

KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN GYAKORLAT

III. matematikus, 2021 ősz.

1. gyakorlat

1.1.

- a) $f(x, y) = x^3y^2 + ix^2y^3$, hol lesz komplex deriválható?
b) Mik azok a komplex számok, ahol az $\operatorname{Im}^2 z + \operatorname{Re} z + \bar{z}$ függvény komplex differenciálható?

1.2. Mutassuk meg, hogy nem létezik olyan f függvény, amely az origó egy kis környezetében van definiálva, ebben a környezetben kielégíti az

$$f^2(z) = z$$

egyenletet és komplex deriválható az origóban.

1.3. Van-e olyan 0-ban komplex deriválható függvény, mely az $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ helyeken rendre az alábbi értékeket veszi fel:

- a) $0, 1, 0, 1, \dots$,
b) $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, \dots$,
c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

1.4. Legyen $w(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ (Zsukovszkij-leképezés).

- (a) Hova képezi ez a függvény az egységkörvonalat?
(b) Mutassuk meg, hogy f injektív $D_1 = \{z : 0 < |z| < 1\}$ -ben és $D_2 = \{z : |z| > 1\}$ -ben.
(c) Mutassuk meg, hogy a 0 középpontú, nem egységnyi sugarú körök képei $1, -1$ fókuszú ellipszisek.
(d) Hová képződik a D_1 tartomány? És D_2 ?

1.5.

- a) Melyik hatványsor összegfüggvénye az $\frac{1}{(1-z)^2}$, az $\{|z| < 1\}$ -ben?
b) Hol konvergens, mi a konvergenciasugara, mi az összege?

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z+1)^n$$

Házi feladatok

1.6. Mik azok a komplex számok, ahol az $\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Re}^2 z \cdot i + \bar{z}$ függvény komplex differenciálható?

1.7. Írjuk fel az összes olyan $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt (ha van), amire az

$$f(x + yi) = u(x, y) + (x^2 - y^2)i$$

függvény holomorf.