Komplex függvénytan gyakorlat, 2022. március 5.

5.1.

$$\int_{|z|=3} \frac{e^z}{(z-2)^3}\mathrm{d}z = ?$$

5.2. Legyen r egy pozitív valós szám.

$$\int\limits_{|z|=r} \frac{e^z}{z+1}\mathrm{d}z = ? \qquad \int\limits_{|z|=r} \frac{e^z}{(z+2)^2}\mathrm{d}z = ?$$

(Útmutatás:az integrálok értékei r-től függhetnek!)

5.3. Van-e olyan $f : B(0,\epsilon) \to \mathbb{C}$ holomorf, melyre elég nagy $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

5.4. Igazoljuk, hogy ha az f egészfüggvény a valós és a képzetes tengelyen is csak valós értékeket vesz fel, akkor páros függvény. (1. módszer: alkalmazzuk az unicitástételt az $f(z)$, $\overline{f(\bar{z})}$ és $\overline{f(-\bar{z})}$ függvényekre. 2. módszer: fejtsük hatványsorba a függvényt a 0 körül, és vizsgáljuk az együtthatókat.)

5.5. Létezik-e ilyen nem konstans egészfüggvény?

1. $|f(z)| \leq \sqrt{|z|}$ teljesül minden $|z| > 2$ esetén?
2. A síkot az egységkör külsejébe viszi.

5.6. Számítsuk ki az

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{\sin z}\mathrm{d}z$$

integrált.

5.7. A Liouville-tétel segítségével igazoljuk, hogy ha f kétszeresen periodikus egész függvény (vagyis $f(z+a) = f(z)$, $f(z+b) = f(z)$, és az a, b periódusok nem egy közös c periódus valós számszorosai), akkor f konstans.

5.8. A maximum-elv felhasználásával bizonyítsuk be, hogy ha egy függvény holomorf és nem konstans egy tartományon, akkor a valós és a képzetes részének nincs lokális szélsőértéke.

5.9. Számítsuk ki az

$$f(z) = \frac{2}{z^2 - 4z + 3}$$

függvény 0 körüli Laurent sorait.

5.10. Írjuk fel a $\operatorname{ctg} z$ függvény 0-körüli $\dot{B}(0,\pi)$-ön konvergens Laurent sorának első két nemnulla tagját.

Házi feladatok

5.11. Számítsuk ki az

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{e^z - 1}$$

integrált!

5.12. Számoljuk ki a $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z+1)}$ függvény 0 körüli Laurent sorait.

5.13. Írjuk fel az $\frac{1}{\sin(z)}$ függvény 0-körüli $\dot{B}(0,\pi)$-ön konvergens Laurent sorának első két nemnulla tagját.

5.14. Az f függvény holomorf az $|z| < 1 + \varepsilon$ körlemezen. Legyen $A = \max\limits_{0 \leq t \leq \pi} |f(e^{it})|$ és $B = \max\limits_{\pi \leq t \leq 2\pi} |f(e^{it})|$. Bizonyítsuk be, hogy $|f(0)| \leq \sqrt{AB}$. (Írjuk fel a maximum-elvet egy alkalmas függvényre.)