)$. Ha $f \in D[x]$, akkor $f'(x) := F_x(x)$ a deriváltmátrix.*

11.3. Tétel. *$f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R}^k$, $x \in intD(f)$*
$f \in D[x] \Longleftrightarrow f_j \in D[x]$, $j = 1, 2, \ldots, k$

Bizonyítás.

$$\text{Az } f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_k \end{bmatrix}, \text{ az } F_x = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_k \end{bmatrix},$$

ahol $F_j \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ sormátrix. Ezért az

$$f(z) - f(x) = F_x(z) \cdot (z - x) \Leftrightarrow f_j(z) - f_j(x) = F_j(z) \cdot (z - x), \ j = 1, \ldots, k.$$

11.4. Tétel. *Ha $g : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R}^m$, $g \in D[x]$ és $f : \mathbb{R}^m \supset\!\!\to \mathbb{R}^p$, $f \in D[g(x)]$, akkor $f \circ g \in D[x]$, és $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.*

Bizonyítás.A bizonyítás szó szerint megegyezik a valós-valós közvetett függvény differenciálhatóságáról szóló tételével, csupán a $G_x : D(g) \to \mathbb{R}^{m \times n}$ és $F_{g(x)} : D(f) \to \mathbb{R}^{p \times m}$ függvényeket kell szerepeltetni.

11.5. Tétel. *Ha $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R}^k$, $f \in D[x]$, akkor*

$$f'(x) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(x) & \ldots & \partial_n f_1(x) \\ \vdots & & \\ \partial_1 f_k(x) & \ldots & \partial_n f_k(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times n}.$$

Bizonyítás. Ha $f \in D[x]$, akkor $\exists F_x : D(f) \to \mathbb{R}^{k\times n}$, $F_x \in C[x]$, amelyre $\forall z \in D(f)$ esetén $f(z) - f(x) = F_x(z) \cdot (z - x)$.
Legyen $j = 1, 2, \ldots, k$ és $i = 1, 2, \ldots, n$. Ekkor $f_j(z) - f_j(x) = (F_x(z))_j \cdot (z - x)$, ahol $(F_x(z))_j$ az $F_x(z)$ j-edik sora.
Válasszuk a

$$z := \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ t \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in D(f)$$

vektort. Ekkor

$$f_j(z) - f_j(x) = f_j(x_1, \ldots, t, \ldots, x_n) - f_j(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) =$$

$$= (F_x(z))_j \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ t - x_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = (F_x(z))_{ji}(t - x_i).$$

Ha $t \neq x_i$, akkor

$$\partial_i f_j(x) = \lim_{t\to x_i} \frac{f_j(x_1, \ldots, t, \ldots, x_n) - f_j(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{t - x_i} = \lim_{t\to x_i} (F_x(z))_{ji} = (F_x(x))_{ji},$$

hiszen ha $F_x \in C[x]$, akkor minden komponense is folytonos az x pontban.

A parciális deriváltak létezéséből még nem következik a függvény differenciálhatósága.

11.6. Tétel. *Ha $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R}^k$ és $\exists K(x) \subset D(f)$, hogy $\forall i = 1, \ldots, n$ és $\forall j = 1, \ldots, k$ esetén $\partial_i f_j \in C(K(x))$, akkor $f \in D[x]$.*

Bizonyítás.A bizonyítást $f : \mathbb{R}^2 \supset\!\!\to \mathbb{R}$ esetén végezzük el. Legyen $\forall z \in K(x)$, $z \neq x$. Ha $x = (x_1, x_2)$ és $z = (z_1, z_2)$, akkor

$$f(z) - f(x) = f(z_1, z_2) - f(x_1, z_2) + f(x_1, z_2) - f(x_1, x_2).$$

A valós-valós Lagrange-középértéktétel miatt $\exists \vartheta_1, \vartheta_2 \in (0, 1)$, hogy

$$f(z_1, z_2) - f(x_1, z_2) = \partial_1 f(x_1 + \vartheta_1(z_1 - x_1), z_2) \cdot (z_1 - x_1)$$

és

$$f(x_1, z_2) - f(x_1, x_2) = \partial_2 f(x_1, x_2 + \vartheta_2(z_2 - x_2)) \cdot (z_2 - x_2).$$

Így

$$f(z) - f(x) = [\partial_1 f(x_1 + \vartheta_1(z_1 - x_1), z_2) \ \ \partial_2 f(x_1, x_2 + \vartheta_2(z_2 - x_2))] \begin{bmatrix} z_1 - x_1 \\ z_2 - x_2 \end{bmatrix}.$$

A $\partial_1 f$ és $\partial_2 f$ folytonossága miatt az

$$F_x(z) := [\partial_1 f(x_1 + \vartheta_1(z_1 - x_1), z_2) \;\; \partial_2 f(x_1, x_2 + \vartheta_2(z_2 - x_2))]$$

választással az $F_x \in C[x]$. Tehát $\exists F_x : D(f) \to \mathbb{R}^{1\times 2}, F_x \in C[x]$, amellyel $\forall z \in D(f)$ esetén

$$f(z) - f(x) = F_x(z) \cdot (z - x),$$

azaz $f \in D[x]$.

11.7. Tétel. *Legyen* $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R},\ f \in D[a]$. *Legyen* $e \in \mathbb{R}^n,\ \|e\| = 1$. *Ekkor*

$$\partial_e f(a) = f'(a)e = \langle \mathrm{grad} f(a), e\rangle.$$

Bizonyítás. Legyen $\phi : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R},\ \phi(t) := f(a + te)$. A közvetett függvény differenciálhatósága miatt

$$\phi'(t) = f'(a + te) \cdot e.$$

Így

$$\partial_e f(a) = \phi'(0) = f'(a)e.$$

11.3.2. Második derivált; Taylor-formula

11.6. Definíció. *Legyen* $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R}$. *Tegyük fel, hogy a* $\partial_i f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R}$ *i-edik változó szerinti parciális derivált függvénynek létezik a j-edik változó szerinti parciális deriváltja. Ekkor*

$$\partial_j(\partial_i f) =: \partial^2_{ij} f.$$

11.8. Tétel. *(Young tétele a vegyes parciális deriváltak felcserélhetőségéről) Ha* $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R}$, $\partial_i f \in C(K(a)),\ i = 1, 2, \ldots, n$ *és* $\partial^2_{ij} f \in C(K(a)),\ i, j = 1, 2, \ldots, n$ *esetén, akkor*

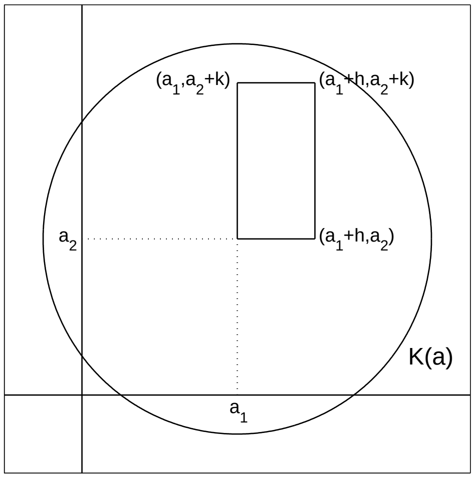
$$\partial^2_{ij} f(a) = \partial^2_{ji} f(a),\ i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Bizonyítás. Ezt is csak $f : \mathbb{R}^2 \supset\!\!\to \mathbb{R}$ esetén igazoljuk.
Legyen $h, k \in \mathbb{R},\ h, k \neq 0$ olyan, hogy $(a_1 + h, a_2 + k) \in K(a)$. Legyen $F : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R},\ F(x) := f(x, a_2 + k) - f(x, a_2)$ és $G : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R},\ G(y) := f(a_1 + h, y) - f(a_1, y)$ (11.2. ábra).
Helyettesítéssel ellenőrizhető, hogy

$$F(a_1 + h) - F(a_1) = G(a_2 + k) - G(a_2). \tag{11.1}$$

A $\partial_1 f$ és $\partial_2 f$ folytonossága miatt (a Lagrange-középértéktétel szerint) $\exists \vartheta_1 \in (0, 1)$ olyan, hogy

$$F(a_1+h)-F(a_1) = F'(a_1+\vartheta_1 h)\cdot h = (\partial_1 f(a_1+\vartheta_1 h, a_2+k)-\partial_1 f(a_1+\vartheta_1 h, a_2))h.$$



11.2. ábra.

Mivel $\partial_1 f$ differenciálható a második változó szerint, ezért ismét alkalmazva a Lagrange-középértéktételt, $\exists\vartheta_2 \in (0,1)$, hogy

$$\partial_1 f(a_1+\vartheta_1 h, a_2+k) - \partial_1 f(a_1+\vartheta_1 h, a_2) = \partial_2(\partial_1 f)(a_1+\vartheta_1 h, a_2+\vartheta_2 k)\cdot k.$$

Hasonló gondolatmenettel $\exists\vartheta_3, \vartheta_4 \in (0,1)$ olyan, hogy

$$\begin{aligned} G(a_2+k)-G(a_2) &= G'(a_2+\vartheta_3 k)k = \\ &= (\partial_2 f(a_1+h, a_2+\vartheta_3 k) - \partial_2 f(a_1, a_2+\vartheta_3 k))k = \\ &= \partial_1(\partial_2 f)(a_1+\vartheta_4 h, a_2+\vartheta_3 k)hk. \end{aligned}$$

A (11.1) egyenlőség miatt

$$\partial_2(\partial_1 f)(a_1+\vartheta_1 h, a_2+\vartheta_2 k)kh = \partial_1(\partial_2 f)(a_1+\vartheta_4 h, a_2+\vartheta_3 k)kh.$$

Mivel $h, k \neq 0$, ezért le is oszthatunk (hk)-val. Legyenek (h_n) és (k_n) tetszőleges olyan sorozatok, amelyekre $h_n \neq 0,\ k_n \neq 0$ és $h_n \to 0,\ k_n \to 0$. A $\partial_2(\partial_1 f)$ és $\partial_1(\partial_2 f)$ folytonossága és a $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén fennálló egyenlőségek miatt

$$\begin{array}{ccc} \partial_2(\partial_1 f)(a_1+\vartheta_1^n h_n, a_2+\vartheta_2^n k_n) & \to & \partial_2(\partial_1 f)(a_1, a_2) \\ \| & & \\ \partial_1(\partial_2 f)(a_1+\vartheta_4^n h_n, a_2+\vartheta_3^n k_n) & \to & \partial_1(\partial_2 f)(a_1, a_2), \end{array}$$

ezért $\quad \partial_2(\partial_1 f)(a_1, a_2) = \partial_1(\partial_2 f)(a_1, a_2)$.

11.7. Definíció. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R}$ és $\forall i, j = 1, 2, \ldots, n$ esetén $\partial_{ij}^2 f \in C(K(a))$. Ekkor*

$$f''(a) := \begin{bmatrix} \partial_{11}^2 f(a) & \ldots & \partial_{1n}^2 f(a) \\ \vdots & & \\ \partial_{n1}^2 f(a) & \ldots & \partial_{nn}^2 f(a) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

az f **második derivált***ja az a pontban. Hesse-mátrixnak nevezzük.*

A Young-tétel miatt $f''(a)$ szimmetrikus mátrix.
Legyen $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R}$ elég sima függvény, ami jelentse azt, hogy $\partial_i f,\ \partial^2_{ij} f \in C(K(a)),\ \forall i, j = 1, 2, \ldots, n.$
Legyen $h \in \mathbb{R}^n,\ h \neq 0$ és $t \in \mathbb{R}$ olyan amelyekre $a + th \in K(a)$.
Legyen $\phi(t) := f(a + th)$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\phi'(t) &= f'(a+th) \cdot h = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a+th) h_i, \\
\phi''(t) &= \left(\sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a+th) h_i \right)' = \sum_{i=1}^{n} \{(\partial_i f)'(a+th)h\} h_i = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \partial_j (\partial_i f)(a+th) h_j \right\} h_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \partial^2_{ij} f(a+th) h_i h_j.
\end{aligned}$$

Ezekből $\phi(0) = f(a),\ \phi'(0) = f'(a)h$ és $\phi''(0) = \langle f''(a)h, h \rangle$. (A legutolsót gondoljuk végig a mátrixszorzás és a skaláris szorzat definícióinak birtokában.)
A Taylor-formula alapján $\forall t \in \mathbb{R}^+$ esetén $\exists \vartheta \in (0, t)$, hogy

$$\phi(t) = \phi(0) + \phi'(0)t + \frac{1}{2!}\phi''(\vartheta)t^2.$$

(A harmadik tag már a Lagrange-féle maradéktag.)
Nyilván igaz, hogy

$$\frac{1}{2!}\phi''(\vartheta)t^2 = \frac{1}{2!}(\phi''(0) + \phi''(\vartheta) - \phi''(0))t^2 = \frac{1}{2!}\phi''(0)t^2 + \alpha(t),$$

ahol $\alpha(t) := \frac{1}{2!}(\phi''(\vartheta) - \phi''(0))t^2$, és amelyre

$$\lim_{t \to 0} \frac{\alpha(t)}{t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{2!}(\phi''(\vartheta) - \phi''(0)) = 0,$$

mert ϕ'' folytonos. Tehát

$$\phi(t) = \phi(0) + \phi'(0)t + \frac{1}{2!}\phi''(0)t^2 + \alpha(t),$$

ahol $\lim_{t \to 0} \frac{\alpha(t)}{t^2} = 0$. Egybefésülve a ϕ függvényre kapott eredményeket:

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= f(a+th) = \phi(0) + \phi'(0)t + \frac{1}{2!}\phi''(0)t^2 + \alpha(t) = \\
&= f(a) + f'(a)ht + \frac{1}{2!}\langle f''(a)h, h \rangle t^2 + \beta(th),
\end{aligned}$$

ahol $\beta(th) := \alpha(t)$, és amelyre

$$\lim_{th \to 0} \frac{\beta(th)}{\|th\|^2} = \lim_{t \to 0} \frac{\alpha(t)}{t^2} = 0.$$

Itt a $\lim_{th\to 0} \frac{\beta(th)}{\|th\|^2} = 0$ úgy is igaz, hogy $h \neq 0$ rögzített vektor és $t \to 0$, de úgy is, hogy $t \neq 0$ rögzített és $h \to 0$.
Legyen $t := 1$. Ekkor igaz a következő „Taylor-formula”:

11.9. Tétel. *Ha $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R}$ elég sima ($\partial_i f,\ \partial^2_{ij} f \in C(K(a))$), akkor $\exists \beta : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R}$, hogy $\forall h \in \mathbb{R}^n,\ h \neq 0,\ a + h \in K(a)$ esetén*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2!}\langle f''(a)h, h\rangle + \beta(h),$$

ahol $\lim_{h\to 0} \frac{\beta(h)}{\|h\|^2} = 0$.

11.3.3. Szélsőérték

11.10. Tétel. *(A lokális szélsőérték szükséges feltétele)*
Ha $f \in D[a]$ és f-nek a-ban lokális szélsőértéke van, akkor $f'(a) = 0$.

Bizonyítás. Legyen $e \in \mathbb{R}^n,\ \|e\| = 1$. Mivel f-nek a-ban lokális szélsőértéke van, ezért a $\phi : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R},\ \phi(t) := f(a + te)$ függvénynek a $t = 0$ pontban van lokális szélsőértéke, így $\phi'(0) = 0$. Mivel $\phi'(t) = f'(a + te) \cdot e$, ezért $t = 0$ esetén

$$f'(a) \cdot e = 0.$$

$\forall i = 1, 2, \ldots, n$ esetén

$$f'(a)e_i = \partial_i f(a) = 0,$$

így $f'(a) = [0\ \ldots\ 0] = 0 \in \mathbb{R}^{1\times n}$.

A Taylor-formulát felhasználva elégséges feltételt adunk a szélsőérték létezésére.

11.11. Tétel. *(A szigorú lokális minimum elégséges feltétele)*
Legyen $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $\partial_i f,\ \partial^2_{ij} f \in C(K(a)),\ f'(a) = 0$ és $\forall h \in \mathbb{R}^n,\ h \neq 0$ esetén $\langle f''(a)h, h\rangle > 0$. Ekkor f-nek a-ban szigorú lokális minimuma van.

Bizonyítás. Legyen $h \in \mathbb{R}^n,\ h \neq 0$ tetszőleges. Ekkor

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2!}\langle f''(a)h, h\rangle + \beta(h) = \\ &= f(a) + \frac{1}{2!}\|h\|^2 \left(\langle f''(a)\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|}\rangle + 2\frac{\beta(h)}{\|h\|^2}\right). \end{aligned}$$

Legyen $S_1 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ az „egységgömb héja”. Mivel $\frac{h}{\|h\|}$ egységhosszúságú vektor, így $e := \frac{h}{\|h\|} \in S_1$. A $k : S_1 \to \mathbb{R},\ k(e) := \langle f''(a)\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|}\rangle$ folytonos függvény S_1-en. S_1 korlátos és zárt, ezért a Weierstrass-tétel mintájára végiggondolható, hogy van minimuma a k függvénynek, legyen ez $m \in \mathbb{R}$ és az $\langle f''(a)h, h\rangle > 0$ ($h \neq 0$) feltétel miatt $m > 0$. Ez azt jelenti, hogy $\forall h \in \mathbb{R}^n,\ h \neq 0$

$$\langle f''(a)\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|}\rangle \geq m.$$

Mivel $\lim_{h\to 0}\frac{\beta(h)}{\|h\|}=0$, ezért az $\varepsilon := \frac{m}{4}>0$ hibakorláthoz $\exists\delta>0$, hogy $\forall h\in\mathbb{R}^n,\ h\neq 0,\ \|h\|<\delta$ esetén

$$-\frac{m}{4}<\frac{\beta(h)}{\|h\|^2}<\frac{m}{4}.$$

Legyen ezek után $h\in\mathbb{R}^n,\ h\neq 0,\ \|h\|<\delta$ tetszőleges. Feltételezve, hogy $a+h\in K(a)$, tovább becsülhetjük $f(a+h)$ előállítását

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a)+\frac{1}{2!}\|h\|^2(\langle f''(a)\frac{h}{\|h\|},\frac{h}{\|h\|}\rangle+2\frac{\beta(h)}{\|h\|^2}> \\ &> f(a)+\frac{1}{2!}\|h\|^2\left(m-\frac{2m}{4}\right)=f(a)+\frac{1}{2!}\|h\|^2\frac{m}{2}, \end{aligned}$$

vagy

$$f(a+h)-f(a)>\|h\|^2\frac{m}{4}>0,\ \text{ha } \|h\|<\delta.$$

Ez azt jelenti, hogy f-nek a-ban szigorú lokális minimuma van.

