

Komplex függvénytan gyakorlat, 2022. február 21.

3.1. Hol konvergálnak és melyik holomorf függvényhez az alábbi hatványsorok?

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} (2z+1)^n \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} n(z+1)^n$$

3.2. Mi lesz a $\sin z$ függvény értékkészlete?

3.3.

$$\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z} dz = ?; \quad \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz = ?; \quad \int_{|z|=1} \bar{z} dz = ?; \quad \int_{[1,i]} z^2 dz = ?$$

3.4. Legyen γ^+ az egységkör felső íve, mely az 1-ből a -1 -be megy, γ^- pedig az alsó, ugyanezen kezdő-, és végpontokkal. Igaz-e, hogy

$$\int_{\gamma^+} \bar{z} dz = \int_{\gamma^-} \bar{z} dz$$

3.5. Van-e primitív függvényük?

$$(a) f(z) = \frac{1}{z} \quad (D(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}) \quad (b) f(z) = \frac{1}{z} \quad (D(f) = \operatorname{Re} z > 0)$$

3.6. Legyen γ egy szakaszonként C^1 görbe és f ennek képhalmazán értelmezett folytonos függvény.

(a) Hogyan tudnánk definiálni az $\int_{\gamma} f d\bar{z}$ integrált?

(b) Van-e kapcsolat az alábbi két szám között?

$$\int_{\gamma} \overline{f(z)} dz \quad \int_{\gamma} f d\bar{z}$$

3.7. Differenciálható-e 0-ban?

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z} & \text{ha } z \neq k\pi \\ 0 & \text{ha } z = 0 \end{cases}$$

3.8. Mutassuk meg, hogy a

$$\sin z = z$$

egyenlet egyetlen megoldása $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ -ben: $z = 0$.

Házi feladatok

3.9. Legyen Γ az $\operatorname{Im} z = (\operatorname{Re} z)^2$ parabola 0 és $1+i$ közötti íve. Számítsuk ki a következő integrálokat:

$$\int_{\Gamma} z^2 dz; \quad \int_{\Gamma} z^2 d\bar{z};$$

Melyik integrál esetében alkalmazható a Newton-Leibniz szabály?

3.10. Milyen n -re létezik a

$$\frac{\sin z}{z^n}$$

függvénynek primitív függvénye a $D = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$ halmazon?

3.11. Mi a komplex tangens függvény értékkészlete?