Egyváltozós analízis 1, kiegészítő példatár

Gémes Margit, Szentmiklóssy Zoltán

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Matematikai Intézet

2015. november 1.

Tartalomjegyzék

Feladatok

Van-e olyan függvény, amelyikre teljesül, hogy

1.1. $D(f) = (0,1)$ és $R(f) = [0,1]$?

1.2. $D(f) = [0,1]$ és $R(f) = (0,1)$?

Injektívek-e a következő függvények?

1.3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$

1.4. $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x}$

1.5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad f(x) = 2^x$

1.6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - x$

1.7. $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad D(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

1.8. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ -x, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Bijektívek-e a következő függvények?

1.9. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = x^2$

1.10. $f_2 : \mathbb{R} \to [0,\infty), \quad f_2(x) = x^2$

1.11. $g_1 : [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad g_1(x) = x^3$

1.12. $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g_1(x) = x^3$

Bizonyítsuk be a folytonosság definíciója alapján (azaz keressünk a folytonosság definíciójában szereplő ε-hoz „jó” δ-t), hogy a következő függvények folytonosak az adott a pontokban!

1.13. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}, \quad a = -3$

1.14. $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad a = 3$

1.15. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad a = -5$

1.16. $f(x) = \dfrac{1}{x+6}, \quad a = 7$

1.17. $f(x) = x^2 + x, \quad a = -2$

1.18. $f(x) = 1 - x, \quad a = 5$

Írjuk fel a függvényértékek $y_n = f(x_n)$ sorozatát az adott f függvények és (x_n) sorozatok esetén!

1.19. $f(x) = x^2, \quad x_n = n$

1.20. $f(x) = x^2, \quad x_n = -\dfrac{1}{n}$

1.21. $f(x) = \sin x, \quad x_n = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$

1.22. $f(x) = \cos x, \quad x_n = n\pi$

1.23. $f(x) = x\cos x, \quad x_n = n\pi$

1.24. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad x_n = n$

1.25. $f(x) = \operatorname{sgn} x, \quad x_n = \dfrac{1}{n}$

1.26. $f(x) = [x], \quad x_n = 3 - \dfrac{1}{n}$

1.27. $f(x) = \{x\}, \quad x_n = \begin{cases} n, & \text{ha } n \text{ páros} \\ n + \dfrac{1}{2}, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$

Adjunk meg olyan (x_n) sorozatokat, amelyek (a) 0-hoz, (b) ∞-hez, (c) $-\infty$-hez tartanak! Számítsuk ki az $y_n = f(x_n)$ sorozatok határértékét az adott függvények esetén!

1.28. $f(x) = x^2$

1.29. $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

1.30. $f(x) = |x|$

1.31. $f(x) = x^3$

Adjunk meg olyan (a_n) és (b_k) sorozatokat, amelyek 0-hoz tartanak! Számítsuk ki az $y_n = f(a_n)$ és $z_k = f(b_k)$ sorozatok határértékét az adott függvények esetén! Melyik függvények esetében tudunk olyan (a_n) és (b_k) sorozatokat megadni, hogy az y_n és az z_k sorozatok határértéke ne egyezzen meg?

1.32. $f(x) = x^2$

1.33. $f(x) = \operatorname{sgn} x$

1.34. $f(x) = [x]$

1.35. $f(x) = \{x\}$

1.36. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

1.37. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

1.38. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x^2, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$

Adjunk meg olyan (a_n) és (b_k) sorozatokat, amelyek ∞-hez tartanak! Számítsuk ki az $y_n = f(a_n)$ és $z_k = f(b_k)$ sorozatok határértékét az adott függvények esetén! Melyik függvények esetében tudunk olyan (a_n) és (b_k) sorozatokat megadni, hogy az y_n és az z_k sorozatok határértéke ne egyezzen meg?

1.39. $f(x) = x^2$

1.40. $f(x) = \sin x$

1.41. $f(x) = [x]$

1.42. $f(x) = \{x\}$

1.43. $f(x) = \cos x$

1.44. $f(x) = D(x)$

Bizonyítsuk be, hogy a következő határértékek nem léteznek!