Megjegyezzük, hogy az $\langle f''(a)h,h\rangle>0\ \forall h\in\mathbb{R}^n,\ h\neq 0$ esetén nehezen ellenőrizhető feltétel. Ezt a nehézséget könnyíti a

11.12. Tétel. *(Sylvester-tétel)*
Ha $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix, akkor $\forall h\in\mathbb{R}^n,\ h\neq 0$ esetén $\langle Ah,h\rangle>0 \Leftrightarrow$ az A mátrix sarokaldeterminánsai pozitív jeltartók.

A bizonyítást csak érzékeltetjük olyan A mátrix esetén, amely „diagonális", azaz

$$A:=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \dots & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

Az A sarokaldeterminánsai

$$\Delta_1:=\lambda_1,\quad \Delta_2:=\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2,\quad \Delta_3:=\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\lambda_3,\dots$$

Ezek pontosan akkor pozitív jeltartók, ha

$$\lambda_1>0,\quad \lambda_2>0,\quad \dots,\quad \lambda_n>0.$$

Most legyen $h\in\mathbb{R}^n,\ h\neq 0, h=\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\\ \vdots\\ h_n\end{bmatrix}$.

$$\langle Ah,h\rangle=\langle\begin{bmatrix}\lambda_1h_1\\ \lambda_2h_2\\ \vdots\\ \lambda_nh_n\end{bmatrix},\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\\ \vdots\\ h_n\end{bmatrix}\rangle=\lambda_1h_1^2+\lambda_2h_2^2+\dots+\lambda_nh_n^2.$$

Jól látszik, hogy

$$\langle Ah, h\rangle > 0 \Leftrightarrow \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \ldots, \lambda_n > 0 \Leftrightarrow \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0.$$

Nemdiagonális mátrixok esetén is könnyű ellenőrizni ezt a feltételt.
A lokális maximum elégséges feltételét vázlatosan fogalmazzuk meg:

11.13. Tétel. *Ha $f'(a) = 0$ és $\langle f''(a)h, h\rangle < 0$, akkor f-nek a-ban szigorú lokális maximuma van.*

11.14. Tétel. *(Sylvester-tétel)*

$$\langle Ah, h\rangle < 0 \Longleftrightarrow \Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0, \ldots,\ \Delta_n \begin{cases} < 0, & \textit{ha } n \textit{ páratlan} \\ > 0, & \textit{ha } n \textit{ páros.} \end{cases}$$

11.3.4. Implicit- és inverzfüggvény tétel

Egyenletek, egyenletrendszerek megoldása során gyakran találkozunk azzal a problémával, hogy egy $f(x, y) = 0$ alakú összefüggésből kifejezhető-e az y az x segítségével, van-e olyan ϕ függvény, hogy $f(x, \phi(x)) = 0$ minden $x \in D(\phi)$ esetén.
Például $f_1(x, y) := x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$ csupán $x = 1$ és $y = 2$ esetén teljesül (hiszen $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2$), míg az $f_2(x, y) := x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ esetében a

$$\phi : [0, 2] \to [2, 3],\ \phi(x) := \sqrt{2x - x^2} + 2$$

és a

$$\psi : [0, 2] \to [1, 2],\ \psi(x) := -\sqrt{2x - x^2} + 2$$

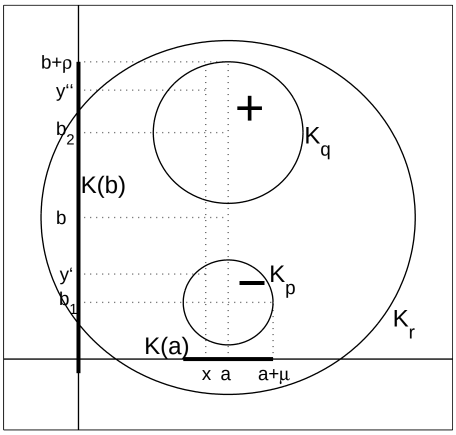
függvényre is igaz, hogy $f_2(x, \phi(x)) = 0$ ($x \in D(\phi)$) és $f_2(x, \psi(x)) = 0$ ($x \in D(\psi)$).
A felvázolt példák nyomán fogalmazzuk meg az implicit módon definiált függvényt.
Legyen $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \supset\!\!\to \mathbb{R}^m$ ($m < n$) egy függvény.

11.8. Definíció. *Ha van olyan $\phi : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R}^m$ függvény, amelyre minden $x \in D(\phi)$ esetén $(x, \phi(x)) \in D(f)$ és $f(x, \phi(x)) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy az $f(x, y) = 0$ egyenlőség egy* **implicit függvény***t definiál (a ϕ függvény az $f(x, y) = 0$ által definiált implicit függvény).*

Felvetődik a kérdés, hogy milyen feltételek esetén létezik ilyen függvény, és ha létezik, milyen tulajdonságai vannak.

11.15. Tétel. *(Implicit függvény tétele) Legyen $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \supset\!\!\to \mathbb{R}^m$, $f \in C^1$. Tegyük fel, hogy van olyan $(a, b) \in D(f)$ pont, hogy $f(a, b) = 0$, és ebben a pontban*

$$\det \partial_y f(a, b) := \begin{vmatrix} \partial_{n+1} f_1(a, b) & \ldots & \partial_{n+m} f_1(a, b) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{n+1} f_m(a, b) & \ldots & \partial_{n+m} f_m(a, b) \end{vmatrix} \neq 0$$



11.3. ábra.

Ekkor léteznek olyan $K(a) \in \mathbb{R}^n$, $K(b) \in \mathbb{R}^m$ környezetek és $\phi : K(a) \to K(b)$ függvény, hogy minden $x \in K(a)$ esetén $f(x, \phi(x)) = 0$. A ϕ függvény folytonos a-ban, sőt ϕ differenciálható is az a pontban, és $\phi'(a) = -(\partial_y f(a,b))^{-1} \cdot \partial_x f(a,b)$.

(A $\partial_x f(a,b) := \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(a,b) & \dots & \partial_n f_1(a,b) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(a,b) & \dots & \partial_n f_m(a,b) \end{bmatrix}$*.)*

Megjegyezzük, hogy a tétel csak a ϕ implicit függvény létezéséről szól, általában nem tudjuk ezt a függvényt előállítani. Ennek ellenére a ϕ deriváltját ki tudjuk számítani az a pontban...!

Bizonyítás. Az $n = 1$, $m = 1$ esetben végezzük el a bizonyítást.

Az $f : \mathbb{R}^2 \supset\!\!\to \mathbb{R}$ függvény folytonosan differenciálható, ezért a $\partial_2 f$ parciális derivált is folytonos, és $\partial_2 f(a,b) \neq 0$ [legyen $\partial_2 f(a,b) > 0$], ezért létezik az $(a,b) \in D(f)$ pontnak olyan $r > 0$ sugarú $K_{\mathrm{r}}((a,b)) \subset D(f)$ környezete, hogy minden $(x,y) \in K_{\mathrm{r}}((a,b))$ esetén $\partial_2 f(x,y) > 0$. Tekintsük a $h_a : y \mapsto f(a,y)$ függvényt. Mivel $h_a(b) = f(a,b) = 0$ és $h_a'(b) = \partial_2 f(a,b) > 0$, ezért h_a lokálisan növekvő, így van olyan $b_1 < b$ és $b_2 > b$, hogy $h_a(b_1) = f(a,b_1) < 0$ és $h_a(b_2) = f(a,b_2) > 0$ (emellett $(a,b_1),(a,b_2) \in K_{\mathrm{r}}((a,b))$). Az f függvény folytonossága miatt van olyan $p > 0$ és $q > 0$, hogy minden $(x',y') \in K_{\mathrm{p}}(a,b_1)$ és $(x'',y'') \in K_{\mathrm{q}}(a,b_2)$ pontban $f(x',y') < 0$ és $f(x'',y'') > 0$ (emellett $K_{\mathrm{p}}(a,b_1)$, $K_{\mathrm{q}}(a,b_2) \subset K_{\mathrm{r}}((a,b))$ is teljesüljön).

Legyen $\mu := \min\{p,q\}$ és $K(a) := (a-\mu, a+\mu)$, míg legyen $\rho := \max\{b-(b_1-p), b_2+q-b\}$ és $K(b) := (b-\rho, b+\rho)$. Tekintsünk egy tetszőleges $x \in K(a)$ pontot. Legyen $h_x : y \mapsto f(x,y)$. Ekkor létezik olyan $(x,y') \in K_{\mathrm{p}}(a,b_1)$ és $(x,y'') \in K_{\mathrm{q}}(a,b_2)$ alakú pont, amelyben $h_x(y') = f(x,y') < 0$, míg $h_x(y'') = f(x,y'') > 0$. Mivel h_x az f folytonossága következtében egy valós változós folytonos függvény, ezért a Bolzano-tétel miatt van olyan $y \in (y',y'')$, amelyben

$h_x(y) = f(x, y) = 0$. Csak egyetlen ilyen y létezik, ugyanis, ha y^* is olyan lenne, hogy $h_x(y^*) = f(x, y^*) = 0$, akkor a Rolle-tétel miatt létezne olyan c az y és y^* között, hogy $h'_x(c) = \partial_2 f(x, c) = 0$ lenne, amely lehetetlen, hiszen a $K_r((a, b))$ környezet minden pontjában $\partial_2 f$ pozitív.

Tehát bármely $x \in K(a)$ számhoz egyértelműen rendelhető olyan $y \in K(b)$ szám, hogy $f(x, y) = 0$, azaz létezik olyan $\phi : K(a) \to K(b)$, $\phi(x) := y$ függvény, hogy $f(x, \phi(x)) = 0$ minden $x \in K(a)$ esetén. [Nyilván $\phi(a) = b$.]

Megmutatjuk, hogy ϕ folytonos az a pontban. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen megadott szám. Ha $\varepsilon > \rho$, akkor $\delta := \mu$, hiszen bármely $x \in K_\mu(a)$ esetén $\phi(x) \in K_\rho(b) \subset K_\varepsilon(\phi(a))$, amely szerint $\phi \in C[a]$. Ha $\varepsilon \le \rho$, akkor megismételve az egész szerkesztést az $r := \varepsilon$ választással (az $(a, b) \in D(f)$ pont $K_\varepsilon((a, b))$ környezetében lesz a $\partial_2 f$ pozitív…), olyan $\hat{\phi}$ függvényhez jutunk, amely a ϕ függvény leszűkítése. Ekkor az előző mondat nyomán ismét eljutunk oda, hogy $\phi \in C[a]$.

A ϕ függvény a pontbeli differenciálhatóságához induljunk ki abból, hogy tetszőleges $h \neq 0$, $a + h \in K_\mu(a)$ esetén

$$\begin{aligned} 0 &= f(a+h, \phi(a+h)) - f(a, \phi(a)) = \\ &= f(a+h, \phi(a+h)) - f(a, \phi(a+h)) + f(a, \phi(a+h)) - f(a, \phi(a)) = \end{aligned}$$

[a két megváltozáshoz a Lagrange-féle középértéktétel miatt létezik olyan $\vartheta_1, \vartheta_2 \in (0, 1)$ szám, hogy]

$$= \partial_1 f(a + \vartheta_1 h, \phi(a+h))h + \partial_2 f(a, \phi(a) + \vartheta_2(\phi(a+h) - \phi(a)))(\phi(a+h) - \phi(a)).$$

Átrendezve az egyenlőséget (felhasználva, hogy $\partial_2 f$ a $K_r((a, b))$ környezetbe eső $(a, \phi(a) + \vartheta_2(\phi(a+h) - \phi(a)))$ pontban pozitív, így nem nulla), azt kapjuk, hogy

$$\frac{\phi(a+h) - \phi(a)}{h} = -\frac{\partial_1 f(a + \vartheta_1 h, \phi(a+h))}{\partial_2 f(a, \phi(a) + \vartheta_2(\phi(a+h) - \phi(a)))}.$$

Mivel $\partial_1 f, \partial_2 f \in C[(a, b)]$, $\partial_2 f(a, b) \neq 0$ és $\phi \in C[a]$, ezért $\lim_{h \to 0} \phi(a+h) - \phi(a) = 0$, és emiatt létezik

$$\lim_{h \to 0} \frac{\phi(a+h) - \phi(a)}{h} = -\frac{\partial_1 f(a, \phi(a))}{\partial_2 f(a, \phi(a))},$$

tehát $\phi \in D[a]$ és

$$\phi'(a) = -\frac{\partial_1 f(a, b)}{\partial_2 f(a, b)} = -(\partial_2 f(a, b))^{-1} \cdot \partial_1 f(a, b).$$

(Megjegyezzük, hogy ebből a gondolatmenetből kevés menthető át az $n \ge m > 1$ esetre.)

A valós-valós függvények körében is érdekes volt, hogy egy függvény kölcsönösen egyértelmű-e. Ez a kérdés többváltozós leképezéseknél is fontos. Például a

$p : [0, 2\pi) \times [0, R] \to \mathbb{R}^2$ $p(\phi, r) := (r\cos\phi, r\sin\phi)$ úgynevezett **polártranszformáció** a (ϕ_0, r_0) pontot tartalmazó $U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmazt az $(x_0, y_0) := (r_0\cos\phi_0, r_0\sin\phi_0)$ pontot tartalmazó $V \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmazra kölcsönösen egyértelműen képezi le, sőt a p folytonossága mellett a p^{-1} inverzfüggvény is folytonos. (A p inverze az $(x, y) \mapsto (\mathrm{arctg}\frac{y}{x}, \sqrt{x^2 + y^2})$.)
Kérdés az, hogy egy $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R}^k$ függvény milyen feltételek mellett rendelkezik hasonló tulajdonsággal.

Lehet-e n és k különböző? Nem. Ugyanis, ha például $f : \mathbb{R}^3 \supset\!\!\to \mathbb{R}^2$ folytonos függvény olyan, amely egy $U \subset D(f)$ nyílt halmazt a $V \subset R(f)$ nyílt halmazra képez, és az $f^{-1} : V \to U$ inverzfüggvény is folytonos lenne, akkor U-ban felvéve egy négyzet alapú gúlát (öt csúcspontja van), majd bármely két csúcspontot olyan folytonos görbével kötnénk össze, amelyek nem metszik egymást (ezt az $\mathbb{R}^3$ térben megtehetjük...), akkor $f_{|U} : U \to V$ bijekcióval ezt a gúlát (a csúcsait és a csúcsokat összekötő görbéket) a $V \subset \mathbb{R}^2$ síkbeli halmazba képezzük. A gráfelméletből ismert, hogy a „teljes ötszögpontú gráf nem rajzolható síkba”, ami azt jelenti, hogy legalább két görbe képének lesz közös pontja, amely ellentmond annak, hogy $f_{|U}$ és inverze is folytonos volt. [A példát Lovász László találta egyetemista korában néhány másodperces gondolkodás után...]

11.16. Tétel. *(az inverz függvény tétele)*
Legyen $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R}^n, f \in C^1$. Legyen $a \in \mathrm{int}D(f)$ olyan pont, hogy $\det f'(a) \neq 0$. Ekkor van olyan $U \subset D(f)$, az a pontot tartalmazó nyílt halmaz és van olyan $V \in R(f)$, a $b := f(a)$ pontot tartalmazó nyílt halmaz, hogy az f függvény bijekció az U és V között, és f^{-1} amellett, hogy folytonos, még differenciálható is b-ben, és $(f^{-1})'(b) = (f'(a))^{-1}$.

Bizonyítás. Az implicit függvény tételét alkalmazzuk egy alkalmasan választott függvényre azzal a változtatással, hogy az ”x-et fejezzük ki y segítségével”.
Legyen $F : D(f) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, F(x, y) := f(x) - y$. Nyilván $F \in C^1$. $F(a, b) = f(a) - b = 0$. Mivel $\partial_x F(x, y) = f'(x)$, ezért $\det \partial_x F(a, b) = \det f'(a) \neq 0$. Ezért létezik $K(b)$ és $K(a)$ környezet, és létezik olyan $\phi : K(b) \to K(a)$, hogy bármely $y \in K(b)$ esetén $F(\phi(y), y) = f(\phi(y)) - y = 0$, azaz $f \circ \phi = \mathrm{id}_{K(b)}$. Ez az azonosság mutatja, hogy ϕ az f^{-1} inverzfüggvény. Ha $V := K(b)$ és $U := f^{-1}(V)$ a V nyílt halmaz őspéke (amely f folytonossága miatt nyílt halmaz), akkor f már bijekció U és V halmaz között. Emellett a $\phi = f^{-1}$ folytonos és differenciálható is. Az f^{-1} deriváltjához vegyük észre, hogy $\partial_x F(a, b) = f'(a) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak van inverzmátrixa (mivel $\det f'(a) \neq 0$), továbbá $\partial_y F(x, y) = \partial_y(f(x) - y) = -I_n$ (itt $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ az n-es egységmátrix), így $\partial_y F(a, b) = -I_n$.
Tehát

$$(f^{-1})'(b) = -(\partial_x F(a, b))^{-1}\partial_y F(a, b) = -(f'(a))^{-1} \cdot (-I_n) = (f'(a))^{-1}.$$

11.3.5. Feltételes szélsőérték

Többváltozós függvény lokális szélsőértékét eddig nyílt halmazon kerestük. Az alkalmazások során gyakran van szükség egy függvény szélsőértékére olyan esetben is, amikor a változók között bizonyos összefüggéseket írhatunk elő. Ezek lesznek a feltételes szélsőérték problémák.

Legyen $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R}$ és $g_1, g_2, \ldots, g_m : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R} (m < n)$ adott függvények. Legyen

$$H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) = 0, g_2(x) = 0, \ldots, g_m(x) = 0\}.$$

Tegyük fel, hogy $H \neq \emptyset$.

11.9. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az f függvénynek a $g_1 = 0$, $g_2 = 0, \ldots,$ $g_m = 0$ feltétel mellett* **feltételes szélsőértéke** *van az $a \in H$ pontban, ha az a pontban az $f_{|_H}$ függvénynek lokális szélsőértéke van.*

A feltételes minimum egy szükséges feltételét adja a következő tétel.

11.17. Tétel. *(Lagrange-féle multiplikátor módszer)*
Legyen $f, g_1, g_2, \ldots, g_m \in C^1$. Tegyük fel, hogy az f függvénynek a $g_1 = 0$, $g_2 = 0, \ldots,$ $g_m = 0$ feltétel mellett feltételes minimuma van az $a \in H \cap D(f)$ pontban. Tegyük fel, hogy

$$\operatorname{rang} \begin{bmatrix} \partial_1 g_1(a) & \partial_2 g_1(a) & \ldots & \partial_n g_1(a) \\ \vdots & & & \vdots \\ \partial_1 g_m(a) & \partial_2 g_m(a) & \ldots & \partial_n g_m(a) \end{bmatrix} = m.$$

Ekkor létezik olyan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, hogy az $F = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots + \lambda_m g_m$ függvényre $F'(a) = 0$.

