

## Komplex függvénytan gyakorlat, 2022. február 28.

4.1. Van-e primitív függvényük?

$$(a) f(z) = \frac{1}{z} \quad (D(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}) \quad (b) f(z) = \frac{1}{z} \quad (D(f) = \operatorname{Re} z > 0)$$

4.2.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=3} \cos z dz =? \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=3} \frac{\cos z}{z - \frac{\pi}{4}} dz =? \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=3} \frac{\cos z}{z^2 - 1} dz =? \quad \int_{|z|=3} \frac{e^z}{(z-2)^3} dz =?$$

4.3. Legyen  $r$  egy pozitív valós szám.

$$\int_{|z|=r} \frac{e^z}{z+1} dz =? \quad \int_{|z|=r} \frac{e^z}{(z+2)^2} dz =?$$

(Útmutatás: az integrálok értékei  $r$ -től függhetnek!)

4.4. Van-e olyan  $f : B(0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{C}$  holomorf, melyre elég nagy  $n \in \mathbb{N}$  esetén

$$(a) f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n+1} \quad (b) f\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

4.5. Igazoljuk, hogy ha az  $f$  egészfüggvény a valós és a képzetes tengelyen is csak valós értékeket vesz fel, akkor páros függvény. (1. módszer: alkalmazzuk az unicitástételt az  $f(z)$ ,  $f(\bar{z})$  és  $f(-\bar{z})$  függvényekre. 2. módszer: fejtsük hatványsorba a függvényt a 0 körül, és vizsgáljuk az együtthatókat.)

4.6. Létezik-e ilyen nem konstans egészfüggvény?

1.  $|f(z)| \leq \sqrt{|z|}$  teljesül minden  $|z| > 2$  esetén?
2. A síkot az egységkör külsejébe viszi.

### Házi feladatok

4.7.

$$\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} d\theta =?$$

4.8.

$$\int_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2 - 4} dz =? \quad \int_{|z|=2} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n dz =? \quad (n \in \mathbb{Z});$$

4.9. Van-e olyan  $f : B(0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{C}$  holomorf, melyre elég nagy  $n \in \mathbb{N}$  esetén

$$(c) f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2n}{n+2} \quad (d) f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}$$