1.45. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sin x$

1.46. $\lim\limits_{x\to-\infty} \{x\}$

1.47. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x-3}$

1.48. $\lim\limits_{x\to 4} [x]$

1.49. Melyik állításból következik a másik?

P: $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right) = 5$ **Q:** $f(0) = 5$

1.50. Tegyük fel, hogy az f függvény folytonos $x = 3$-ban, továbbá $f(3) = 5$. Melyik állítás következik ebből?

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} f(3 + \dfrac{1}{n}) = 5$ **(b)** $\lim\limits_{n\to\infty} f(5 + \dfrac{1}{n}) = 3$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} f(3 - \dfrac{1}{n}) = 5$ **(d)** $\lim\limits_{n\to\infty} f(\dfrac{1}{n} - 3) = 5$

1.51. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos $x = 3$-ban, és $f(3) = 7$. Számítsuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{9n^6 - 21}{3n^6 + 6}\right)$ határértéket!

1.52. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos. Következik-e ebből, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{2n^6 + 3n^2}{4n^6 - 6}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{8n^6 - 21}{16n^6 + 6n}\right)$?

1.53. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, és $f(0)=3$.
Következik-e ebből, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{2n^3}{4n^6+6n}\right)=3$?

1.54. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, és $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=3$.
Következik-e ebből, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{2n^3+3n^2-21}{4n^6+6}\right)=3$?

1.55. Tegyük fel, hogy az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény folytonos, továbbá $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{6n^4-3n+2}{3n^4+\sqrt{n}+6}\right)=5$.

(a) Van-e olyan hely, ahol meg tudjuk mondani f helyettesítési értékét?

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{8n^6+3n^2-21}{4n^6+6}\right)=?$.

1.56. Tegyük fel, hogy a mindenütt értelmezett f függvényre teljesül, hogy $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=6$. Igaz-e ekkor, hogy ha egy (x_n) sorozat 5-höz tart, akkor az $(f(x_n))$ sorozat határértéke 6?

Igazak-e a következő állítások, ha a feladatokban szereplő f függvény mindenütt értelmezve van? Ha egy állítás nem igaz, mutassunk ellenpéldát, ha igaz bizonyítsuk!

1.57. Ha az f függvény folytonos az x_0 pontban, és az (x_n) sorozat határértéke x_0, akkor az $(f(x_n))$ sorozat határértéke $f(x_0)$.

1.58. Ha az (x_n) sorozat határértéke x_0, és $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$, akkor $f(x_0)=A$.

1.59. Ha van olyan x_0-hoz tartó (x_n) sorozat, amelyikre teljesül, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$, akkor az f függvény folytonos az x_0 pontban.

1.60. Ha minden x_0-hoz tartó (x_n) sorozatra teljesül, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$, akkor az f függvény folytonos az x_0 pontban.

1.61. Ha minden x_0-hoz tartó (x_n) sorozatra teljesül, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$, akkor $f(x_0)=A$.

Igazak-e a következő állítások? Minden választ indokoljunk!

1.62. Ha az f függvény folytonos az a pontban, akkor f balról is, és jobbról is folytonos a-ban.

1.63. Ha az f függvény balról is, és jobbról is folytonos az a pontban, akkor f folytonos az a-ban.

1.64. Ha az f függvény nem folytonos az a pontban, akkor f balról sem, és jobbról sem folytonos a-ban.

1.65. Ha az f függvény nem folytonos az a pontban, akkor f balról vagy jobbról nem folytonos a-ban.

1.66. Ha f értelmezve van az a pont egy környezetében, akkor f balról vagy jobbról folytonos a-ban.

1.67. Bizonyítsuk be a függvények határértékének definíciói alapján, hogy

(a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{8x+4}{x+4} = 4$ **(b)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-7}{(x-3)^2} = -\infty$

Mondjuk ki a megfelelő határérték definícióját minden feladatnál, majd a definíció alapján bizonyítsuk be a határértéket!