Bizonyítás. A bizonyítást $n = 2$ és $m = 1$ esetén végezzük el.
A $g \in C^1$ és az $a := (a_1, a_2)$ pontban $g(a_1, a_2) = 0$. Ebben a pontban a rangfeltétel azt jelenti, hogy például $\partial_2 g(a_1, a_2) \neq 0$. Ekkor az implicit függvény tétele szerint létezik $K(a_1)$ és $K(a_2)$ környezet és létezik olyan $\phi : K(a_1) \to K(a_2)$ differenciálható függvény, amelyre bármely $x_1 \in K(a_1)$ esetén $g(x_1, \phi(x_1)) = 0$. Ez azt jelenti, hogy a

$$H = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x_1, x_2) = 0\} \supset \{(x_1, \phi(x_1)) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in K(a_1)\} =: H^*.$$

Továbbá

$$\phi'(a_1) = -\frac{\partial_1 g(a_1, a_2)}{\partial_2 g(a_1, a_2)},$$

azaz

$$\partial_1 g(a_1, a_2) + \phi'(a_1) \partial_2 g(a_1, a_2) = 0. \tag{11.2}$$

Mivel $\phi(a_1) = a_2$ és $(a_1, a_2) \in H^*$, ezért ha az $f_{|_H}$ függvénynek lokális minimuma van az (a_1, a_2) pontban, akkor létezik olyan $K^*(a_1) \subset K(a_1)$, hogy minden $x_1 \in K^*(a_1)$ esetén $f(x_1, \phi(x_1)) \geq f(a_1, \phi(a_1)) = f(a_1, a_2)$. Ez azt jelenti, hogy a $h : K^*(a_1) \to \mathbb{R}$, $h(x_1) := f(x_1, \phi(x_1))$ függvénynek minimuma van az a_1 pontban. A h függvény differenciálható (differenciálható függvények kompozíciója), ezért $h'(a_1) = 0$. Mivel

$$h'(x_1) = \begin{bmatrix} \partial_1 f(x_1, \phi(x_1)) & \partial_2 f(x_1, \phi(x_1)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \phi'(x_1) \end{bmatrix},$$

ezért

$$h'(a_1) = \partial_1 f(a_1, a_2) + \phi'(a_1)\partial_2 f(a_1, a_2) = 0. \tag{11.3}$$

Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ egyelőre tetszőleges szám, és szorozzuk meg λ-val az (11.2) egyenlőséget, majd adjuk össze a (11.3) egyenlőséggel. Ekkor

$$\partial_1 f(a_1, a_2) + \lambda\partial_1 g(a_1, a_2) + \phi'(a_1)[\partial_2 f(a_1, a_2) + \lambda\partial_2 g(a_1, a_2)] = 0. \tag{11.4}$$

A λ megválasztható úgy, hogy

$$\partial_2 f(a_1, a_2) + \lambda^*\partial_2 g(a_1, a_2) = 0 \tag{11.5}$$

(látható, hogy a $\lambda^* := -\frac{\partial_2 f(a_1,a_2)}{\partial_2 g(a_1,a_2)}$ megfelelő.) Ha a szögletes zárójelben lévő tényező 0, akkor (11.4) miatt

$$\partial_1 f(a_1, a_2) + \lambda^*\partial_1 g(a_1, a_2) = 0 \tag{11.6}$$

is teljesül. Összesítve az eredményeket, azt kaptuk, hogy ha az f függvénynek feltételes szélsőértéke van a $g = 0$ feltétel mellett, akkor az $F := f + \lambda^* g$ függvénynek az első változó szerinti parciális deriváltja 0 (ezt mutatja (11.6)), és a második változó szerinti parciális deriváltja is 0 (ezt mutatja (11.5)), tehát

$$F'(a_1, a_2) = \begin{bmatrix} \partial_1 F(a_1, a_2) & \partial_2 F(a_1, a_2) \end{bmatrix} = 0.$$

Bizonyítás nélkül közöljük a feltételes minimum egy elégséges feltételét.

11.18. Tétel. *Ha $f, g_1, g_2, \ldots, g_m \in C^2$ és van olyan $a \in \mathbb{R}^n$ pont és $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, hogy az $F := f + \lambda g$ függvényre $F'(a) = 0$, továbbá minden olyan $h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0$ vektorra, amelyre*

$$g_1'(a)h = 0,\ g_2'(a)h = 0, \ldots,\ g_m'(a)h = 0,$$

teljesül, hogy

$$\langle F''(a)h, h\rangle > 0,$$

akkor az f függvénynek a $g_1 = 0, g_2 = 0, \ldots, g_m = 0$ feltétel mellett feltételes minimuma van az a pontban.

A feltételes maximumra vonatkozó szükséges feltétel és az elégséges feltétel is értelemszerű változtatásokkal megfogalmazható.

12. fejezet

Vonalintegrál

Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény integrálját általánosítjuk. Az $[a, b]$ intervallum szerepét egy görbe, az f függvény szerepét egy vektor-vektor függvény veszi át. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk.

- A vonalintegrál fogalma és tulajdonságai
- A potenciál fogalma és létezésének kapcsolata a vonalintegrállal
- Paraméteres integrál differenciálhatósága
- A potenciál létezésének elégséges feltétele

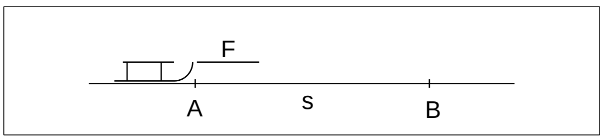
12.1. Vonalintegrál $\boxed{\text{A}}$

12.1.1. A vonalintegrál fogalma és tulajdonságai

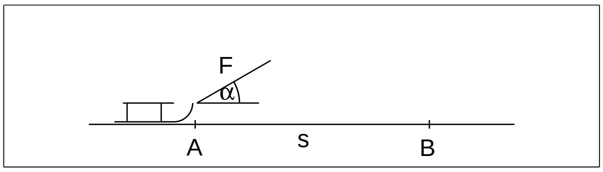
Amikor egy szánkót az A pontból B pontba húzunk s elmozdulással az úttal párhuzamos F erővel, akkor a végzett munka $W = F \cdot s$ (12.1. ábra). Amikor az F erő α szöget zár be az elmozdulással (12.2. ábra), akkor a végzett munka

$$W = F \cos \alpha = \langle \underline{F}, \underline{s} \rangle.$$

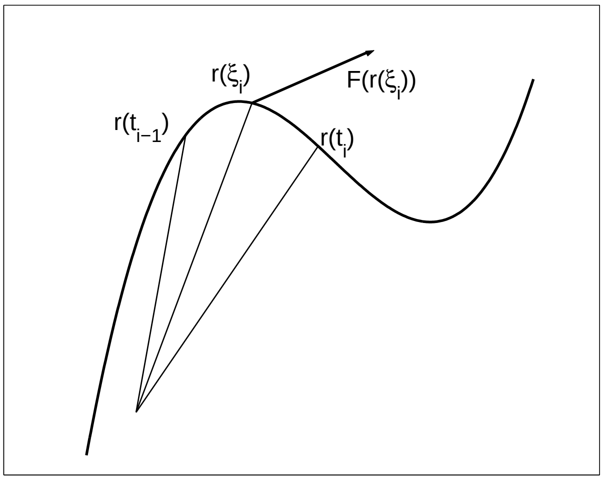
Az $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$ térgörbe mentén pontról pontra változó $F \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ erő-



12.1. ábra.



12.2. ábra.



12.3. ábra.

függvény (erőtér) munkája úgy közelíthető, hogy felosztva $[\alpha,\beta]$ intervallumot $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_{i-1} < t_i < \ldots < t_n = \beta$ osztópontokkal, és felvéve

$$t_{i-1} \le \xi_i \le t_i \quad (i = 1,\ldots,n)$$

további pontokat az elemi munka

$$\Delta W_i := \langle F(r(\xi_i)), r(t_i) - r(t_{i-1})\rangle,$$

és az F erőtérnek a görbe mentén végzett munkája

$$W \approx \sum \Delta W_i = \sum_{i=1}^{n} \langle F(r(\xi_i)), r(t_i) - r(t_{i-1})\rangle = \sum \langle F(r(\xi_i)), \Delta r_i\rangle.$$

Ha r elég sima (differenciálható), akkor az

$$r(t_i) - r(t_{i-1}) = \begin{bmatrix} x(t_i) - x(t_{i-1}) \\ y(t_i) - y(t_{i-1}) \\ z(t_i) - z(t_{i-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}(\eta_i)(t_i - t_{i-1}) \\ \dot{y}(\vartheta_i)(t_i - t_{i-1}) \\ \dot{z}(\zeta_i)(t_i - t_{i-1}) \end{bmatrix} \approx \dot{r}(\xi_i)(t_i - t_{i-1}),$$

ha $\dot{r}$ folytonos. Látható, hogy $W \approx \sum_{i=1}^{n} \langle F(r(\xi_i)), \dot{r}(\xi_i)\rangle (t_i - t_{i-1})$, amely hasonlít egy integrál-közelítőöszeghez. Ez a gondolatmenet szolgál alapul a következő fogalmakhoz.

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ összefüggő (bármely két pontját egy Ω-ban haladó folytonos görbével össze lehet kötni), nyílt halmaz, röviden **tartomány**. Legyen $f \in \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^n, D(f) := \Omega$ folytonos vektorfüggvény, $f \in C(\Omega)$. Legyen $r : [\alpha, \beta] \to \Omega$ egy sima térgörbe, azaz $r \in C[\alpha, \beta]$, $r \in D(\alpha, \beta)$, $\dot{r}(t) \neq 0$ $(t \in (\alpha, \beta))$, és bármely $t_1, t_2 \in (\alpha, \beta)$, $t_1 \neq t_2$ esetén $r(t_1) \neq r(t_2)$.

12.1. Definíció. *Az f függvény r* **térgörbe menti integrálja** *legyen*

$$\int_r f := \int_\alpha^\beta \langle f(r(t)), \dot{r}(t) \rangle \mathrm{d}t.$$

Például

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) := \begin{bmatrix} x + y \\ x - y \\ z \end{bmatrix}$$

(itt $\Omega = \mathbb{R}^3$) és

$$r : [0, 1] \to \mathbb{R}^3, \quad r(t) := \begin{bmatrix} t \\ 2t \\ 3t \end{bmatrix}$$

esetén $\dot{r}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, így

$$\int_r f = \int_0^1 \langle \begin{bmatrix} t + 2t \\ t - 2t \\ 3t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \rangle \mathrm{d}t = \int_0^1 [(t+2t) + 2(t-2t) + 9t] \mathrm{d}t = \int_0^1 10t \mathrm{d}t = \left[10 \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = 5.$$

A vonalintegrál tulajdonságai

1^o Ha $r_1 : [\alpha, \beta] \to \Omega$, $r_2 : [\beta, \gamma] \to \Omega$ és $r_1(\beta) = r_2(\beta)$, akkor az $r_1 \cup r_2 : [\alpha, \gamma] \to \Omega$, amelyre $r_1 \cup r_2|_{[\alpha, \beta]} = r_1$ és $r_1 \cup r_2|_{[\beta, \gamma]} = r_2$ legyen az **egyesített görbe**. Ekkor

$$\int_{r_1 \cup r_2} f = \int_{r_1} f + \int_{r_2} f.$$

2^o Ha $r : [\alpha, \beta] \to \Omega$, akkor az $\overleftarrow{r} : [\alpha, \beta] \to \Omega$, $\overleftarrow{r}(t) := r(\alpha + \beta - t)$ legyen az **ellentétesen irányított** görbe. Ekkor

$$\int_{\overleftarrow{r}} f = -\int_r f.$$

3^o Ha f korlátos az Ω tartományon, azaz van olyan $K > 0$, hogy minden $x \in \Omega$ esetén $\|f(x)\| \leq K$, és az $r : [\alpha, \beta] \to \Omega$ görbe L hosszúságú, akkor

$$\left| \int_r f \right| \leq K \cdot L.$$

12.1.2. Potenciál

A vonalintegrálhoz alapvetően egy „erőtér munkája” kapcsolódik. A munkával (energiával) kapcsolatban pedig érdekelhet bennünket, hogy zárt görbe esetén van-e energiaveszteség vagy éppen nyereség. Érdekelhet az is minket, hogy két pont között a munkavégzés szempontjából milyen úton érdemes haladni. Ilyen kérdésekre ad választ a következő tétel.

12.1. Tétel. *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartomány, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $f \in C(\Omega)$. Az f függvény (erőtér) következő három tulajdonsága egyenértékű (ekvivalens):*

1^o *Bármely $r : [\alpha, \beta] \to \Omega$, $r(\alpha) = r(\beta)$ sima* **zárt görbe** *esetén $\oint f = 0$ (a $\oint$ jel nyomatékosítja, hogy zárt görbén integrálunk).*

2^o *Bármely rögzített $a, b \in \Omega$ és tetszőleges (olyan $r_1 : [\alpha_1, \beta_1] \to \Omega$ és $r_2 : [\alpha_2, \beta_2] \to \Omega$, $r_1(\alpha_1) = r_2(\alpha_2) = a$ és $r_1(\beta_1) = r_2(\beta_2) = b$), az „a és b pontot összekötő” Ω-beli sima görbék esetén*

$$\int_{r_1} f = \int_{r_2} f.$$

3^o *Van olyan $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Phi \in D(\Omega)$ ún.* **potenciálfüggvény**, *amelyre bármely $x \in \Omega$ és $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén*

$$\partial_i \Phi(x) = f_i(x),$$

vagy tömörebben $\mathrm{grad}\Phi = f$.

A tétel tehát arról szól, hogy ha az f erőtérnek van potenciálja, akkor bármely zárt görbe mentén végzett munka nulla, és arról is, hogy az erőtér bármely két pont között végzett munkája független az úttól.

Nyilván érdekes lehet ezután, hogy milyen f erőtérnek van biztosan potenciálja.

12.2. Tétel. *Ha $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ olyan tartomány, amelyhez van olyan $a \in \Omega$, hogy bármely $x \in \Omega$ esetén az*

$$[a, x] := \{a + t(x - a) \in \mathbb{R}^n \mid t \in [0, 1]\} \subset \Omega$$

($[a, x]$ az „a pontot x-szel összekötő szakasz”, az ilyen Ω halmaz **„csillagtartomány”** *az a pontra nézve), és $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $f \in C(\Omega)$ és minden $i, j = 1, 2, \ldots, n$ esetén $\partial_i f_j \in C(\Omega)$ (minden koordináta-függvény minden változó szerinti parciális deriváltja folytonos az Ω minden pontjában), továbbá*

$$\partial_i f_j(x) = \partial_j f_i(x) \quad \text{minden } x \in \Omega, i, j = 1, 2, \ldots, n$$

esetén (ez éppen $f'(x)$ deriváltmátrix szimmetrikusságát jelenti), akkor van $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$ potenciálja az f függvénynek.

Amikor az $\Omega = \mathbb{R}^3$, akkor ez csillagtartomány. Ha az erőtér

$$f := \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

megfelelően sima $P, Q, R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ koordináta-függvényekkel (az erőtér „komponenseiként" is szokták emlegetni), akkor a $\partial_i f_j = \partial_j f_i$ feltétel azt jelenti, hogy az

$$f'(x) = \begin{bmatrix} \partial_1 P(x) & \partial_2 P(x) & \partial_3 P(x) \\ \partial_1 Q(x) & \partial_2 Q(x) & \partial_3 Q(x) \\ \partial_1 R(x) & \partial_2 R(x) & \partial_3 R(x) \end{bmatrix} \qquad (x \in \Omega)$$

deriváltmátrix szimmetrikus. Ha még bevezetjük a rotáció fogalmát is, akkor

$$\mathrm{rot} f := \nabla \times f := \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ P & Q & R \end{vmatrix} := (\partial_2 R - \partial_3 Q)e_1 - (\partial_1 R - \partial_3 P)e_2 + (\partial_1 Q - \partial_2 P)e_3 = 0 \in \mathbb{R}^3$$

az egész $\mathbb{R}^3$ téren. Fizikában így is emlegetik ezt a tételt: „Rotációmentes erőtérnek van potenciálja."

Végül nézzük meg, hogy ha egy f erőtérnek van potenciálja, akkor hogyan lehet ezt megtalálni, és milyen további haszon származik a potenciál ismeretéből.

Az egyszerűség kedvéért legyen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ f(x, y) := \begin{bmatrix} x + y \\ x - y \end{bmatrix}.$$

Mivel $\partial_y(x + y) = 1$ és $\partial_x(x - y) = 1$, ezért $f'(x, y)$ szimmetrikus, ezért van f-nek Φ potenciálja, és ez az – egyelőre ismeretlen – potenciál olyan $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre

$$\begin{aligned} \partial_x \Phi(x, y) &= x + y, \\ \partial_y \Phi(x, y) &= x - y. \end{aligned}$$

Ha $\partial_x \Phi(x, y) = x + y$, akkor $\Phi(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + \phi(y)$ alakú, ahol $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, differenciálható, de egyébként egyelőre tetszőleges függvény lehet. Ekkor $\partial_y \Phi(x, y) = x + \phi'(y) = x - y$, így $\phi'(y) = -y$, amiből $\phi(y) = -\frac{y^2}{2} + c$, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.
Tehát csak a $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Phi(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} + c$ alakú függvény lehet az f potenciálja.

Ha ezek után egy tetszőleges $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ sima görbe mentén szeretnénk az f erőtér munkáját kiszámítani, akkor (a közvetett függvény deriválását szem előtt tartva)

$$\int_r f = \int_\alpha^\beta \langle f(r(t)), \dot{r}(t)\rangle \mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \langle \mathrm{grad}\Phi(r(t)), \dot{r}(t)\rangle \mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \Phi'(r(t)) \cdot \dot{r}(t)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_\alpha^\beta (\Phi(r(t)))'\mathrm{d}t = [\Phi(r(t))]_\alpha^\beta = \Phi(r(\beta)) - \Phi(r(\alpha)),$$

amely azt mutatja (amit a tétel is sugallt), hogy a vonalintegrál értéke csupán a görbe két „végpontjától" függ, és független attól, hogy milyen görbével kötöttük össze az $r(\alpha)$ és $r(\beta)$ pontot. Speciálisan, ha $r(\alpha) = r(\beta)$, akkor zárt görbéről van szó, és ekkor $\Phi(r(\beta)) = \Phi(r(\alpha))$, így $\oint_r f = 0$, ahogyan ezt a tétel is állította.

