# Komplex függvénytan gyakorlat, 2022. február 7.

- 1.ZH: március 28, 8-10 között az előadás alatt
- Az első ZH közös a három csoportnak.
- március 28.-án nem lesz gyakorlat, helyette május 10.-én lesz egy plusz gyakorlat, amikor zh-t írunk.
- 2.ZH: május 10.-én 14-16 között, később megadott teremben

Jelenlét, készülés:

- A gyakorlaton a részvétel kötelező.
- A házi feladatok megoldása, de legalább alapos gondolkodás a feladatokon szintén kötelező.

- Számonkérés:
  - A két ZH-n kívül
  - Az online oktatás alatt heti 1 beadandó feladat a gyakorlat Canvas oldalán, 0-6 pont. A **beadandó feladatok** mindig hétfőn 12:00-tól érhetőek el a Canvas oldalon, az első beadandó 2022 február 7.-én. A beadandó feladatot mindig a rákövetkező hét **hétfő 10:00-ig kell feltölteni** egyetlen pdf fileban a Canvas felületen. Az első beadandót 2022 február 14, 10:00-ig lehet feltölteni. Nagyon figyeljenek a határidő pontos betartására, mert a 10:00 határidő éles. Ha valaki akár 1 perccel túllépi, arra nulla pontot fogunk adni (ha netán a Canvas véletlenül mégis adna rá pontot, ezt utólag törölni fogjuk).
  - Ha jelenléti oktatásra térünk át, akkor a gyakorlat elején véletlenszerűen vagy írunk, vagy nem írunk röpdolgozatot az egyik házi feladatból. A röpdolgozatokra is 0-6 pontot lehet kapni. Aki hiányzik, vagy lekési a dolgozatírást, annak a pontszáma 0.
- Várható osztályozás:
  - A gyakorlati jegy a
  $$\frac{2\cdot Z_1 + 2\cdot Z_2 + \overline{R}}{5}$$
  szám egészrésze, ahol $0 \le Z_1, Z_2 \le 7$ a két ZH pontszám, $0 \le \overline{R} \le 6$ a beadandók és röpdolgozatok átlaga. A beadandók és röpdolgozatok uniójából legrosszabbul sikerültet nem számítjuk. Az órán mutatott jó teljesítmény alapján az így kiszámított jegynél 1 jeggyel jobb végső gyakorlati jegy kapható.
  - Javítási lehetőség: a félév végén pót ZH-n, ami a rosszabbul sikerült vagy elmulasztott ZH helyett számít.
- További gyakorló feladatok: Fehér–Kós–Tóth: Analízis feladatgyűjtemény II, `http://etananyag.ttk.elte.hu/request.php?101`

**1.1.** $(1+\sqrt{3}i)^{30} = ?$ $\quad \sqrt[3]{i} = ?$ $\quad \sqrt[4]{i} = ?$

**1.2.**

Mi az m-edik egységgyökök összege, szorzata, négyzetösszege?

**1.3.** $(1+\sqrt{3}i)^{30} = ?$ $\quad \sqrt[3]{i} = ?$ $\quad \sqrt[4]{i} = ?$

**1.4.** Ábrázoljuk azoknak a $z$ komplex számoknak a halmazát, amelyekre

(a) $0 \le \arg z \le \pi$; (b) $-\pi < \arg z \le \pi$; (c) $\arg(z+1) = \arg(2z-1)$;

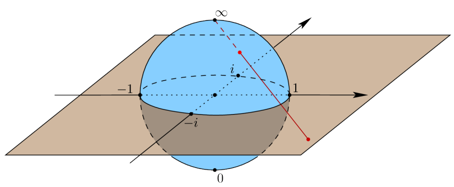
(d) $\operatorname{Re}(z^2) \ge 4$; (e) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 1$; (f) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| > 1$.

**1.5.** Legyen $a, b, c \in \mathbb{C}$.

(a) Igazoljuk, hogy a $(c-a)\cdot\overline{(b-a)}$ komplex szám akkor és csak akkor tisztán valós, ha az $a, b, c$ pontok egy egyenesre esnek.

(b) Milyen geometriai jelentése van az $\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left((c-a)\cdot\overline{(b-a)}\right)$ számnak?

**1.6.** Feleltessük meg az egységnyi sugarú gömb pontjait a $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ halmaznak sztereografikus projekcióval (inverzióval) az ábra szerint. A gömb milyen transzformációit írják le a következő függvények?




$$z \mapsto -z; \quad z \mapsto \overline{z}; \quad z \mapsto iz; \quad z \mapsto \frac{1}{\overline{z}} \quad z \mapsto \frac{1}{z};$$

**1.7.** Ellenőrizzük, hogy teljesülnek-e a Cauchy-Riemann egyenletek a következő függvényekre:

$$(x^2+y^2, 2xy); \qquad (x^2-y^2, 2xy); \qquad (e^x\cos y, e^x \sin y).$$

**1.8.** Keressünk olyan $v(x,y) : R^2 \to \mathbb{R}$ függvényt (ha van), amelyre az $f(x+iy) = e^y \sin x + iv(x,y)$ függvény mindenütt komplex differenciálható.

## Házi feladatok

**1.9.** Ábrázoljuk azoknak a $z$ komplex számoknak a halmazát, amikre

(e) $\mathrm{Re}\,\dfrac{z-1}{z+1} \geq 0$; (f) $0 < \mathrm{Re}(iz) < 2\pi$; (g) $|\arg(z)| < \dfrac{\pi}{4}$; (h) $\mathrm{Im}(z^2) < 4$;

**1.10.** (a) Alakítsuk szorzattá az $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ kifejezést.

(b) Mutassuk meg, hogy az $a, b, c$ komplex számok pontok akkor és csak akkor alkotnak (esetleg egy ponttá fajuló) szabályos háromszöget, ha $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

**1.11.** Keressünk olyan $v(x, y) : R^2 \to \mathbb{R}$ függvényt (ha van), melyre az $f(x + iy) = 3x + 2y + iv(x, y)$ mindenütt differenciálható.