1.68. $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+2) = 11$

1.69. $\lim\limits_{x\to 3+0}[x] = 3$

1.70. $\lim\limits_{x\to 3-0}\{x\} = 1$

1.71. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{(x-3)^2} = \infty$

1.72. $\lim\limits_{x\to 3+0} \dfrac{1}{x-3} = \infty$

1.73. $\lim\limits_{x\to 3-0} \dfrac{x}{3-x} = \infty$

1.74. $\lim\limits_{x\to 3} -\dfrac{1}{(x-3)^2} = -\infty$

1.75. $\lim\limits_{x\to 3+0} \dfrac{x}{3-x} = -\infty$

1.76. $\lim\limits_{x\to 3-0} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$

1.77. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{12x^4+2x+1}{3x^4-x^3+3} = 4$

1.78. $\lim\limits_{x\to \infty}(x^2+1) = \infty$

1.79. $\lim\limits_{x\to \infty}(-\sqrt{x}) = -\infty$

1.80. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{6x^3+1}{2x^3+3} = 3$

1.81. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{12x^6+1}{3x^4+3} = \infty$

1.82. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{12x^4+1}{3x^3-x^2+3} = -\infty$

1.83. Az $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekre teljesül, hogy $f(x) = g(x)$, ha $x \neq 3$, és $f(3) \neq g(3)$. Lehet-e mindkét függvénynek határértéke az $x = 3$ pontban? Ha igen, megegyezhet-e a két függvény határértéke $x = 3$-ban? Lehet-e mindkét függvény folytonos 3-ban?

1.84. Az $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekre teljesül, hogy $f(x) \neq g(x)$, ha $x \neq 3$, és $f(3) = g(3)$. Lehet-e mindkét függvénynek határértéke az $x = 3$ pontban? Ha igen, megegyezhet-e a két függvény határértéke $x = 3$-ban? Lehet-e mindkét függvény folytonos 3-ban?

1.85. Az $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények helyettesítési értékei egyetlen pontban sem egyeznek meg, azaz $(\forall x) f(x) \neq g(x)$. Lehet-e mindkét függvénynek határértéke az $x = 3$ pontban? Ha igen, megegyezhet-e a két függvény határértéke $x = 3$-ban? Lehet-e mindkét függvény folytonos 3-ban?

1.86. Korlátos-e a számegyenesen az $\{x\} \cdot x$ függvény? Igaz-e, hogy $\lim\limits_{x\to\infty} \{x\} \cdot x = \infty$?

Számítsuk ki a következő függvények határértékét végtelenben és mínusz végtelenben, ha léteznek!

1.87. $\dfrac{2^x + 3^{-x} + x^2}{x^{1000} + x^{100} + 1}$

1.88. $\dfrac{-7^x + 3^{-x} + x^{200}}{x^{1000} + 5^x}$

1.89. $\dfrac{\{x\}}{x}$

1.90. $x \cdot \left\{\dfrac{1}{x}\right\}$

1.91. $\dfrac{[x]}{x}$

1.92. $x \cdot \left[\dfrac{1}{x}\right]$

1.93. Tegyük fel, hogy a mindenütt értelmezett f és g függvényekre teljesül, hogy $\lim\limits_{x\to5} g(x) = 6$, és $\lim\limits_{x\to6} f(x) = 7$. Következik-e ebből, hogy $\lim\limits_{x\to5} f(g(x)) = 7$?

1.94. Tegyük fel, hogy a mindenütt értelmezett f és g függvények csak pozitív értékeket vesznek fel. Melyik állításból következik a másik?

P: $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) + g(x)) = \infty$

Q: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)g(x) = \infty$

Számítsuk ki a következő határértékeket!

1.95. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^x$

1.96. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \dfrac{2}{x}\right)^x$

1.97. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2x}\right)^x$

1.98. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{2x}\right)^x$

1.99. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{5}$

1.100. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[2x]{5}$

1.101. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{5^x + 2\cdot 7^x}$

1.102. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{2\cdot 7^x - 5^x}$

1.103. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x}{x^{100}}$

1.104. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^{x+100}}{3^x}$

1.105. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^{x+100}+5^x}{x^{100}+3^{2x}}$

1.106. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5^x}{9\cdot x^{100}}$

1.107. Legyen $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \\ 2x, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$. Van-e olyan intervallum, ahol f monoton nő? Van-e olyan pont, ahol f lokálisan nő?

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mindenütt differenciálható függvény. Határozzuk meg, hogy melyik állításból következik a másik!

1.108. **P:** $f'(3) = 0$ **Q:** f-nek 3-ban lokális szélsőértéke van.

1.109. **P:** $f'(3) \geq 0$ **Q:** Az f függvény 3-ban lokálisan nő.

1.110. **P:** $f'(3) > 0$ **Q:** Az f függvény 3-ban szigorúan lokálisan nő.