12.2. Feladatok

1. Legyen

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) := \begin{bmatrix} x+y+z \\ y-z \\ x+z \end{bmatrix} \text{ és } r : [0, 6\pi] \to \mathbb{R}^3,\ r(t) := \begin{bmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ t \end{bmatrix}.$$

Számítsa ki az $\int_r f$ vonalintegrált!

2. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) := \begin{bmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} \end{bmatrix}.$
Számítsa ki az f érintőtér vonalintegrálját egy origó középpontú, egységsugarú, pozitív irányítású (az óramutató járásával ellentétes irányítású) zárt körvonalon.

3. Mutassa meg, hogy az

$$F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3, \quad F(x_1,x_2,x_3) := \begin{bmatrix} -\frac{x_1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}} \\ -\frac{x_2}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}} \\ -\frac{x_3}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}} \end{bmatrix}$$

erőtérnek van potenciálja. Számítsa ki a Φ potenciált!
Megoldás: Legyen $i, j = 1, 2, 3$ és $i \neq j$. Ekkor

$$\partial_i \left(-\frac{x_j}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}} \right) = -x_j(-\frac{3}{2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{-5/2}) \cdot 2x_i =$$

$$= -x_i(-\frac{3}{2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{-5/2}) \cdot 2x_j = \partial_j \left(-\frac{x_i}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}} \right),$$

ezért van potenciálja az F erőtérnek. Ha $\Phi : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$, akkor

$$\partial_i \Phi(x_1,x_2,x_3) = -\frac{x_i}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}},$$

akkor

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}} + c,$$

mert

$$\partial_i \Phi(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-3/2}(2x_i) = -\frac{x_i}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}},\ i = 1, 2, 3.$$

Megjegyezzük, hogy F egy origóban elhelyezett $M = 1$ tömegpont gravitációs terének is tekinthető, hiszen az $\underline{r}$ helyvektorú pontban az $m = 1$ tömegre ható erő (az egységrendszer választása miatt fellépő szorzótényezőtől eltekintve)

$$\underline{F}(\underline{r}) = -\frac{1}{\|\underline{r}\|^2} \cdot \frac{\underline{r}}{\|\underline{r}\|} \quad (\underline{r} \neq \underline{0}).$$

Ennek az erőtérnek a potenciálja

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{\|\underline{r}\|} \quad (\underline{r} \neq \underline{0}).$$

4. Legyen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) := \begin{bmatrix} xy^2 \\ x^2 y \end{bmatrix},$$

és a görbe legyen egy lemniszkáta, például az

$$L := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 8\}.$$

(Az L görbén a sík összes olyan pontja rajta van, amelynek a $C_1(2, 0)$ és $C_2(-2, 0)$ pontoktól mért távolságainak szorzata 8.) Mennyi lesz az f vonalintegrálja a lemniszkátán?

12.3. Vonalintegrál $\boxed{E}$

12.3.1. A vonalintegrál fogalma és tulajdonságai

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartomány, és $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $f \in C(\Omega)$. Legyen $r : [\alpha, \beta] \to \Omega$, $r \in C[\alpha, \beta]$ és $r \in C^1(\alpha, \beta)$, továbbá $\forall t_1, t_2 \in (\alpha, \beta)$, $t_1 \neq t_2$ esetén $r(t_1) \neq r(t_2)$ egy ún. **sima görbe**.

12.2. Definíció. *Az f függvény r görbe menti* **vonalintegrálján** *az*

$$\int_r f := \int_\alpha^\beta \langle f(r(t)), \dot{r}(t) \rangle \mathrm{d}t$$

valós integrált értjük.

12.3. Tétel. *Ha* $r_1 : [\alpha, \beta] \to \Omega$ *és* $r_2 : [\beta, \gamma] \to \Omega$, r_1, r_2 *sima görbe és* $r_1(\beta) = r_2(\beta)$ *(csatlakoznak), akkor az* $r_1 \cup r_2 : [\alpha, \gamma] \to \Omega$, $(r_1 \cup r_2)_{|[\alpha,\beta]} = r_1$ *és* $(r_1 \cup r_2)_{|[\beta,\gamma]} = r_2$ **csatolt görbék** *esetén*

$$\int_{r_1 \cup r_2} f = \int_{r_1} f + \int_{r_2} f.$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}\int_{r_1 \cup r_2} f &= \int_\alpha^\gamma \langle f((r_1 \cup r_2)(t)), (r_1 \cup r_2)^{\dot{}}(t)\rangle \mathrm{d}t = \\ &= \int_\alpha^\beta \langle f(r_1(t)), \dot{r_1}(t)\rangle \mathrm{d}t + \int_\beta^\gamma \langle f(r_2(t)), \dot{r_2}(t)\rangle \mathrm{d}t = \int_{r_1} f + \int_{r_2} f.\end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy $(r_1 \cup r_2)$ esetleg β-ban nem differenciálható, de egy pont nem befolyásolja az integrál értékét.

12.4. Tétel. *Ha* $r : [\alpha, \beta] \to \Omega$ *sima görbe, akkor az* $\overleftarrow{r} : [\alpha, \beta] \to \Omega$, $\overleftarrow{r}(t) := r(\alpha + \beta - t)$ **ellentett irányítású** *görbére*

$$\int_{\overleftarrow{r}} f = -\int_r f.$$

Bizonyítás. Vezessük be az $u := \alpha + \beta - t$ helyettesítést, ekkor

$$\begin{aligned}\int_{\overleftarrow{r}} f &= \int_\alpha^\beta \langle f(r(\alpha + \beta - t)), \dot{r}(\alpha + \beta - t)\rangle \mathrm{d}t = \\ &= \int_\beta^\alpha \langle f(r(u)), \dot{r}(u)\rangle \mathrm{d}u = -\int_\alpha^\beta \langle f(r(u)), \dot{r}(u)\rangle \mathrm{d}u = -\int_r f.\end{aligned}$$

12.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *korlátos, azaz* $\exists M > 0$, $\forall x \in \Omega$ $\|f(x)\| \leq M$. *Ekkor az* $r : [\alpha, \beta] \to \Omega$ *sima görbe esetén*

$$\left|\int_r f\right| \leq M \cdot L,$$

ahol L *a görbe ívhossza.*

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}\left|\int_r f\right| &= \left|\int_\alpha^\beta \langle f(r(t)), \dot{r}(t)\rangle \mathrm{d}t\right| \leq \int_\alpha^\beta |\langle f(r(t)), \dot{r}(t)\rangle| \,\mathrm{d}t \\ &\leq \int_\alpha^\beta \|f(r(t))\| \cdot \|\dot{r}(t)\| \mathrm{d}t \leq \int_\alpha^\beta M \cdot \|\dot{r}(t)\| \mathrm{d}t = ML,\end{aligned}$$

hiszen $\int_\alpha^\beta \|\dot{r}(t)\| \mathrm{d}t$ a görbe ívhossza. (Közben a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenséget használtuk.)

12.3.2. Potenciál

12.3. Definíció. *Az $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ legyen Z-tulajdonságú, ha $\forall r : [\alpha,\beta] \to \Omega$, $r(\alpha) = r(\beta)$ sima zárt görbe esetén $\oint_r f = 0$.*

12.4. Definíció. *Az $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ legyen F-tulajdonságú, ha $\forall r_1 : [\alpha_1,\beta_1] \to \Omega$ és $\forall r_2 : [\alpha_2,\beta_2] \to \Omega$ olyan sima görbék esetén, melyekre még $r_1(\alpha_1) = r_2(\alpha_2)$ és $r_1(\beta_1) = r_2(\beta_2)$ is igaz, teljesül, hogy*

$$\int_{r_1} f = \int_{r_2} f.$$

12.5. Definíció. *Az $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ legyen P-tulajdonságú, ha $\exists \Phi : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Phi \in D(\Omega)$ és $\mathrm{grad}\Phi = f$. A Φ az f egyik* **potenciál***ja.*

12.6. Tétel. *Legyen $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Ekkor $Z \Leftrightarrow F \Leftrightarrow P$.*

Bizonyítás.

1^o *$Z \Rightarrow F$.*
Legyen $r_1 : [\alpha_1,\beta_1] \to \Omega$ sima görbe, $r_2 : [\alpha_2,\beta_2] \to \Omega$ sima görbe. Tegyük fel, hogy $\alpha_2 = \beta_1$, és $r_1(\alpha_1) = r_2(\alpha_2)$, $r_1(\beta_1) = r_2(\beta_2)$. Ekkor az $\overleftarrow{r_2} : [\alpha_2,\beta_2] \to \Omega$, $\overleftarrow{r_2}(t) := r_2(\alpha_2+\beta_2-t)$ ellentétesen irányított görbével az $r_1 \cup \overleftarrow{r_2}$ zárt görbe lesz. Így

$$0 = \int_{r_1\cup\overleftarrow{r_2}} f = \int_{r_1} f + \int_{\overleftarrow{r_2}} f = \int_{r_1} f - \int_{r_2} f,$$

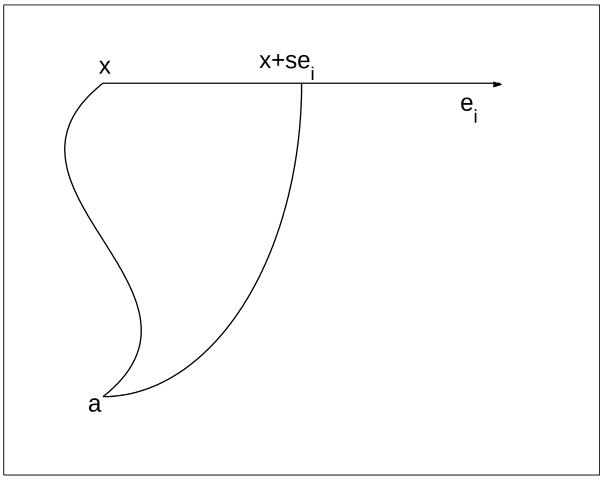
tehát

$$\int_{r_1} f = \int_{r_2} f.$$

2^o *$F \Rightarrow P$.*
Rögzítsünk egy $a \in \Omega$ pontot. Legyen $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Phi(x) := \int_{\overrightarrow{a,x}} f$, ahol $\overrightarrow{a,x}$ jelöljön egy a-t x-szel összekötő sima görbét. Legyen e_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ az i-edik egységvektor. Ekkor

$$\begin{aligned} \partial_i\Phi(x) &= \lim_{s\to 0}\frac{\Phi(x+se_i)-\Phi(x)}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\left(\int_{\overrightarrow{a,x+se_i}} f - \int_{\overrightarrow{a,x}} f\right) = \\ &= \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\int_0^s \langle f(x+te_i), e_i\rangle \mathrm{d}t = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\int_0^s f_i(x+te_i)\mathrm{d}t = \\ &= \lim_{s\to 0}\frac{1}{s} f_i(x+\vartheta e_i)\cdot s = f_i(x). \end{aligned} \tag{12.1}$$

(Lásd a 12.4. ábrát.) Közben felhasználtuk, hogy az $[x, x+se_i]$ szakaszt a $\gamma : [0,s] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) := x+te_i$ paraméterezéssel állíthatjuk elő, melyre $\dot\gamma(t) = e_i$.
Felhasználtuk még a folytonos függvény integrálközepét is. Az utolsó lépés f_i folytonosságának a következménye.



12.4. ábra.

3^o $P \Rightarrow Z$

Legyen $r : [\alpha, \beta] \to \Omega,\ r(\alpha) = r(\beta)$ sima zárt görbe. Mivel $\exists \Phi \in D(\Omega)$ potenciál, ezért

$$\begin{aligned}\int_r f &= \int_\alpha^\beta \langle f(r(t)), \dot r(t)\rangle \mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \langle \mathrm{grad}\Phi(r(t)), \dot r(t)\rangle \mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \Phi'(r(t))\dot r(t)\mathrm{d}t = \\ &= \int_\alpha^\beta (\Phi(r(t)))'\mathrm{d}t = [\Phi(r(t))]_\alpha^\beta = \Phi(r(\beta)) - \Phi(r(\alpha)) = 0,\end{aligned}$$

hiszen $r(\alpha) = r(\beta)$ miatt $\Phi(r(\alpha)) = \Phi(r(\beta))$.

Mivel $Z \Rightarrow F,\ F \Rightarrow P$ és $P \Rightarrow Z$, ezért az f mindhárom tulajdonsága egyenértékű.

Mielőtt a potenciál létezésének elégséges feltételével foglalkoznánk, egy önmagában is fontos, gyakran használt eredményt mutatunk be.

Legyen $g : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R},\ g \in C$. A

$$G : [c, d] \to \mathbb{R},\ G(y) := \int_a^b g(x, y)\mathrm{d}x$$

függvényt **paraméteres integrál**nak nevezzük (y a „paraméter”).

12.7. Tétel. *Legyen $g : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R},\ g \in C$ és $\partial_2 g \in C([a, b] \times [c, d])$. Ekkor a $G : [c, d] \to \mathbb{R},\ G(y) := \int_a^b g(x, y)\mathrm{d}x$ függvényre $G \in D(c, d)$, és $\forall y \in (c, d)$ esetén*

$$G'(y) = \int_a^b \partial_2 g(x, y)\mathrm{d}x.$$

Bizonyítás. Legyen $y \in (c,d)$ tetszőleges. Ekkor $\forall s \in (c,d),\ s \neq y$ esetén

$$\begin{aligned}
&\frac{G(s)-G(y)}{s-y} - \int_a^b \partial_2 g(x,y)\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{s-y}\left(\int_a^b g(x,s)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x,y)\mathrm{d}x\right) - \int_a^b \partial_2 g(x,y)\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{s-y}\int_a^b (g(x,s)-g(x,y))\mathrm{d}x - \int_a^b \partial_2 g(x,y)\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{s-y}\int_a^b \partial_2 g(x,\eta)(s-y)\mathrm{d}x - \int_a^b \partial_2 g(x,y)\mathrm{d}x = \\
&= \int_a^b (\partial_2 g(x,\eta) - \partial_2 g(x,y))\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Mivel $\partial_2 g \in C$, ezért $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, hogy $\forall (x,s),(x,y) \in [a,b]\times[c,d]$, amelyre

$$\|(x,s)-(x,y)\| = |s-y| < \delta,$$

teljesül, hogy $|\partial_2 g(x,s) - \partial_2 g(x,y)| < \varepsilon$, és mivel η az y és s között van, így $|\eta - y| < \delta$ is fennáll, amiből

$$|\partial_2 g(x,\eta) - \partial_2 g(x,y)| < \varepsilon$$

is következik.
Legyen $s \in (c,d),\ s \neq y$ olyan, hogy $|s-y| < \delta$. Ekkor

$$\left|\frac{G(s)-G(y)}{s-y} - \int_a^b \partial_2 g(x,y)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |\partial_2 g(x,\eta) - \partial_2 g(x,y)|\mathrm{d}x < \int_a^b \varepsilon\mathrm{d}x = \varepsilon(b-a).$$

Ez éppen azt jelenti, hogy $\exists \lim_{s\to y} \frac{G(s)-G(y)}{s-y}$ és

$$G'(y) = \lim_{s\to y}\frac{G(s)-G(y)}{s-y} = \int_a^b \partial_2 g(x,y)\mathrm{d}x.$$

Ezt a tételt a „paraméteres integrál deriválása" néven szokták emlegetni, és formálisan azt mondja, hogy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^b g(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x,$$

azaz kellően sima függvény esetén az integrál paraméter szerinti deriválását az integrál alatt is el lehet végezni.

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Az Ω tartomány **csillagtartomány**, ha $\exists a \in \Omega$, hogy $\forall x \in \Omega$ esetén az $[a,x] := \{a + t(x-a) \in \mathbb{R}^n \mid t \in [0,1]\} \subset \Omega$ (az a pontból az Ω minden pontjához el lehet „látni"...).

12.8. Tétel. *(a potenciál létezésének elégséges feltétele)*
Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ csillagtartomány. Legyen $f \in C^1(\Omega)$ ($\forall i, j = 1, 2, \dots, n$ esetén $\partial_i f_j \in C(\Omega)$) és $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$ esetén $\forall x \in \Omega$ pontban

$$\partial_i f_j(x) = \partial_j f_i(x),$$

azaz $f'(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix. Ekkor $\exists \Phi : \Omega \to \mathbb{R}$, amelyre $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$ esetén $\forall x \in \Omega$ pontban $\partial_i \Phi(x) = f_i(x)$, azaz van potenciálja az f függvénynek.

Bizonyítás. Legyen $x \in \Omega$, $x \neq a$ tetszőleges. Legyen az a pontot x-szel összekötő szakasz a

$$[0, 1] \ni t \mapsto a + t(x - a) \in \Omega$$

sima „görbe". Jelölje ezt $\overrightarrow{a, x}$. Az $\overrightarrow{a, x}$ görbén vett vonalintegrál legyen a Φ függvény x-beli értéke, azaz

$$\Phi : \Omega \to \mathbb{R},\ \Phi(x) := \int_{\overrightarrow{a,x}} f = \int_0^1 \langle f(a + t(x - a)), x - a\rangle \mathrm{d}t.$$

Megmutatjuk, hogy Φ potenciálja az f függvénynek. Legyen $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tetszőleges index. Ekkor $\forall x \in \Omega$ esetén

$$\partial_i\Phi(x) = \partial_i \int_0^1 \langle f(a+t(x-a)), x-a\rangle \mathrm{d}t = \partial_i \int_0^1 \sum_{j=1}^n f_j(a+t(x-a))(x_j-a_j)\mathrm{d}t =$$

[Most alkalmazzuk a paraméteres integrál deriválásáról szóló tételt. A „paraméter" most x_i lesz. Így folytatva a számolást:]

$$= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n \{\partial_i f_j(a + t(x - a))t\} \cdot (x_j - a_j) + f_i(a + t(x - a)) \cdot 1 \right) dt =$$

[hiszen ha $j \neq i$, akkor $\partial_i(x_j - a_j) = 0$. Most használjuk ki, hogy $\partial_i f_j = \partial_j f_i$. Így kapjuk, hogy:]

$$= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n \{\partial_j f_i(a + t(x - a))t\} \cdot (x_j - a_j) + f_i(a + t(x - a)) \right) dt =$$

[Tekintsük a $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\Psi(t) := t \cdot f_i(a + t(x - a))$ függvényt. A simasági feltevések miatt $\Psi \in D$ és

$$\begin{aligned} \Psi'(t) &= f_i(a + t(x - a)) + t \cdot f_i'(a + t(x - a)) \cdot (x - a) = \\ &= f_i(a + t(x - a)) + t \sum_{j=1}^n \partial_j f_i(a + t(x - a)) \cdot (x_j - a_j). \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy az integrál alatt éppen $\Psi'(t)$ áll. Ezért:]

$$\int_0^1 \Psi'(t)\mathrm{d}t = [\Psi(t)]_0^1 = \Psi(1) - \Psi(0) = f_i(a + x - a) = f_i(x).$$

[Közben többször deriváltunk közvetett függvényt…]
Tehát $\partial_i\Phi(x) = f_i(x)$. Mivel $f_i \in C$, ezért $\partial_i\Phi \in C$, amiből már következik, hogy $\Phi \in D$. Így valóban Φ az f potenciálja.

