KOMPLEX SOKASÁGOK
MSC-doktori iskola
2020. 2. félév.
3. gyakorlat

1. Legyen $\gamma : \mathbb{C}_* \to \mathbb{C}_*$, $\gamma(z) := z/2$, és $\Gamma := \{\gamma^k, k \in \mathbb{Z}\}$. Melyik elliptikus görbével lesz $\mathbb{C}_*/\Gamma$ biholomorf?

2. (a) Legyen $\gamma(z) := z/2$, $z \in \mathbb{C}^2$ és $\Gamma = \{\gamma^k : k \in \mathbb{Z}\}$. Igazoljuk hogy Γ teljesen szakadásosan hat $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$-n.

   (b) Legyen $\gamma(z_1, z_2) := (\frac{z_1}{2}, \frac{3z_2}{2})$ és $\Gamma = \{\gamma^k : k \in \mathbb{Z}\}$. Mutassuk meg, hogy Γ hatása $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$-n nem teljesen szakadásos.

3. Legyen $\gamma(z) := z/2$, $z \in \mathbb{C}^2$ és $\Gamma = \{\gamma^k : k \in \mathbb{Z}\}$. $X = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}/\Gamma$.

   (a) Adjunk meg egy explicit diffeomorfizmust X és $S^3 \times S^1$ között.

   (b) Adjunk meg egy $f : X \to \mathbb{P}^1$ holomorf leképezést, melyre minden $p \in \mathbb{P}^1$-re $f^{-1}(p)$ egy komplex tórusz. Mivel $H_2(X, \mathbb{Z}) = 0$, ezek a tóruszok nullhomológok! Lehet ezt direktben látni? (Ha nem tudjuk, mik a homológiák, akkor a kérdés ez: hogyan lehet látni, hogy minden ilyen tórusz egy X-beli valós 3-sokaság pereme.)

4. Jelölje S_n az n elem összes permutációinak csoportját. Ez a csoport hat természetes módon a $\mathbb{C}^n$ tér pontjain, permutálva a pont koordinátáit. Mutassuk meg, hogy bár ez a hatás nem fixpontmentes, mégis a faktortér $M = \mathbb{C}^n/S_n$ ellátható egy komplex sokaság struktúrával.