1.111. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mindenütt differenciálható függvény. Határozzuk meg, hogy melyik állításból következik a másik!

P: f-nek 3-ban lokális maximuma van. **Q:** f-nek 3-ban abszolút maximuma van.

1.112. Legyen $f : [3,5] \to \mathbb{R}$ folytonos a $[3,5]$ intervallumon, és differenciálható a $(3,5)$ intervallumon. Lehet-e f-nek 3-ban abszolút maximuma? Lehet-e f-nek 3-ban lokális maximuma?

Legyen $f : [3,5] \to \mathbb{R}$ folytonos a $[3,5]$ intervallumon, és differenciálható a $(3,5)$ intervallumon. Lehet-e, hogy

1.113. f abszolút minimum helye egyben lokális minimum hely is?

1.114. f abszolút minimum helye egyetlen lokális minimum hellyel sem esik egybe?

1.115. f-nek egyáltalán nincs lokális minimuma?

1.116. f-nek egyáltalán nincs abszolút minimuma?

1.117. Bizonyítsuk be, hogy ha a p polinom minden gyöke valós, akkor a p' polinom minden gyöke is valós!

1.118. Pisti egy 100m sugarú kör alakú tó partján áll, és át akar jutni az átellenes pontra. Úszik egy húr mentén, majd onnan gyalog megy. Milyen irányban indulva ér át a leghamarabb, ha $1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ sebességgel úszik és $2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ sebességgel gyalogol?

1.119. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Igaz-e, hogy ha $(\exists a < b)$ úgy, hogy az $(a, f(a))$ és a $(b, f(b))$ pontokon átmenő húr vízszintes, akkor $(\exists c)\ f'(c) = 0$?

1.120. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Igaz-e, hogy ha $(\exists c)\ f'(c) = 0$, akkor $(\exists a < b)$ úgy, hogy az $(a, f(a))$ és a $(b, f(b))$ pontokon átmenő húr vízszintes?

Határozzuk meg a következő határértékeket!

1.121. $\lim\limits_{x\to\infty} (\operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg} x)$

1.122. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

1.123. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt[7]{x+1} - \sqrt[7]{x})$

1.124. $\lim\limits_{x\to\infty} (\log(x+1) - \log x)$

1.125. Bizonyítsuk be, hogy $(\forall x, y \in \mathbb{R})$ $\left|\dfrac{\sin x - \sin y}{x - y}\right| \le 1.$

1.126. Bizonyítsuk be, hogy $x > 0$ esetén $x - \dfrac{x^3}{6} \le \sin x \le x.$

1.127. Adjuk meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényt, amelyre igaz, hogy $(\forall x \in \mathbb{R})\ f'(x) = f(x)$.

Jelölje $H_c(a_1, \ldots, a_n)$ a pozitív $a_1, \ldots, a_n$ számok c-edik hatványközepét. Bizonyítsuk be, hogy

1.128. $\min\limits_i a_i \le H_c(a_1, \ldots, a_n) \le \max\limits_i a_i,$

1.129. $\lim\limits_{c\to-\infty} H_c(a_1,\dots,a_n) = \min\limits_i a_i,$

1.130. $\lim\limits_{c\to\infty} H_c(a_1,\dots,a_n) = \max\limits_i a_i,$

1.131. $\lim\limits_{c\to 0} H_c(a_1,\dots,a_n) = \sqrt[n]{a_1\cdots a_n}.$

Határozzuk meg a következő határértékeket, ha léteznek!

1.132. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}$

1.133. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{xe^{\sin x}}{\log x}$

Adjunk példát olyan $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényekre, ha léteznek, amelyek teljesítik a következő feladatok feltételeit!

1.134. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 1$ és $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} \neq 1$

1.135. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ és $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \neq 1$

1.136. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ és $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$

1.137. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 1$ és $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$

Megoldások

Feladatok

1.13. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Olyan δ-t keresünk, amelyre teljesül, hogy ha $|x-(-3)| = |x+3| < \delta$, akkor $\left|\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(-3)^2+1}\right| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(-3)^2+1}\right| = \left|\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{10}\right| = \left|\frac{10-(x^2+1)}{10(x^2+1)}\right| = \left|\frac{9-x^2}{10(x^2+1)}\right| =$$
$$= \left|\frac{(3+x)(3-x)}{10(x^2+1)}\right| = \frac{|3-x|\,|3+x|}{10(x^2+1)} < \frac{7}{10}\,|x+3|\,,$$

ha $\delta < 1$, vagyis $-4 < x < -2$. Ebből $\left|\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(-3)^2+1}\right| < \varepsilon$, ha $|x+3| < \min\left(1, \frac{10}{7}\varepsilon\right)$, tehát a $\delta = \min\left(1, \frac{10}{7}\varepsilon\right)$ választás jó lesz.