13. fejezet

Differenciálegyenletek

A természetben, társadalomban zajló folyamatok leírására alkalmasak a differenciálegyenletek. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk.

- A differenciálegyenlet fogalma
- Szétválasztható változójú differenciálegyenletek megoldása
- Alkalmazások

13.1. Differenciálegyenletek $\boxed{\text{A}}$

13.1.1. Alapfogalmak

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tartomány, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Keressük az olyan $y : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvényeket, amelyek $D(y)$ értelmezési tartománya nyílt intervallum, y folytonosan differenciálható, minden $x \in D(y)$ esetén $(x, y(x)) \in \Omega$ és

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Ezt a problémát elsőrendű differenciálegyenletnek nevezzük, és az $y' = f(x, y)$ szimbólummal hivatkozunk rá. Látni fogjuk, hogy ennek a problémának általában végtelen sok megoldása van. Ha azonban valamely x_0 pontban előírjuk a megoldás $y(x_0)$ értékét, akkor rendszerint egyetlen megoldást kapunk. Az

$$y(x_0) = y_0$$

összefüggést kezdeti feltételnek nevezik. A feladatokból kiderül majd, hogy ilyen típusú feltételek természetes módon hozzátartoznak a differenciálegyenletekhez.

Felvetődik a kérdés, hogy az f függvény folytonossága elegendő-e ahhoz, hogy legyen megoldása az $y' = f(x, y)$ differenciálegyenletnek, illetve, ha van megoldása, akkor hogyan lehet ahhoz eljutni.

13.1.2. Szétválasztható változójú differenciálegyenlet

A problémával történő jelenlegi első ismerkedésnél csak azzal a speciális esettel foglalkozunk, ahol az $f : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény előáll

$$f(x, y) = g(x)h(y)$$

alakban, ahol $g, h : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ folytonos függvények, $D(g)$ intervallum, és a h függvény nem veszi fel a 0 értéket. Az ilyen differenciálegyenletet szétválasztható változójúnak nevezzük és tömörebben az

$$y' = g(x)h(y)$$

kifejezéssel jelöljük. Tegyük fel, hogy valamely $y : I \to \mathbb{R}$ függvény megoldása a feladatnak, azaz minden $x \in I$ esetén $y'(x) = g(x)h(y(x))$. Ekkor

$$\frac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x) \qquad (x \in I) \tag{13.1}$$

Legyen $H := \int 1/h$ és $G = \int g$ az $1/h$ és a g egy-egy primitív függvénye. Tetszőleges $x \in I$ esetén

$$(H \circ y)'(x) = H'(y(x))y'(x) = \frac{y'(x)}{h(y(x))} \quad \text{és} \quad G'(x) = g(x).$$

Mivel a $(H \circ y)'$ és a G' deriváltfüggvények (13.1) szerint az I intervallumon megegyeznek, azért a $H \circ y$ és G függvények csak egy konstansban térhetnek el egymástól. Azaz van olyan $c \in \mathbb{R}$ szám, amellyel minden $x \in I$ esetén

$$H(y(x)) = G(x) + c.$$

Ha a H függvénynek van inverzfüggvénye, H^{-1}, akkor

$$H^{-1}(H(y(x))) = H^{-1}(G(x) + c),$$

azaz minden $x \in I$ esetén

$$y(x) = H^{-1}(G(x) + c). \tag{13.2}$$

Tehát az $y' = g(x)h(y)$ feladat minden megoldása előállítható (13.2) alakban. (Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy ezek a függvények valóban megoldások.) Megjegyezzük, hogy ezt a gondolatmenetet csupán formálisan követve egy könnyen megjegyezhető megoldási eljáráshoz jutunk:

$$y' = g(x)h(y)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x)h(y)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = g(x)\mathrm{d}x$$

Ezt az egyenletet integrálva és bevezetve a $H := \int 1/h$ és $G = \int g$ primitív függvényeket a

$$H(y) = G(x) + c$$

egyenlethez jutunk. Mindkét oldalra alkalmazva a H^{-1} inverzfüggvényt a (13.2) megoldást kapjuk.

Nézzük meg, hogy ez az egyszerűen megoldható típus milyen jelenségek leírására alkalmas.

13.1.3. Alkalmazás

Tegyük fel, hogy egy radioaktív anyag a t_0 időpillanatban m_0 tömegű. Az idő előrehaladtával a $t > 0$ időpillanatban jelölje $m(t)$, míg a $t + \Delta t$ időpontban $m(t+\Delta t)$ a sugárzó anyag tömegét. Feltesszük, hogy a t és $t+\Delta t$ időpont közötti $\Delta m := m(t + \Delta t) - m(t)$ tömegváltozás egyenesen arányos a t időpontbeli $m(t)$ tömeggel és az eltelt Δt idővel: $\Delta m \sim m(t)\Delta t$. Sugárzásról van szó, így $\Delta t > 0$ esetén $\Delta m < 0$. Bevezetve egy $k > 0$ arányossági tényezőt a $\Delta m = -km(t)\Delta t$, azaz a

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = -km(t)$$

egyenlőséghez jutunk. Ha $\Delta t \to 0$, akkor a

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -km(t)$$

differenciálegyenletet kapjuk. Ebben most x helyett t a változó, és $y(x)$ helyett $m(t)$ az ismeretlen függvény. A differenciálegyenlet szétválasztható változójú (k most nem is függ a t változótól). Oldjuk meg az egyenletet az imént ismertetett módszerrel. Szétválasztva a változókat

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = -k\mathrm{d}t.$$

Mindkét oldalt integrálva

$$\ln m = -kt + c,$$

melyből

$$m = \mathrm{e}^{-kt+c} = \mathrm{e}^{-kt}\mathrm{e}^{c}$$

Mivel a kezdeti feltételből $m_0 = m(0) = \mathrm{e}^0\mathrm{e}^c = \mathrm{e}^c$, azért a megoldás bármely $t > 0$ esetén

$$m(t) = m_0\mathrm{e}^{-kt}.$$

A sugárzó anyagok egyik jellemzője a T felezési idő, amely megadja, hogy mennyi idő alatt tűnik el az anyag tömegének fele. A T felezési idővel megadható a k bomlási állandó. Ugyanis

$$\frac{m_0}{2} = m(T) = m_0\mathrm{e}^{-kT},$$

melyből

$$k = \frac{\ln 2}{T}.$$

Kutatások kimutatták, hogy élő növényi szervezetben a szén 14-es izotópjának koncentrációja állandó, mivel a szétsugárzódó C^{14} pótlódik a légkörből az asszimiláció során. Azonban, amikor például egy fa elpusztul, akkor többé nem épül be a C^{14}, ezért csökken a fa anyagában a koncentrációja. Találtak egy korhadt fatörzset, amelyben a C^{14} térfogategységre eső mennyisége csak 90%-a a szokásosnak. Hány évvel ezelőtt pusztult el a fa, ha tudjuk, hogy a C^{14} felezési ideje 5370 év?

Mivel a C^{14} mennyiséget a fa elpusztulásától számított t idő múlva az

$$m(t) = m_0 \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{5370}t}$$

képlet adja és jelenleg a fa anyagában a C^{14} mennyisége $0,9m_0$, azért a keresett időt a

$$0,9m_0 = m_0 \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{5370}t}$$

egyenlet adja. Mindkét oldalt m_0-al osztva, majd logaritmust véve

$$\ln 0,9 = -\frac{\ln 2}{5370}t$$

melyből

$$t = -5370\frac{\ln 0,9}{\ln 2} = 816 \text{ év}.$$

Tehát a fa 816 évvel ezelőtt pusztult el. Ez a példa illusztrálta a C^{14}-es kormeghatározás módszerét, amelyért 1960-ban W. Libby amerikai vegyész kémiai Nobel díjat kapott...

13.2. Feladatok

1. (Korlátlan szaporodás modellje) Legyen a $t = 0$ időpontban m_0 tömegű vírus egy város lakosaiban. Írjuk le a járvány kialakulásának modelljét (ha nincs ellenszere a vírus szaporodásának...).

2. (Korlátozott növekedés modellje) Egy szigeten legfeljebb M mennyiségű (például tömegű) nyúl számára terem elegendő fű. Betelepítenek m_0 mennyiségű nyulat. Írjuk le a nyulak mennyiségének időbeli változását!

   Megoldás: Jelölje $m(t)$ a kérdéses mennyiséget a t időpontban. Feltehető, hogy egy t időpontban ennek Δt idő alatti megváltozása arányos az eltelt Δt idővel, az $m(t)$ nyúlmennyiséggel és a sziget maradék nyúleltartó képességével. Azaz

   $$m(t + \Delta t) - m(t) \sim m(t)(M - m(t))\Delta t.$$

Bevezetve a k szaporodási tényezőt

$$m(t+\Delta t) - m(t) = km(t)(M - m(t))\Delta t.$$

Elosztva az egyenletet Δt-vel, majd a $\Delta t \to 0$ határátmenetet véve a

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = m' = km(M-m)$$

szétválasztható változójú differenciálegyenletet kapjuk. Szétválasztva a változókat

$$\frac{\mathrm{d}m}{m(M-m)} = k\mathrm{d}t.$$

Felhasználva, hogy

$$\frac{1}{m(M-m)} = \frac{1}{M}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M-m}\right)$$

kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{m(M-m)}\mathrm{d}m = \frac{1}{M}\left(\ln m - \ln(M-m)\right) = \frac{1}{M}\ln\frac{m}{M-m}$$

. Az egyenlet mindkét oldalát integrálva

$$\frac{1}{M}\ln\frac{m}{M-m} = kt + c$$

$$\ln\frac{m}{M-m} = Mkt + Mc$$

$$\frac{m}{M-m} = \mathrm{e}^{Mkt}\mathrm{e}^{Mc}.$$

Ebből

$$m(t) = M\frac{\mathrm{e}^{Mkt}}{\mathrm{e}^{-Mc} + \mathrm{e}^{Mkt}}.$$

Az $m(0) = m_0$ kezdeti feltételből

$$m_0 = M\frac{1}{\mathrm{e}^{-Mc}+1},$$

melyből

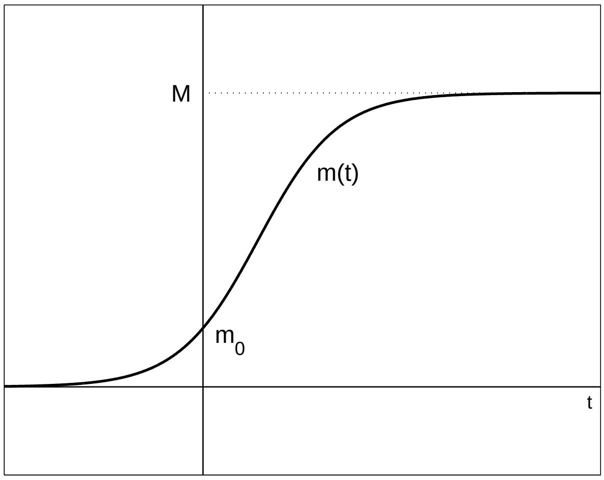
$$\mathrm{e}^{Mc} = \frac{m_0}{M-m_0}.$$

Így a megoldás

$$m(t) = M\frac{\mathrm{e}^{Mkt}}{\frac{M-m_0}{m_0} + \mathrm{e}^{Mkt}}.$$

Látható, hogy

$$\lim_{t\to\infty} m(t) = M\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\frac{M-m_0}{m_0}\mathrm{e}^{-Mkt}+1} = M.$$



13.1. ábra.

3. Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket!

   a) $y' = xy$, $x \in \mathbb{R}$
   b) $y' = -y\mathrm{tg}x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$
   c) $y' = \frac{1}{2x}\sqrt{1+y^2}$, $x > 0$

14. fejezet

Többváltozós függvény integrálja

A valós-valós függvény integrálját most más irányban általánosítjuk. Eljutunk egy felület alatti térrész térfogatához, amelynek kiszámítását valós függvények integráljának kiszámítására vezetjük vissza. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk.

- Többváltozós függvény Riemann-integráljának definíciója
- Az integrál kiszámítása téglalapon Fubini-tétellel
- Az integrál kiszámítása normáltartományon
- Az integrál kiszámítása más tartományokon integráltranszformációval

14.1. Többváltozós integrál $\boxed{\text{A}}$

14.1.1. A többváltozós integrál fogalma

Legyen $T := [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ egy zárt téglalap. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \supset\!\!\to \mathbb{R}$ kétváltozós folytonos függvény, amelyre $T \subset D(f)$. Készítsük el az $[a, b]$ intervallum egy $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$ és a $[c, d]$ intervallum egy $c = y_0 < \ldots < y_{k-1} < y_k < \ldots < y_m = b$ felosztását. Minden $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallumban vegyünk fel egy $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ és minden $[y_{k-1}, y_k]$ részintervallumban egy $\eta_k \in [y_{k-1}, y_k]$ pontot $(i = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, m)$. Készítsük el a

$$\sigma_{n,m} := \sum_{i=1,\ldots,n,\ k=1,\ldots,m} f(\xi_i, \eta_k)(x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1})$$

közelítőösszeget. (A $\sigma_{n,m}$ szemléletesen $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{k-1}, y_k]$ téglalap alaplapú, $f(\xi_i, \eta_k)$ „magasságú” (ez lehet negatív szám is!) hasábok „előjeles” térfogatának az összege.)

Az f függvény folytonossága miatt igazolható, hogy ezeknek a közelítőösszegeknek létezik határértéke abban az értelemben, hogy van olyan $I \in \mathbb{R}$ szám, hogy bármely $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden olyan felosztásra, amelyben

$$\max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, 2, \ldots, n\} < \delta$$

és

$$\max\{y_k - y_{k-1} \mid k = 1, 2, \ldots, m\} < \delta$$

és ezekben tetszőlegesen felvett $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$ és $\eta_k \in [y_{k-1}, y_k]$ $(k = 1, \ldots, m)$ esetén

$$|\sigma_{n,m} - I| < \varepsilon.$$

Az ilyen $I \in \mathbb{R}$ számot az f függvény T **téglalapon vett integrál**jának nevezzük és

$$\int_T f := I.$$

Erre a fogalomra röviden úgy szoktak hivatkozni, hogy

$$\begin{aligned} \int_T f &= \lim_{x_i - x_{i-1} \to 0,\ y_k - y_{k-1} \to 0} \sum_{i,k} f(\xi_i, \eta_k)(x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1}) = \\ &= \lim_{\Delta x_i \to 0,\ \Delta y_k \to 0} \sum_{i,k} f(\xi_i, \eta_k) \Delta x_i \Delta y_k = \int_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Az $\int_T f \in \mathbb{R}$ számot az f felület alatti

$$\begin{aligned} H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in T,\ & 0 \le z \le f(x, y),\ \text{ha } f(x, y) \ge 0 \\ & \text{vagy } f(x, y) \le z \le 0,\ \text{ha } f(x, y) < 0\} \end{aligned}$$

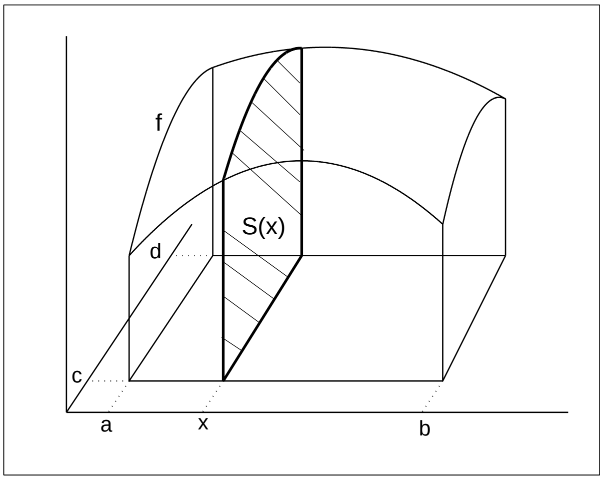
térrész „előjeles” térfogatának nevezzük.

14.1.2. Az integrál kiszámítása téglalapon és normáltartományon

Nyilvánvaló, hogy a bemutatott eljárás végigvitele igen nehézkessé tenné az f függvény T téglalapon vett integráljának kiszámítását.

Idézzük fel a valós-valós függvény integráljának térfogatszámításra való alkalmazását. Legyen most az $[a, b]$ intervallum tetszőleges $x \in [a, b]$ pontjában a H síkmetszetének területe $S(x)$ (14.1. ábra). Ez a terület a $[c, d] \ni y \mapsto f(x, y)$ függvény $[c, d]$-n vett integrálja:

$$S(x) = \int_c^d f(x, y) \mathrm{d}y.$$



14.1. ábra.

Ha ezt az $[a, b] \ni x \mapsto S(x)$ függvényt (amely f folytonossága miatt folytonos) integráljuk az $[a, b]$ intervallumon, akkor

$$\int_T f = \int_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Hasonló gondolatmenettel adódna, hogy

$$\int_T f = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

14.1. Tétel. *(Fubini-tétel)*
Legyen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$, f folytonos és $[a, b] \times [c, d] \subset D(f)$. Ekkor

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Például legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$. $T := [0, 1] \times [2, 3]$. Ekkor

$$\int_T f = \int_2^3 \left(\int_0^1 xy\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_2^3 \left[\frac{x^2}{2} y \right]_0^1 \mathrm{d}y = \int_2^3 \frac{y}{2}\mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{4} \right]_2^3 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}.$$

Az f függvény T téglalapon vett integráljának definíciója nem igényelte, hogy az f folytonos függvény legyen. Ha f nem folytonos, akkor előfordulhat, hogy nem létezik az $I \in \mathbb{R}$ szám. Ha azonban létezik a kívánt tulajdonságú I szám, akkor az f függvényt **integrálható**nak mondjuk a T téglalapon, és ekkor

$$\int_T f := I.$$

Ezzel a megjegyzéssel térünk át az $f : \mathbb{R}^2 \supset\!\!\rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek nem téglalap alakú halmazokon vett integrálhatóságára és integráljára.

