**Komplex függvénytan 2.zh, 2021. december 08.**
**Megoldások**
III. matematikus, 2021 ősz.

1. **Megoldás:** $g(z) = f(1/z)$ függvénynek 0-ban izolált szingularitása van. Mivel $f$ korlátos, ezért $g$ is. Tanult tétel miatt, ezért $g$ szingularitása megszüntethető. Mivel $g(1/n) = f(n) = 0$, $n = 2, 3, \dots$ ezért az unicitási tétel miatt $g \equiv 0$, tehát $f \equiv 0$.

2. **Megoldás:** Az adatok alapján az $f$ függvénynek az 1 pont egy pontozott környezetében vett Laurent sorának első tagja $1/(z-1)$. Tehát a $g = f - 1/(z-1)$ függvény holomorf a $\{|z| < 2\}$ kettő sugarú körlapon. Ezen a körlapon a $g$ függvény hatványsorfejtése legyen:
$$g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j$$
Speciálisan ez a sor konvergens a $z = 1$ pontban. Tehát $b_j \to 0$, ha $j \to \infty$. Ugyanakkor a $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ körlapon
$$g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j = f(z) + \frac{1}{1-z} = \sum_{j=0}^{\infty} (a_j + 1) z^j$$
Tehát $b_j = a_j + 1$. Ezért
$$\lim_{j\to\infty} a_j = -1.$$

3. **Megoldás:** $sinz$-nek egyszeres nullahelye van 0-ban, mert $(\sin)'(0) = \cos(0) = 1$. Ezért $1/\sin z$-nek elsőrendű pólusa van. $1/z$-nek szintén elsőrendű pólusa van, 1 reziduummal. Ezért $f$-nek legfeljebb elsőrendű pólusa lehet. Ismert formula alapján $1/\sin z$-nek a reziduuma 0-ban: $1/\cos 0 = 1$, tehát a 0-beli reziduum $1 - 1 = 0$. Így $f$-nek megszüntethető szingularitása van 0-ban.

4. **Megoldás:** A tartomány egy holdacska a felső félsíkban. A határoló körvonalak 45-fokos szöget zárnak be, a metszéspontjaik a $(-1, 0)$ és az $(1, 0)$ pontok.
$$f(z) = \left[i\left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{2}\right)\right]^4$$

5. **Megoldás:** A reziduum formula alapján az integrál a belső szinguláris pontokban vett reziduumok összege, szorozva $2\pi i$-vel. A szinguláris helyek: $0, \pm 1$. 0-ban másodrendű pólus van, $\pm 1$-ben pedig elsőrendű pólus.
$$f(z) = \frac{e^z}{z^2(1-z^2)} = \frac{e^z/(z^2(1+z))}{(1-z)} = \frac{e^z/(z^2(1-z))}{(1+z)}$$
Mutatja, hogy $\mathrm{rez}_1 = -\frac{e}{2}$, $\mathrm{rez}_{-1} = \frac{e^{-1}}{2}$.
Reziduum a nullában: a deriváltra vonatkozó Cauchy formula alapján: a $\frac{e^z}{1-z^2}$ tört deriváltja a nullában, azaz 1. Tehát az integrál értéke: $i\pi(2 - e + 1/e)$.

6. **Megoldás:** A Young tétel alapján $\Delta \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \Delta$. Ezért a $v = \frac{\partial u}{\partial x}$ függvény is harmonikus. A sík egyszeresen összefüggő, ezért van olyan $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ függvény, hogy $\mathrm{Re} f = v$. $|f| \ge |v| \ge 5$ miatt az $1/f$ függvény egy korlátos, holomorf függvény a komplex síkon. Liouville tétele szerint tehát $1/f$ konstans, így $f$ is konstans, ezért $v$ is konstans. $v = c \ge 5$. Tehát $u(x, y) = cx + h(y)$ alakú. Mivel $u$ harmonikus, ezért $h'' \equiv 0$, vagyis $h(y) = ay + b$ alakú. Így $u(x, y) = cx + ay + b$, ahol $a, b, c$ valós számok, és $c \ge 5$.

7. **Megoldás:** $f_0(z) = -2z$, $f_1(z) = \cos z - 2z$. $f_1$ gyökhelyeinek számát keressük az egységkörlapban. Rouché tételét szeretnénk alkalmazni. Ha $|z| = 1$, akkor $(z = x + iy)$
$$|f_1(z) - f_0(z)| = |\cos z| = \left|\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right| \le \frac{|e^{iz}| + |e^{-iz}|}{2} = \frac{e^{-y} + e^y}{2} \le 2.$$
Az utolsó egyenlőtlenség a $|z| = 1$ miatt az $y$-ra érvényes $-1 \le y \le 1$ becslés következménye. De ez utóbbi egyenlőtlenségben csak akkor lehetne egyenlőség, ha $y = 0$, ami $z = \pm 1$-et jelentené. Azonban $|f_0(\pm 1)| = 2$, $f_1(z) - f_0(z) = \cos z$, tehát $|(f_1 - f_0)(\pm 1)| = |\cos 1| < 2$. Tehát minden $|z| = 1$ esetén a Rouché tételhez szükséges $|f_1(z) - f_0(z)| < |f_0(z)|$ feltétel teljesül. Így $f_1$-nek annyi gyöke lesz, mint $f_0$-nak, azaz 1 darab.