1.14. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Olyan δ-t keresünk, amelyre teljesül, hogy ha $|x-3| < \delta$, akkor $\left|\sqrt{x+1} - \sqrt{3+1}\right| = \left|\sqrt{x+1} - 2\right| < \varepsilon$.

$$\left|\sqrt{x+1} - 2\right| = \left|\frac{(x+1)-4}{\sqrt{x+1}+2}\right| = \frac{|x-3|}{\sqrt{x+1}+2} < \frac{|x-3|}{3},$$

ha $x > 0$, tehát $\left|\sqrt{x+1} - 2\right| < \frac{|x-3|}{3} < \varepsilon$, ha $|x-3| < \min(3, 3\varepsilon)$, így a $\delta = \min(3, 3\varepsilon)$ jó megoldás.

1.22. $y_n = \cos(n\pi) = \begin{cases} 1, & \text{ha } n \text{ páros} \\ -1, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$, azaz $y_n = (-1)^n$.

1.26. $y_n = \left[3 - \frac{1}{n}\right] = 2$

1.33. $a_n = -\frac{1}{n} \to 0$, ekkor $y_n = \operatorname{sgn} \frac{1}{n} = 1 \to 1$.

$b_k = \frac{1}{k} \to 0$, ekkor $z_k = \operatorname{sgn}\left(-\frac{1}{k}\right) = -1 \to -1$.

1.37. Legyen $a_n = \dfrac{1}{n} \to 0$, ekkor $y_n = n^2 \to \infty$.
Legyen $k_k = -\dfrac{1}{k} \to 0$, ekkor $z_k = k^2 \to \infty$

Mivel $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$, a határértékre vonatkozó átviteli elv miatt minden $x_n \to 0$ sorozat esetén $\lim\limits_{x\to 0} f(x_n) = \infty$.

1.39. Legyen $a_n = n \to \infty$, ekkor $y_n = n^2 \to \infty$.
Legyen $b_k = \sqrt{k} \to \infty$, ekkor $z_k = \left(\sqrt{k}\right)^2 = k \to \infty$.

Mivel $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$, ezért a határértékre vonatkozó átviteli elv miatt minden végtelenhez tartó x_n sorozat esetén az $y_n = f(x_n)$ sorozat is végtelenhez tart.

1.43. Legyen $a_n = n \cdot 2\pi \to \infty$, ekkor $y_n = \cos(2n\pi) = 1 \to 1$.
Legyen $b_k = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \to \infty$, ekkor $z_k = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right) = 0 \to 0$.

1.51. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{9n^6 - 21}{3n^6 + 6} = 3$, ezért a folytonosságra vonatkozó átviteli elv miatt

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{9n^6 - 21}{3n^6 + 6}\right) = f(3) = 7.$$

1.76. Azt mondjuk, hogy $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x) = -\infty$, ha f értelmezve van valamilyen $(3-\eta, 3)$ intervallumban, ahol $\eta > 0$, továbbá $(\forall K \in \mathbb{R})\ (\exists \delta > 0)\ \ 3 - \delta < x < 3 \implies f(x) < K$.

Legyen $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$, és legyen $K < 0$ adott. Ha $f(x) < K < 0$ teljesül, akkor $f(x)$ a nemnegatív számoknál is kisebb. Mivel bal oldali határértéket keresünk, $x < 3$, azaz $x - 3 < 0$.

$$\frac{1}{x-3} < K \iff \frac{1}{3-x} > -K \iff \frac{1}{-K} > 3 - x \iff x > 3 - \frac{1}{-K}.$$

Tehát a $\delta = \dfrac{1}{-K}$ választás kielégíti a definíciót.