Legyen $\alpha, \beta : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény olyan, hogy minden $x \in [a, b]$ esetén $\alpha(x) \leq \beta(x)$. Legyen

$$N_x := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b] \text{ és } \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

„az x-tengelyre nézve **normáltartomány**". Legyen $f : N_x \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Mivel $\alpha, \beta \in C[a, b]$, ezért van olyan $c, d \in \mathbb{R}$, hogy minden $x \in [a, b]$ esetén $c \leq \alpha(x) \leq \beta(x) \leq d$. Terjesszük ki az f függvényt a

$$T := [a, b] \times [c, d]$$

téglalapra a következő módon:

$$\hat{f} : T \to \mathbb{R}, \quad \hat{f}(x, y) := \begin{cases} f(x, y), & \text{ha } (x, y) \in N_x \\ 0, & \text{ha } (x, y) \in T \setminus N_x. \end{cases}$$

Ez az f függvény olyan, hogy $\hat{f}_{|N_x}$ folytonos, míg a $T \setminus N_x$ halmazon azonosan 0. Igazolható, hogy az ilyen $\hat{f}$ függvény integrálható, és az $\hat{f}$ függvény T téglalapon vett integrálja segítségével értelmezzük az f függvény N_x normáltartományon vett integrálját:

$$\int_{N_x} f := \int_T \hat{f}.$$

A Fubini-tétel szerint

$$\begin{aligned}\int_{N_x} f = \int_T \hat{f} &= \int_a^b \left(\int_c^d \hat{f}(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \\ &= \int_a^b \left(\int_c^{\alpha(x)} \hat{f}(x, y)\mathrm{d}y + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \hat{f}(x, y)\mathrm{d}y + \int_{\beta(x)}^{d} \hat{f}(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \\ &= \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

hiszen $[c, \alpha(x)] \ni y \mapsto \hat{f}(x, y) = 0$, $[\alpha(x), \beta(x)] \ni y \mapsto \hat{f}(x, y) = f(x, y)$ és $[\beta(x), d] \ni y \mapsto \hat{f}(x, y) = 0$ bármely $x \in [a, b]$ esetén.
Például legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$ és

$$N_x := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1] \text{ és } x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}\int_{N_x} f &= \int_{-1}^1 \left(\int_{x^2-1}^{1-x^2} xy\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \left[x\frac{y^2}{2} \right]_{x^2-1}^{1-x^2} \mathrm{d}x = \\ &= \int_{-1}^1 \frac{x}{2}(1 - x^2)^2 - \frac{x}{2}(x^2 - 1)^2 \mathrm{d}x = \int_{-1}^1 0\mathrm{d}x = 0.\end{aligned}$$

Értelemszerű módosítással kapjuk az N_y y-tengelyre nézve normáltartományra vett integrált is.

Az előzőek mintájára építhető fel az $f : \mathbb{R}^3 \supset\!\!\to \mathbb{R}$ függvény $T := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ téglára vett integrálja, az erre vonatkozó Fubini-tétel, majd az N_{xy} xy-síkra nézve normáltartományon vett integrál is.

Az $N_{xy} \subset \mathbb{R}^3$ az xy-síkra nézve **normáltartomány**, ha létezik az $[a, b] \subset \mathbb{R}$ zárt intervallum, léteznek $\alpha, \beta : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyekre $\alpha(x) \le \beta(x)$ ($x \in [a, b]$), és léteznek a $\lambda, \mu : \mathbb{R}^2 \supset\!\!\to \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyekre $\lambda(x, y) \le \mu(x, y)$ ($x \in [a, b],\ \alpha(x) \le y \le \beta(x)$) olyanok, hogy

$$N_{xy} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [a, b],\ \alpha(x) \le y \le \beta(x),\ \lambda(x, y) \le z \le \mu(x, y)\}.$$

Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R}^3 \supset\!\!\to \mathbb{R}$, folytonos függvény, és $N_{xy} \subset D(f)$. Ekkor

$$\int_{N_{xy}} f = \int_a^b \left\{ \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \left(\int_{\lambda(x,y)}^{\mu(x,y)} f(x, y, z)\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x.$$

14.1.3. Az integrál transzformációja

Az egyváltozós helyettesítéssel történő integrálásnak is van megfelelője a többváltozós integrálásban. A valós változós helyettesítéses integrál szerint, ha $\phi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ szigorúan monoton növő bijekció, és $\phi \in D$, akkor

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\mathrm{d}t.$$

Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \supset\!\!\to \mathbb{R}$ függvényt a $Q \subset D(f)$ halmazon szeretnénk integrálni. Ha szerencsénk van, akkor találunk olyan $\Phi = (\phi, \psi) : T \to Q$ bijekciót, ahol $T = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta] \subset \mathbb{R}^2$ egy téglalap, Φ folytonosan differenciálható, és bármely $(u, v) \in T$ esetén

$$\det \Phi'(u, v) = \begin{vmatrix} \partial_u \phi(u, v) & \partial_v \phi(u, v) \\ \partial_u \psi(u, v) & \partial_v \psi(u, v) \end{vmatrix} \ne 0.$$

Bebizonyítható, hogy ekkor

$$\int_Q f = \int_T f(\phi(u, v), \psi(u, v)) \cdot |\det \Phi'(u, v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Például $Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 4\}$, ami egy origó középpontú, 2 sugarú zárt körlemez. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) := x^2 + y^2$.
Mivel a

$$(\phi, \psi) := [0, 2] \times [0, 2\pi] \to Q,\ \phi(u, v) := u \cos v,\ \psi(u, v) := u \sin v$$

bijekció (polártranszformáció néven ismert), és

$$\det(\phi, \psi)'(u, v) = \begin{vmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \end{vmatrix} = u \cos^2 v + u \sin^2 v = u,$$

ezért

$$\begin{aligned}\int_Q x^2+y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{[0,2]\times[0,2\pi]} \left\{(u\cos v)^2+(u\sin v)^2\right\} u\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \\ &= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} u^3\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u = \int_0^2 [u^3v]_0^{2\pi}\mathrm{d}u = \left[2\pi\frac{u^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi.\end{aligned}$$

Az $f:\mathbb{R}^3 \supset\!\!\to \mathbb{R}$ függvények integrálásánál gyakran könnyítést jelent, ha észrevesszük, hogy az

$$\begin{aligned} X(r,\phi,\vartheta) &:= r\sin\vartheta\cos\phi \\ Y(r,\phi,\vartheta) &:= r\sin\vartheta\sin\phi \\ Z(r,\phi,\vartheta) &:= r\cos\phi \end{aligned}$$

transzformációval az

$$[R_1,R_2]\times[\phi_1,\phi_2]\times[\vartheta_1,\vartheta_2] =: T$$

téglát a $Q\subset\mathbb{R}^3$ integrálási tartományra kölcsönösen egyértelműen képezi le a $\Phi := (X,Y,Z) : T\to Q$ függvény, és $\det\Phi' \neq 0$ a T téglán. Ekkor

$$\det\Phi'(r,\phi,\vartheta) = \begin{vmatrix} \sin\vartheta\cos\phi & -r\sin\vartheta\sin\phi & r\cos\vartheta\cos\phi \\ \sin\vartheta\sin\phi & r\sin\vartheta\cos\phi & r\cos\vartheta\sin\phi \\ \cos\vartheta & 0 & -r\sin\vartheta \end{vmatrix} = -r^2\sin\vartheta.$$

Ekkor

$$\int_Q f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_T f(X(r,\phi,\vartheta),Y(r,\phi,\vartheta),Z(r,\phi,\vartheta))\cdot r^2\sin\vartheta\cdot \mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\vartheta.$$

Az itt alkalmazott térbeli polártranszformáció olyan Q térrészekre alkalmas, amely egy gömb valamilyen része (félgömb, gömbréteg stb.).

14.2. Feladatok

15. fejezet

Vektoranalízis

Térgörbék jellemzőit értelmezzük és számítjuk ki (görbület, torzió, ívhossz). Felületeken is bevezetjük az integrál fogalmát. A Newton–Leibniz-formula általánosításaként integrálátalakító tételeket (Gauss, Stokes) fogalmazunk meg. Az alábbi témaköröket tárgyaljuk.

- Görbe érintője, binormálisa, főnormálisa
- Görbe rektifikálhatósága és hossza
- Görbület, simulókör, torzió
- Felületek paraméteres megadása
- Felszín definíciója
- Felszíni integrál
- Felületi integrál
- Gradiens, divergencia, rotáció
- Stokes-tétel, Gauss-tétel

15.1. Vektoranalízis $\boxed{\text{A}}$

15.1.1. Térgörbék

Legyen $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$ egy megfelelően sima ($\dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r} \in C$ és bármely $t \in (\alpha, \beta)$ esetén $\dot{r}(t), \ddot{r}(t), \dddot{r}(t) \neq 0$) térgörbe. Már láttuk, hogy $\dot{r}(t_0)$ a görbe t_0 paraméterű pontjához húzott **érintővektor**. Jelöljük az $\dot{r}(t_0)$ irányába mutató egységvektort $\underline{t}$-vel:

$$\underline{t} := \frac{\dot{r}(t_0)}{\|\dot{r}(t_0)\|}.$$

Ezt **tangenciális** vektornak nevezzük.
Most legyen a görbe P_0 pontja az $r(t_0)$ vektor végpontja. Vegyünk fel tetszőlegesen a görbén P_1 és P_2 ($P_1, P_2 \neq P_0$) pontokat. Ha a P_1, P_0, P_2 nem esik egy egyenesbe, akkor egy síkot határoznak meg. Közeledjen P_1 és P_2 is P_0-hoz. Tegyük fel, hogy az általuk meghatározott síkok is közelítenek egy határhelyzethez, ami szintén egy sík. Ezt a síkot a görbe P_0 ponthoz tartozó **simuló sík**jának nevezzük (lényegében ez a sík tartalmazza a görbe P_0-hoz közeli kis darabját). Megmutatható, hogy a simuló síkot az $\dot{r}(t_0)$ és az $\ddot{r}(t_0)$ vektorok feszítik ki, ezért a sík egyik normálvektora az $\dot{r}(t_0) \times \ddot{r}(t_0)$ lesz. Ebből a simuló sík bármely pontjához vezető $\underline{r}$ helyvektorra fennáll, hogy

$$\langle(\dot{r}(t_0) \times \ddot{r}(t_0)), \underline{r} - r(t_0)\rangle = 0 \quad \text{(a simuló sík egyenlete).}$$

A simuló sík normálvektorából származtatott egységvektor a **binormális**:

$$\underline{b} := \frac{\dot{r}(t_0) \times \ddot{r}(t_0)}{\|\dot{r}(t_0) \times \ddot{r}(t_0)\|}.$$

Nyilván $\underline{b}$ binormális merőleges a $\underline{t}$ tangenciális vektorra. A $\underline{b}$ és $\underline{t}$ síkját **rektifikáló sík**nak nevezzük. Ennek a síknak az egyik normálvektora a $\underline{t} \times \underline{b}$, amelyből származtatott egységvektort az $\underline{f}$ **főnormális**nak nevezzük:

$$\underline{f} := \frac{(\dot{r}(t_0) \times \ddot{r}(t_0)) \times \dot{r}(t_0)}{\|(\dot{r}(t_0) \times \ddot{r}(t_0)) \times \dot{r}(t_0)\|}.$$

Az $\underline{f}$ és $\underline{b}$ síkja a **normálsík** (ennek egyik normálvektora az $\dot{r}(t_0)$ érintővektor.)

A $\underline{t}$, $\underline{f}$, $\underline{b}$ páronként egymásra merőleges egységvektorok, amelyek ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak. A görbe $r(t_0)$ helyvektorú pontjához illesztett $\underline{t}$, $\underline{f}$, $\underline{b}$ vektorrendszert **kísérő triéder**nek nevezzük (t_0 változásával a kísérő triéder is változik, de a görbe számára nagyon természetesnek tűnik ez a rendszer).

A köznapi értelemben is fontos tudni egy út hosszát. Tisztázni fogjuk, hogy egy $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$ térgörbének mikor van ívhossza, és ha van, akkor azt hogyan definiáljuk.

Legyen τ az $[\alpha, \beta]$ egy tetszőleges felosztása:

$$\tau : \alpha = t_0 < t - 1 < \ldots < t_{i-1} < t_i < \ldots < t_n = \beta.$$

Az $r(t_{i-1})$ és $r(t_i)$ a görbe pontjaihoz vezető helyvektor, így $\|r(t_i) - r(t_{i-1})\|$ a két pontot összekötő szakasz hossza. Legyen

$$L(\tau) := \sum_{i=1}^{n} \|r(t_i) - r(t_{i-1})\|$$

az $r(t_0), r(t_1), \ldots r(t_n)$ pontokhoz tartozó töröttvonal hossza. Készítsük el az összes ilyen töröttvonal hosszát tartalmazó számhalmazt:

$$\{L(\tau) \mid \tau \text{ felosztása az } [\alpha, \beta] \text{ intervallumnak}\}.$$

Ha ez a halmaz felülről korlátos, akkor az r térgörbét **rektifikálható**nak („kiegyenesíthető") nevezzük, és ekkor

$$\sup\{L(\tau) \mid \tau \text{ felosztása az } [\alpha, \beta] \text{ intervallumnak}\} =: L$$

$\mathbb{R}$-beli számot nevezzük a térgörbe hosszának. Ha a halmaz felülről nem korlátos, akkor nincs hossza a térgörbének (vagy végtelen hosszú).

Már láttuk, hogy sima görbe esetén

$$r(t_i) - r(t_{i-1}) \approx \dot{r}(\xi_i) \cdot (t_i - t_{i-1}) \quad (\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]),$$

így

$$L(\tau) = \sum_{i=1}^{n} \|r(t_i) - r(t_{i-1})\| \approx \sum_{i=1}^{n} \|\dot{r}(\xi_i) \cdot (t_i - t_{i-1})\|,$$

ami egy integrálközelítő összeg. Megmutatható, hogy ez sima görbe esetén elvezet a görbe ívhosszához: sima görbe rektifikálható, és

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \|\dot{r}(t)\| \mathrm{d}t.$$

Ha $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ sima görbe, akkor bármely $t \in [\alpha, \beta]$ esetén legyen $s(t) := \int_{\alpha}^{t} \|\dot{r}(u)\| \mathrm{d}u$ a görbének a t paraméterű pontig terjedő ívhossza (nyilván ez is létezik). Az értelmezés alapján látható, hogy

$$s'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\alpha}^{t} \|\dot{r}(u)\| \mathrm{d}u = \|\dot{r}(t)\|.$$

Ha $t, t + \Delta t \in [\alpha, \beta]$, akkor

$$\Delta s := s(t + \Delta t) - s(t) = \int_{t}^{t+\Delta t} \|\dot{r}(u)\| \mathrm{d}u \approx \|\dot{r}(t)\| \Delta t, \text{ ha } \Delta t \approx 0.$$

Az r térgörbe mentén mozgó pont **pályamenti** (kerületi) **sebessége** ebből származtatható:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \|\dot{r}(t)\|.$$

Gyakran használjuk a szögsebesség fogalmát. Tegyük fel, hogy az $r(t)$ és az $r(t + \Delta t)$ vektorok hajlásszöge $\Delta\phi$. Az r térgörbe t paraméterű pontjában a **szögsebesség** legyen

$$\omega(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t}.$$

Elég sima görbe esetén kiszámítjuk az $\omega(t)$ szögsebességet. Ismert, hogy

$$\|r(t) \times r(t + \Delta t)\| = \|r(t)\| \cdot \|r(t + \Delta t)\| \cdot \sin \Delta\phi.$$

Felhasználva, hogy $r(t) \times r(t) = \underline{0}$,

$$\sin \Delta\phi = \frac{\|r(t) \times (r(t + \Delta t) - r(t))\|}{\|r(t)\| \cdot \|r(t + \Delta t)\|}.$$

Emlékezve arra, hogy $\lim_{\Delta\phi\to 0}\frac{\sin\Delta\phi}{\Delta\phi}=1$, és $\Delta t\to 0$ esetén $\Delta\phi\to 0$, tovább számolunk:

$$\frac{\sin\Delta\phi}{\Delta\phi}\cdot\frac{\Delta\phi}{\Delta t}=\frac{\|r(t)\times\frac{r(t+\Delta t)-r(t)}{\Delta t}\|}{\|r(t)\|\cdot\|r(t+\Delta t)\|},$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{r(t+\Delta t)-r(t)}{\Delta t}=\dot r(t),$$

$$\omega(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\phi}{\Delta t}=\frac{\|r(t)\times\dot r(t)\|}{\|r(t)\|^2}.$$

Egy autóban útkanyarulathoz érve fontos tudni, hogy mennyire „görbült" az út, mennyire tér el az egyenestől. Az elég sima görbe t és $t+\Delta t$ paraméterű pontjai közötti görbeív hossza legyen Δs. E két pontbeli érintővektor hajlásszöge legyen $\Delta\alpha$. A t paraméterű ponthoz tartozó **görbület**en a

$$G(t):=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$$

határértéket értjük. A görbület arról tájékoztat, hogy Δs út megtételekor mekkora a sebességvektor szögelfordulása. Ha G nagy, akkor „éles" a kanyar, ha G közel nulla, akkor lényegében egyenes az út.

Kiszámítjuk a görbületet is elég sima görbe ($\dot r,\ddot r\in C$) esetén. Ha $\Delta s\approx 0$, akkor $\Delta t\approx 0$, így

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}:\frac{\Delta s}{\Delta t},$$

amiből

$$G(t)=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}:\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\Omega(t):\|\dot r(t)\|,$$

ahol $\Omega(t)$ az $\dot r$ (ez is térgörbe!) szögsebessége a t paraméterű helyen. Tehát

$$G(t)=\frac{\|\dot r(t)\times\ddot r(t)\|}{\|\dot r(t)\|^2}:\|\dot r(t)\|=\frac{\|\dot r(t)\times\ddot r(t)\|}{\|\dot r(t)\|^3}.$$

Legyen $G(t)\neq 0$ esetén

$$R(t):=\frac{1}{G(t)}>0.$$

Igazolható, hogy a görbe t paraméterű pontjához illeszkedő $R(t)$ sugarú kör, mely a simuló síkban fekszik, és amelynek a középpontja az $\underline{f}$ főnormális egyenesén van, a görbéhez jól simuló kört ad. **Simuló kör**nek nevezik. Az r görbén való mozgás rövid szakaszon a simuló körön való mozgással helyettesíthető.

A görbület azt mutatja meg, hogy egy görbe mennyire tér el az egyenestől. Egy másik jellemző adat, a torzió arról tájékoztat, hogy a görbe mennyire tér el egy síkgörbétől.

A görbe simuló síkjának normálvektora a binormális. Ha a paraméterváltozással a simuló sík változik, akkor erről a binormális elhajlása tanúskodik. A Δs

ívhosszváltozással járó binormális szögelfordulás jellemzi a torziót (csavarodást), azaz a t paraméterű helyhez tartozó **torzió** legyen

$$T(t) := \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \beta}{\Delta s}.$$

ahol $\Delta\beta$ az $r(t)$ és az $r(t+\Delta t)$ görbepontoknál érvényes simuló síkok normálvektorának ($\underline{b}(t)$ és $\underline{b}(t+\Delta t)$) hajlásszöge, Δs pedig a két pont közötti ívhossz. Az előzőekhez hasonlóan, elég sima görbe esetén ($\dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r} \in C$)

$$T(t) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \beta}{\Delta s} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \beta}{\Delta t} : \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \beta}{\Delta t} : \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\|\underline{b}(t) \times \dot{\underline{b}}(t)\|}{\|\underline{b}(t)\|^2} : \|\dot{r}(t)\|,$$

ahol az osztandó a $\underline{b}$ binormális, mint térgörbe szögsebessége. Behelyettesítve a binormálisra megismert előállítást, egyszerűsítések után a torzióra azt kapjuk, hogy

$$T(t) = \frac{|\langle \dot{r}(t) \times \ddot{r}(t), \dddot{r}(t) \rangle|}{\|\dot{r}(t) \times \ddot{r}(t)\|^2}.$$

Megjegyezzük, hogy ha a számlálóban a „vegyesszorzatnak” nem vesszük az abszolút értékét, akkor $T(t) > 0$ esetén jobbcsavarodású, $T(t) < 0$ esetén balcsavarodású görbéről beszélünk. Csavarmeneteknél, csigalépcsőnél jelentősége lehet ennek is ...

15.1.2. Felületek

Legyen S egy sík a térben. Az S sík egy pontjához vezessen az $\underline{r}_0$ vektor. Legyen továbbá az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ két nem párhuzamos síkbeli vektor. Ismert, hogy az S sík tetszőleges pontjához vezető $\underline{r}$ vektor előáll alkalmas $u, v \in \mathbb{R}$ számokkal

$$\underline{r} = \underline{r}_0 + u\underline{a} + v\underline{b}$$

alakban. Koordinátánként ez azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ua_1 + vb_1 \\ y &= y_0 + ua_2 + vb_2 \\ z &= z_0 + ua_3 + vb_3. \end{aligned}$$

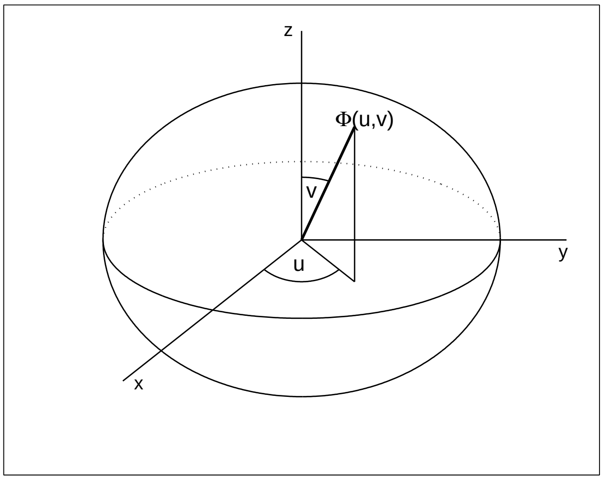
Tehát az S sík bármely pontját három kétváltozós függvénnyel meg tudtuk adni.

Ez általánosan is igaz. Legyen

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \supset\!\!\rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix},$$

ahol $X, Y, Z : \mathbb{R}^2 \supset\!\!\rightarrow \mathbb{R}$. Ha $\Omega := D(\Phi) \subset \mathbb{R}^2$, akkor bármely $(u, v) \in \Omega$ esetén az

$$\begin{bmatrix} X(u,v) \\ Y(u,v) \\ Z(u,v) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$



15.1. ábra.

a tér egy pontjához vezető helyvektort ad. Ezek a pontok egy felületet (kétparaméteres felület) határoznak meg. Például a $\Phi : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$\Phi(u, v) := \begin{bmatrix} 3 \sin v \cos u \\ 3 \sin v \sin u \\ 3 \cos v \end{bmatrix}$$

egy $(0, 0, 0)$ középpontú, $R = 3$ sugarú gömbfelület kétparaméteres előállítása (15.1. ábra).

Legyen $\Phi : \mathbb{R}^2 \supset\!\!\to \mathbb{R}^3$, $(u_0, v_0) \in D(\Phi)$. A $p : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}^3$, $p(u) := \Phi(u, v_0)$, a felületen futó görbe legyen az **u-paramétervonal**, míg a $q : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}^3$, $q(v) := \Phi(u_0, v)$ a **v-paramétervonal** (15.2. ábra).

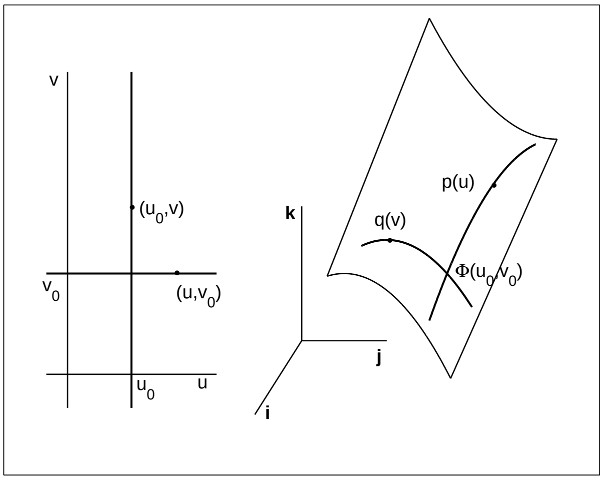
Ha Φ sima függvény (X, Y, Z koordináta-függvények parciális derviáltjai folytonosak), akkor $\dot{p}(u_0)$ és $\dot{q}(v_0)$ az u-paramétervonal ill. a v-paramétervonal érintővektorai, és ekkor az $\underline{n} := \dot{p}(u_0) \times \dot{q}(v_0)$ a Φ felület $\Phi(u_0, v_0)$ pontjához tartozó érintősíkjának a normálvektora lesz. Mivel

$$\dot{p}(u_0) = \begin{bmatrix} \partial_u X(u_0, v_0) \\ \partial_u Y(u_0, v_0) \\ \partial_u Z(u_0, v_0) \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \dot{q}(v_0) = \begin{bmatrix} \partial_v X(u_0, v_0) \\ \partial_v Y(u_0, v_0) \\ \partial_v Z(u_0, v_0) \end{bmatrix},$$

ezért az érintősík normálvektora az

$$\underline{n} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_u X & \partial_u Y & \partial_u Z \\ \partial_v X & \partial_v Y & \partial_v Z \end{vmatrix}$$

determináns, ahol a parciális deriváltakat az (u_0, v_0) helyen kell venni.



15.2. ábra.

Legyen Φ sima felület, (u,v), $(u+\Delta u, v)$, $(u+\Delta u, v+\Delta v)$, $(u, v+\Delta v) \in D(\Phi)$ pontok által meghatározott téglalap. Ennek területe $\Delta u \cdot \Delta v$. A

$$\Phi(u+\Delta u, v) - \Phi(u,v) \approx \begin{bmatrix} \partial_u X(u,v) \\ \partial_u Y(u,v) \\ \partial_u Z(u,v) \end{bmatrix} \Delta u =: \underline{a},$$

$$\Phi(u, v+\Delta v) - \Phi(u,v) \approx \begin{bmatrix} \partial_v X(u,v) \\ \partial_v Y(u,v) \\ \partial_v Z(u,v) \end{bmatrix} \Delta v =: \underline{b},$$

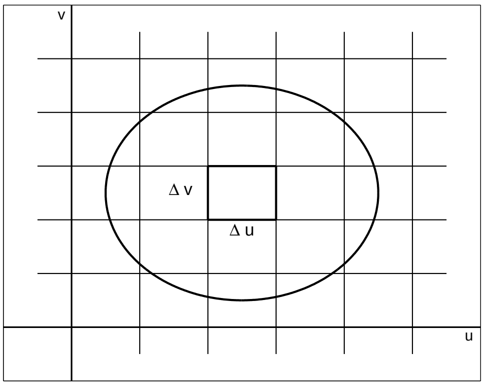
ezért a felületen futó u- és v-paramétervonalak által határolt $\Phi(u,v)$, $\Phi(u+\Delta u, v)$, $\Phi(u+\Delta u, v+\Delta v)$, $\Phi(u, v+\Delta v)$ „csúcsokkal” jellemezhető felületdarab felszíne közelítőleg a $\Phi(u,v)$ felületi ponthoz tartozó érintősíkon lévő olyan paralelogrammának a területe, amelynek oldalvektorai $\underline{a}$ és $\underline{b}$. Ez a terület a vektoriális szorzattal kifejezhető:

$$\|\underline{a} \times \underline{b}\| = \|\underline{n}\| \Delta u \Delta v = \| \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_u X & \partial_u Y & \partial_u Z \\ \partial_v X & \partial_v Y & \partial_v Z \end{vmatrix} \| \cdot \Delta u \Delta v.$$

A paramétertartományt az u és a v tengellyel párhuzamos egyenesekkel elég sűrűn felosztva $\Delta u \Delta v$ területű cellák keletkeznek (15.3. ábra).

A cella képe a felületen egy „görbevonalú cella” lesz, melynek felszínét számoltuk ki az előbbiekben. Ha ezeket összegezzük, akkor a Φ felület felszínének egy közelítőösszegét kapjuk:

$$\sum_u \sum_v \| \begin{bmatrix} \partial_u X(u,v) \\ \partial_u Y(u,v) \\ \partial_u Z(u,v) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \partial_v X(u,v) \\ \partial_v Y(u,v) \\ \partial_v Z(u,v) \end{bmatrix} \| \Delta u \Delta v,$$



15.3. ábra.

amely a felosztás minden határon túli sűrítésével a Φ felület Ω értelmezési tartományára vett integrálhoz tart. Tehát a Φ felület felszíne

$$S := \int_\Omega \|\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi\| \mathrm{d}u \mathrm{d}v,$$

ahol

$$\partial_u \Phi = \begin{bmatrix} \partial_u X \\ \partial_u Y \\ \partial_u Z \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \partial_v \Phi = \begin{bmatrix} \partial_v X \\ \partial_v Y \\ \partial_v Z \end{bmatrix}.$$

Az integrálandó függvényt egyszerűsíthetjük. Mivel $\underline{a}$, $\underline{b}$ vektor esetén

$$\begin{aligned} \|\underline{a} \times \underline{b}\|^2 &= \|\underline{a}\|^2 \cdot \|\underline{b}\|^2 \sin^2 \alpha = \|\underline{a}\|^2 \|\underline{b}\|^2 (1 - \cos^2 \alpha) = \\ &= \|\underline{a}\|^2 \|\underline{b}\|^2 - \|\underline{a}\|^2 \|\underline{b}\|^2 \cos^2 \alpha = \|\underline{a}\|^2 \|\underline{b}\|^2 - (\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle)^2, \end{aligned}$$

ezért

$$S = \int_\Omega (\|\partial_u \Phi\|^2 \|\partial_v \Phi\|^2 - (\langle \partial_u \Phi, \partial_v \Phi \rangle)^2)^{1/2} \mathrm{d}u \mathrm{d}v.$$

Felszíni integrál

Legyen $\Phi : \mathbb{R}^2 \supset\!\!\!\to \mathbb{R}^3$, $\Omega := D(\Phi)$ egy sima felület. Tegyük fel, hogy a felület minden pontjához hozzárendeltünk egy valós számot, azaz legyen $U : \mathbb{R}^3 \supset\!\!\!\to \mathbb{R}$, $D(U) := \Phi(\Omega)$. Tegyük fel, hogy U folytonos. Az U „skalárfüggvény” Φ felületre vett integrálját a szokásos módon értelmezzük:

1^o Felosztjuk az Ω paramétertartományt $\Delta u \Delta v$ területű cellákra.

2^o A cellákban felveszünk tetszőlegesen (u', v') pontokat.

3^o Elkészítjük az $U(\Phi(u', v')) \cdot \|\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi\| \Delta u \Delta v$ szorzatot (az U függvény egy felületi pontban vett értékének és a $\Delta u \Delta v$ területű cella képének a közelítő területét szoroztuk össze).

4^o A $\sum_u \sum_v U(\Phi(u',v')) \cdot \|\partial_u\Phi \times \partial_v\Phi\| \Delta u \Delta v$ egy integrálközelítő összeg.

5^o Az U skalárfüggvény Φ felületre vett integrálján a közelítőösszegek határértékét értjük:

$$\begin{aligned}\int_\Phi U &:= \lim_{\Delta u\to 0, \Delta v \to 0} \sum_u \sum_v U(\Phi(u',v')) \cdot \|\partial_u\Phi \times \partial_v\Phi\| \Delta u \Delta v = \\ &= \int_\Omega U(\Phi(u,v)) \cdot \|\partial_u\Phi(u,v) \times \partial_v\Phi(u,v)\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

Felületi integrál

Legyen $\Phi : \mathbb{R}^2 \supset\!\!\!\to \mathbb{R}^3$, $\Omega := D(\Phi)$ egy sima felület. Tegyük fel, hogy a felület minden pontjához egy vektort rendeltünk, azaz $F : \mathbb{R}^3 \supset\!\!\!\to \mathbb{R}^3$, $D(F) = \Phi(\Omega)$. Tegyük fel, hogy F folytonos. Az F „vektorértékű” függvény Φ felületre vett integrálját az eddigiekhez hasonlóan értelmezzük:

1^o Felosztjuk az Ω paramétertartományt $\Delta u \Delta v$ területű cellákra.

2^o A cellákban tetszőlegesen felveszünk (u',v') pontokat.

3^o Elkészítjük az $F(\Phi(u',v'))$ vektort.

4^o A cella (u,v) „sarokpontjához” tartozó $\Phi(u,v)$ ponthoz tartozik egy érintősík, amelynek normálvektora

$$\partial_u\Phi(u,v) \times \partial_v\Phi(u,v).$$

Mivel a $\Delta u \Delta v$ területű cellához tartozó felületelem területe

$$\Delta S \approx \|\partial_u\Phi(u,v)\Delta u \times \partial_v\Phi(u,v)\Delta v\| = \|\partial_u\Phi(u,v) \times \partial_v\Phi(u,v)\| \Delta u \Delta v,$$

ezért a

$$\underline{\Delta S} := (\partial_u\Phi(u,v) \times \partial_v\Phi(u,v)) \Delta u \Delta v$$

vektort **felszínvektor**nak nevezzük. (A $\underline{\Delta S}$ hossza éppen a felületelem területe, és iránya a felületre merőleges, $\dot{p}(u)$, $\dot{q}(v)$ vektorokkal jobbsodrású rendszert alkot.)

5^o Elkészítjük a

$$\sum_u \sum_v \langle F(\Phi(u',v')), \underline{\Delta S} \rangle$$

skaláris szorzatok összegét. Ez egy integrálközelítő összeg.

6^o Az F vektorértékű függvény Φ felületre vett integrálján a közelítőösszegek határértékét értjük:

$$\begin{aligned}\int_\Phi F &:= \lim_{\Delta u\to 0, \Delta v \to 0} \sum_u \sum_v \langle F(\Phi(u',v')), \partial_u\Phi(u,v) \times \partial_v\Phi(u,v) \rangle \Delta u \Delta v = \\ &= \int_\Omega \langle F(\Phi(u,v)), \partial_u\Phi(u,v) \times \partial_v\Phi(u,v) \rangle \mathrm{d}u\mathrm{d}v. \qquad (15.1)\end{aligned}$$

15.1.3. A nabla

A nabla egy jelképes vektor, amely az x szerinti, az y szerinti és a z szerinti parciális deriválásra ad utasítást. Jele ∇. Vektorként is használható, skaláris és vektoriális szorzatok egyik tényezője is lehet.

$$\nabla := \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix}$$

Ha $f : \mathbb{R}^3 \supset\!\!\to \mathbb{R}$ sima függvény, akkor

$$\mathrm{grad} f = \nabla f = \begin{bmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{bmatrix}.$$

(Itt az f úgy viselkedik, mint egy vektor számszorzója, csak a szokástól eltérően most a vektor mögött helyezkedik el.)
Ha $f : \mathbb{R}^3 \supset\!\!\to \mathbb{R}^3$ sima függvény, akkor az $f'(x,y,z) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ deriváltmátrix főátlójában álló elemek összege legyen a

$$\mathrm{div} f(x,y,z) = \partial_x f_1(x,y,z) + \partial_y f_2(x,y,z) + \partial_z f_3(x,y,z).$$

Az f **divergenciája** a ∇ vektorral:

$$\mathrm{div} f = \langle \nabla, f \rangle$$

(a nabla és az f vektor skaláris szorzata).
Ha $f : \mathbb{R}^3 \supset\!\!\to \mathbb{R}^3$ sima függvény, akkor az $f'(x,y,z) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ deriváltmátrix főátlóra szimmetrikusan elhelyezkedő elemei különbségeiből álló vektort az f **rotációjá**nak nevezzük, és

$$\mathrm{rot} f(x,y,z) := \begin{bmatrix} \partial_y f_3(x,y,z) - \partial_z f_2(x,y,z) \\ \partial_z f_1(x,y,z) - \partial_x f_3(x,y,z) \\ \partial_x f_2(x,y,z) - \partial_y f_1(x,y,z) \end{bmatrix}.$$

Az f rotációja a ∇ vektorral:

$$\mathrm{rot} f = \nabla \times f$$

(a nabla és az f vektor vektoriális szorzata).

A $\mathrm{grad} f$ jelentését az iránymenti derivált kapcsán derítettük fel, a $\mathrm{rot} f$ a vonalintegrál témakörében, a potenciál létezésének elégséges feltételénél került már elő. (A $\mathrm{div} f$ hamarosan megjelenik.) Látható, hogy a grad, div és rot egy-egy differenciálási utasítás, amely a ∇ segítségével áttekinthetővé válik.