1.82. Azt mondjuk, hogy $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, ha f értelmezve van valamilyen $(-\infty, P)$ intervallumban, továbbá $(\forall K \in \mathbb{R})\ (\exists L \in \mathbb{R})\ x < L \implies f(x) < K$.

Legyen $f(x) = \dfrac{12x^4 + 1}{3x^3 - x^2 + 3}$, és legyen $K < 0$ adott. Ha $f(x) < K < 0$ teljesül, akkor $f(x)$ a nemnegatív számoknál is kisebb. A definícióban szereplő L számot a -1-nél kisebb számok közt keressük. (Ez miért elég?) Ha $f(x) < 0$, akkor a tört értékét úgy tudjuk növelni, hogy az abszolút értékét csökkentjük.

$$\frac{12x^4+1}{3x^3-x^2+3} < \frac{12x^4}{3x^3+x^3+3x^3} = \frac{12x^4}{7x^3} = \frac{12}{7}x < K,$$

ha $x < \dfrac{7K}{12}$, tehát az $L = \min\left(\dfrac{7K}{12}, -1\right)$ választás kielégíti a definíciót.

1.86. Az $\{x\}\cdot x$ függvény nem korlátos. Legyen K tetszőleges valós szám. Legyen $x = 2[K] + \dfrac{5}{2}$. Ekkor $\{x\}\cdot x = \dfrac{1}{2}\cdot\left(2[K]+\dfrac{5}{2}\right) = [K] + \dfrac{5}{4} > [K]+1 > K$. Tehát $\{x\}\cdot x$ felülről nem korlátos, ezért nem korlátos.

A $\{x\}\cdot x$ függvény nem tart végtelenhez végtelenben, mert ha például $x_n = n$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\}\cdot x_n = \lim\limits_{n\to\infty} 0\cdot n = 0 \neq \infty$. (Van-e az $\{x\}\cdot x$ függvénynek határértéke végtelenben?)

1.90. Ha $x > 1$, akkor $\left\{\dfrac{1}{x}\right\} = \dfrac{1}{x}$, ezért $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\left\{\dfrac{1}{x}\right\} = \lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\dfrac{1}{x} = 1$.

Ha $x < -1$, akkor $\left\{\dfrac{1}{x}\right\} = \dfrac{1}{x} + 1$. (Miért?) Tehát $\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot\left\{\dfrac{1}{x}\right\} = \lim\limits_{x\to-\infty}(1+x) = -\infty$.

1.91. Tudjuk, hogy $x - 1 < [x] \le x$, ezért $\dfrac{x-1}{x} < \dfrac{[x]}{x} \le \dfrac{x}{x}$. Mivel $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x} = 1$, a rendőrelv miatt $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[x]}{x} = 1$.

Ugyanez a megoldás működik akkor is, ha a határértéket mínusz végtelenben nézzük.

1.93. Nem következik. Legyen $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 6 \\ 7, & \text{ha } x \neq 6 \end{cases}$ és legyen $g(x) = \begin{cases} 3, & \text{ha } x = 5 \\ 6, & \text{ha } x \neq 5\,. \end{cases}$

Ekkor $\lim\limits_{x\to 5} g(x) = 6$ és $f(g(x)) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \neq 5 \\ 7, & \text{ha } x = 5\,. \end{cases}$ Tehát $\lim\limits_{x\to 5} f(g(x)) = 1$.

1.120. Nem igaz. Legyen $f(x) = x^3$. Ekkor $f'(x) = 0$, de a függvénynek nincs vízszintes húrja.

1.123. Legyen $f(x) = \sqrt[7]{x}$.

A Lagrange-középértéktétel miatt $(\forall x)\ (\exists c \in (x, x+1))\quad \dfrac{\sqrt[7]{x+1}-\sqrt[7]{x}}{(x+1)-x} = f'(c)$.

Ezért $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[7]{x+1}-\sqrt[7]{x}) = \lim\limits_{c\to\infty}\dfrac{1}{7\sqrt[7]{c^6}} = 0$.

1.127. Legyen $f'(x) = f(x)$, és $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^x}$. Ekkor $g'(x) = \dfrac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{e^{2x}} = 0$. Tehát $g(x)$ konstans, ezért $g(x) = ce^x$, ahol c tetszőleges valós szám.

1.134. Legyen $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2$ és $g(x) = \dfrac{1}{x} + 1$. Ekkor $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 2$ és $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 1$.