A ∇ valóban úgy viselkedik, mint egy vektor. Például $f : \mathbb{R}^3 \supset\!\!\to \mathbb{R}$ elég sima függvény esetén

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad} f) = \nabla \times (\nabla f) = 0,$$

hiszen ∇ és ∇f „párhuzamosak”. (A deriválások hosszadalmas elvégzése után is ezt kapnánk.)
Megemlítjük, hogy a ∇ sajátmagával vett skaláris szorzata a Laplace-operátor:

$$\triangle := \langle \nabla, \nabla \rangle,$$

azaz ha $f : \mathbb{R}^3 \supset\!\!\!\to \mathbb{R}$ elég sima skalárfüggvény, akkor a

$$\triangle f := \mathrm{div}(\mathrm{grad} f) = \partial^2_{xx} f + \partial^2_{yy} f + \partial^2_{zz} f$$

a „Laplace f”.

15.1.4. Integrálátalakító tételek

A valós-valós függvényekre vonatkozó Newton–Leibniz-formulát fogjuk most általánosítani. Ennek a tételnek egyik következménye, hogy ha $f : \mathbb{R} \supset\!\!\!\to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, akkor

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a),$$

amit úgy értelmezhetünk, hogy az f függvény deriváltjának az $[a, b]$ halmazon vett integrálja az f függvénynek a halmaz határán való megváltozásával egyenlő.

Az egyik általánosítás a következő:
Legyen $\Phi : \mathbb{R}^2 \supset\!\!\!\to \mathbb{R}^3$ sima felület, melyet egy $r : \mathbb{R} \supset\!\!\!\to \mathbb{R}^3$ irányított görbe határol (a felszínvektorok irányából nézve az r görbe pozitív irányítású legyen).

15.1. Tétel. *(Stokes-tétel)*
Ha $F : \mathbb{R}^3 \supset\!\!\!\to \mathbb{R}^3$ sima vektorfüggvény, akkor

$$\int_\Phi \mathrm{rot} F = \int_r F,$$

azaz a $\mathrm{rot}F$ (az F függvényre alkalmaztunk egy differenciáloperátort) felületi integrálja egyenlő a felület határán az F vonalintegráljával.

A másik általánosítás a következő:
Legyen egy zárt, sima felület a $\Phi : \mathbb{R}^2 \supset\!\!\!\to \mathbb{R}^3$, amely egy $V \subset \mathbb{R}^3$ térrészt vesz körül (a felszínvektorokat „kifelé” irányítjuk).

15.2. Tétel. *(Gauss-tétel)*
Ha $F : \mathbb{R}^3 \supset\!\!\!\to \mathbb{R}^3$ sima vektorfüggvény, akkor

$$\int_V \mathrm{div} F = \int_\Phi F,$$

azaz a V térbeli tartományra integrálva a $\mathrm{div}F$ függvényt (egy másik differenciáloperátort alkalmaztunk az F függvényre), ez az integrál a térrész határán vett felületi integrálba megy át.

15.2. Feladatok

1. Legyen $r : [0, 6\pi] \to \mathbb{R}^3,\ r(t) := \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{bmatrix}$ egy csavarvonal. Számítsa ki a $t_0 := \frac{\pi}{2}$ paraméterértékhez tartozó

   a) kísérő triéder $\underline{t}, \underline{f}, \underline{b}$ vektorait,

   b) a $G(t_0)$ görbületet és az $R(t_0)$ simulókör sugarát,

   c) a $T(t_0)$ torziót.

   Számítsa ki a csavarvonal hosszát!

2. Legyen

$$\Phi : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3,\ \Phi(u, v) := \begin{bmatrix} 3 \sin v \cos u \\ 3 \sin v \sin u \\ 3 \cos v \end{bmatrix}$$

   egy gömbfelület. Írja fel az $(u_0, v_0) := (0, \frac{\pi}{2})$ paraméterértékekhez tartozó $p : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ p(u) := \Phi(u, \frac{\pi}{2})$ és a $q : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3,\ q(v) := \Phi(0, v)$ paramétervonalakat! (A Földgömbön mit jelentenének ezek?)
   Írja fel az $(u_0, v_0) := (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ paraméterértékekhez tartozó érintősík egyenletét! (Mekkora szöget zár be ez a sík az Egyenlítő síkjával?)

3. Az előbbi $\Phi(u, v)$ felületnek mekkora az

$$\Omega := \left\{ (u, v) \mid 0 \le u \le \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3} \le v \le \frac{\pi}{2} \right\}$$

   paramétertartományhoz tartozó felszíne?

4. Mutassuk meg, hogy az $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ sima függvény mint felület felszínét a

$$\int_c^d \left(\int_a^b \sqrt{1 + [\partial_x f(x, y)]^2 + [\partial_y f(x, y)]^2} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

   integrál adja!
   Megoldás: Legyen

$$\Phi : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}^3,\ \Phi(x, y) := \begin{bmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{bmatrix}$$

   a felület kétparaméteres előállítása.

$$\partial_x \Phi(x, y) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x f(x, y) \end{bmatrix}, \quad \partial_y \Phi(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y f(x, y) \end{bmatrix}$$

$$\|\partial_x\Phi(x,y)\|^2 = 1+[\partial_x f(x,y)]^2, \quad \|\partial_y\Phi(x,y)\|^2 = 1+[\partial_y f(x,y)]^2,$$
$$(\langle\partial_x\Phi(x,y),\partial_y\Phi(x,y)\rangle)^2 = (\partial_x f(x,y)\cdot\partial_y f(x,y))^2,$$
$$\|\partial_x\Phi\|^2\cdot\|\partial_y\Phi\|^2-\langle\partial_x\Phi,\partial_y\Phi\rangle^2 = 1+(\partial_x f)^2+(\partial_y f)^2.$$

Ebből már következik az állítás.

5. Legyen $\Phi : [0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}^3$, $\Phi(u,v) := \begin{bmatrix} u+v \\ u-v \\ u \end{bmatrix}$, és $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $U(x,y,z) := x+y+z$. Számítsa ki az $\int_\Phi U$ felszíni integrált!

6. Legyen
$$\Phi : [0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}^3, \quad \Phi(u,v) := \begin{bmatrix} u+v \\ u-v \\ u \end{bmatrix},$$
és
$$F : \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, \quad F(x,y,z) := \begin{bmatrix} y \\ x \\ z \end{bmatrix}.$$
Számítsa ki az $\int_\Phi F$ felületi integrált!

7. Legyen
$$\Phi : [0,2\pi]\times[0,\pi/2]\to\mathbb{R}^3,\ \Phi(u,v) := \begin{bmatrix} \cos v\cos u \\ \cos v\sin u \\ \sin v \end{bmatrix}$$
egy „felső félgömb”, és határoló görbéje
$$r : [0,2\pi]\to\mathbb{R}^3,\ r(t) := \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{bmatrix}.$$
Legyen $F : \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $F(x,y,z) := \begin{bmatrix} x^2y \\ yz \\ z \end{bmatrix}$ egy vektorfüggvény. Ellenőrizzük a Stokes-tételt!

Megoldás:

$$\mathrm{rot}F(x,y,z) = \nabla\times F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x^2 & yz & z \end{vmatrix} = \underline{i}(0-y)-\underline{j}(0-0)+\underline{k}(0-x^2),$$

tehát $\mathrm{rot}F(x,y,z) = \begin{bmatrix} -y \\ 0 \\ -x^2 \end{bmatrix}$, $\mathrm{rot}F(\Phi(u,v)) = \begin{bmatrix} -\cos v\sin u \\ 0 \\ -(\cos v\cos u)^2 \end{bmatrix}$.

$$\partial_u\Phi(u,v) = \begin{bmatrix} -\cos v\sin u \\ \cos v\cos u \\ 0 \end{bmatrix},\ \partial_v\Phi(u,v) = \begin{bmatrix} -\sin v\cos u \\ -\sin v\sin u \\ \cos v \end{bmatrix}$$

$$\partial_u\Phi(u,v)\times\partial_v\Phi(u,v)=\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -\cos v\sin u & \cos v\cos u & 0 \\ -\sin v\cos u & -\sin v\sin u & \cos v \end{vmatrix}=$$
$$=\underline{i}(\cos^2 v\cos u)-\underline{j}(-\cos^2 v\sin u)+\underline{k}(\cos v\sin v\sin^2 u+\cos v\sin v\cos^2 u)=$$
$$=\begin{bmatrix} \cos^2 v\cos u \\ \cos^2 v\sin u \\ \cos v\sin v \end{bmatrix},$$

és ezek „kifelé néző” vektorok.
A Stokes-tétel bal oldala:

$$\begin{aligned}\int_\Phi \mathrm{rot}F &= \int_{[0,2\pi]\times[0,\pi/2]}\langle \mathrm{rot}F(\Phi(u,v)),\partial_u\Phi(u,v)\times\partial_v\Phi(u,v)\rangle \mathrm{d}u\mathrm{d}v= \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\left\langle\begin{bmatrix} -\cos v\sin u \\ 0 \\ -\cos^2 v\cos^2 u\end{bmatrix},\begin{bmatrix} \cos^2 v\cos u \\ \cos^2 v\sin u \\ \cos v\sin v\end{bmatrix}\right\rangle \mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u= \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2}(-\cos^3 v\sin u\cos u-\cos^3 v\sin v\cos^2 u)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Mivel

$$\begin{aligned}\int -\cos^3 v\mathrm{d}v &= -\int\cos v(1-\sin^2 v)\mathrm{d}v=-\int\cos v\mathrm{d}v+\int\sin^2 v\cos v\mathrm{d}v= \\ &= -\sin v+\frac{\sin^3 v}{3},\end{aligned}$$

ezért

$$\int_0^{\pi/2} -\cos^3 v\mathrm{d}v=\left[-\sin v+\frac{\sin^3 v}{3}\right]_0^{\pi/2}=-\frac{2}{3}.$$

Másrészt

$$\int_0^{\pi/2}\cos^3 v(-\sin v)\mathrm{d}v=\left[\frac{\cos^4 v}{4}\right]_0^{\pi/2}=-\frac{1}{4}.$$

Ezeket felhaszálva

$$\begin{aligned}\int_\Phi \mathrm{rot}F &= \int_0^{2\pi}\sin u\cos u\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+\cos^2 u\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}u \\ &= -\frac{2}{3}\left[\frac{\sin^2 u}{2}\right]_0^{2\pi}-\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2u}{2}\mathrm{d}u= \\ &= 0-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}u+\frac{\sin 2u}{4}\right]_0^{2\pi}=-\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

A Stokes-tétel jobb oldala egy vonalintegrál:

$$\begin{aligned}\int_r F &= \int_0^{2\pi} \langle F(r(t)), \dot{r}(t)\rangle \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{bmatrix} \cos^2 t \sin t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t = \\ &= \int_0^{2\pi} -\cos^2 t \sin^2 t \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} -\frac{\sin^2 2t}{4} \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} -\frac{1-\cos 4t}{8} \mathrm{d}t = \\ &= \left[-\frac{1}{8}t + \frac{\sin 4t}{32} \right]_0^{2\pi} = -\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Tehát ebben a példában

$$\int_\Phi \mathrm{rot} F = \int_r F = -\frac{\pi}{4}.$$

8. Legyen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ F(x,y,z) := \begin{bmatrix} x^2 y \\ yz \\ z \end{bmatrix}$ vektorfüggvény.

Legyen

$$V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}$$

egy origó középpontú, R sugarú gömb, melyet a

$$\Phi : [0,2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^3,\ \Phi(u,v) := \begin{bmatrix} R\cos v \cos u \\ R \cos v \sin u \\ R \sin v \end{bmatrix}$$

felület határol. Ellenőrizzük a Gauss-tételt!

Megoldás:

$$\mathrm{div} F(x,y,z) = \langle \nabla, F\rangle(x,y,z) = \partial_x(x^2 y) + \partial_y(yz) + \partial_z(z) = 2xy + z + 1.$$

A Gauss-tétel bal oldala:

$$\int_V \mathrm{div} F = \int_V (2xy + z + 1) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Az integrál kiszámításához célszerű egy polártranszformációt alkalmazni. Legyen

$$\Psi : [0,2\pi] \times [\pi/2, \pi/2] \times [0,R] \to \mathbb{R}^3,\ \Psi(u,v,r) := \begin{bmatrix} r\cos v \cos u \\ r \cos v \sin u \\ r \sin v \end{bmatrix}.$$

A Ψ bijekció a $T := [0,2\pi] \times [\pi/2, \pi/2] \times [0,R]$ és a V gömb között. Számítsuk ki a helyettesítő függvény deriváltjának determinánsát:

$$\begin{aligned}\det \Psi'(u,v) &= \begin{vmatrix} -r\cos v \sin u & -r \sin v \cos u & \cos v \cos u \\ r \cos v \cos u & -r \sin v \sin u & \cos v \sin u \\ 0 & r \cos v & \sin v \end{vmatrix} = \\ &= -r\cos v(-r\cos^2 v \sin^2 u - r\cos^2 v \cos^2 u) + \\ &\quad + \sin v(r^2 \cos v \sin v \sin^2 u + r^2 \cos v \sin v \cos^2 u) = \\ &= r^2 \cos v.\end{aligned}$$

Mivel $v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, ezért $|\det \Psi'(u,v)| = r^2 \cos v$. Ezt felhasználva

$$\int_V (2xy + z + 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^R (2(r\cos v\cos u)(r\cos v\sin u) + r\sin v + 1)r^2\cos v\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u =$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^R (2r^4\cos^3 v\cos u\sin u + r^3\sin v\cos v + r^2\cos v)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u =$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{2}{5}R^5\cos^3 v\cos u\sin u + \frac{1}{4}R^4\sin v\cos v + \frac{1}{3}R^3\cos v\right)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u.$$

A 7. feladatból

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3 v\mathrm{d}v = \left[\sin v - \frac{\sin^3 v}{3}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4}{3}.$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin v\cos v\mathrm{d}v = \left[\frac{\sin^2 v}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0, \quad \text{és} \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos v\mathrm{d}v = 2.$$

Így az integrálást folytatva:

$$\int_0^{2\pi}\left[\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{5}R^5\cos u\sin u + \frac{1}{4}R^4 + \frac{2}{3}R^3\right]\mathrm{d}u = \frac{8}{15}R^5\left[\frac{\sin^2 u}{2}\right]_0^{2\pi} + \frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{4\pi}{3}R^3.$$

A Gauss-tétel jobb oldala egy felületi integrál:

$$\int_\Phi F = \int_{[0,2\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\langle F(\Phi(u,v)), \partial_u\Phi(u,v)\times\partial_v\Phi(u,v)\rangle\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

$$\partial_u\Phi(u,v) = \begin{bmatrix} -R\cos v\sin u \\ R\cos v\cos u \\ 0\end{bmatrix}, \quad \partial_v\Phi(u,v) = \begin{bmatrix} -R\sin v\cos u \\ -R\sin v\sin u \\ R\cos v\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\partial_u\Phi(u,v)\times\partial_v\Phi(u,v) &= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -R\cos v\sin u & R\cos v\cos u & 0 \\ -R\sin v\cos u & -R\sin v\sin u & R\cos v\end{vmatrix} = \\
&= \underline{i}(R^2\cos^2 v\cos u) - \underline{j}(-R^2\cos^2 v\sin u) + \\
&\quad +\underline{k}(R^2\cos v\sin v\sin^2 u + R^2\cos v\sin v\cos^2 u) = \\
&= \begin{bmatrix} R^2\cos^2 v\cos u \\ R^2\cos^2 v\sin u \\ R^2\cos v\sin v\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

$$F(\Phi(u,v)) = \begin{bmatrix} (R\cos v\cos u)^2(R\cos v\sin u) \\ (R\cos v\sin u)(R\sin v) \\ R\sin v\end{bmatrix}.$$

Ezekkel a függvényekkel

$$\int_\Phi F = \int_{[0,2\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \left\langle \begin{bmatrix} R^3\cos^3 v\cos^2 u\sin u \\ R^2\cos v\sin v\sin u \\ R\sin v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} R^2\cos^2 v\cos u \\ R^2\cos^2 v\sin u \\ R^2\cos v\sin v \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}u\mathrm{d}v =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (R^5\cos^5 v\cos^3 u\sin u + R^4\cos^3 v\sin v\sin^2 u + R^3\sin^2 v\cos v)\mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u.$$

Kiszámítjuk az egyes tagok integrálját.

$$\int \cos^5 v\mathrm{d}v = \int (1-\sin^2 v)\cos^3 v\mathrm{d}v = \int \cos^3 v\mathrm{d}v - \int \cos^3 v\sin^2 v\mathrm{d}v.$$

A 7. feladatból $\int \cos^3 v\mathrm{d}v = \sin v - \frac{\sin^3 v}{3}$.

$$\begin{aligned} \int \cos^3 v\sin^2 v\mathrm{d}v &= \int (\cos^3 v\sin v)\sin v\mathrm{d}v = -\frac{\cos^4 v}{4}\sin v - \int -\frac{\cos^4 v}{4}\cos v\mathrm{d}v = \\ &= -\frac{1}{4}\cos^4 v\sin v + \frac{1}{4}\int \cos^5 v\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

A kapott eredményt beírva, rendezés után azt kapjuk, hogy

$$\int \cos^5 v\mathrm{d}v = \sin v - \frac{\sin^3 v}{3} + \frac{1}{4}\cos^4 v\sin v - \frac{1}{4}\int \cos^5 v\mathrm{d}v,$$

$$\frac{5}{4}\int \cos^5 v\mathrm{d}v = \sin v - \frac{\sin^3 v}{3} + \frac{1}{4}\cos^4 v\sin v,$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^5 v\mathrm{d}v = \frac{4}{5}\left[\sin v - \frac{\sin^3 v}{3} + \frac{1}{4}\cos^4 v\sin v\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{3} = \frac{16}{15}.$$

Ezzel az eredménnyel

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (R^5\cos^5 v\cos^3 u\sin u + R^4\cos^3 v\sin v\sin^2 u + R^3\sin^2 v\cos v)\mathrm{d}v =$$

$$= \frac{16}{15}R^5\cos^3 u\sin u + R^4\sin^2 u\left[-\frac{\cos^4 v}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + R^3\left[\frac{\sin^3 v}{3}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{16}{15}R^5\cos^3 u\sin u + \frac{2}{3}R^3.$$

Végül

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{16}{15}R^5\cos^3 u\sin u + \frac{2}{3}R^3\right)\mathrm{d}u = \left[\frac{16}{15}R^5\left(-\frac{\cos^4 u}{4}\right) + \frac{2}{3}R^3 u\right]_0^{2\pi} = \frac{4\pi}{3}R^3.$$

Tehát

$$\int_V \mathrm{div}F = \int_\Phi F = \frac{4\pi}{3}R^3.$$