

KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN GYAKORLAT

III. matematikus, 2021 ősz.

2. gyakorlat

2.1. (a) Adjuk meg az összes lehetséges értékét. i^i .

(b) Fejtsük hatványsorba a 0 körül: $\frac{1}{(1+z)^2}$.

2.2. Melyik értelmezhető holomorf módon? Hogyan?

(a) $\cos \sqrt{z}$, $z \in \mathbb{C}$,

(b) $\sqrt{1 - \frac{1}{z}}$, $|z| > 1$ -re

2.3.

(a) Hová képezi az $f(z) = e^z$ függvény a $D = \{x + iy : 1 < x < \frac{3}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{2}\}$ halmazt?

(b) Hová képezi az $f(z) = \cos z$ függvény a $D = \{x + iy : 0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y\}$ halmazt?

2.4. A $\sum a_n z^n$ sor konvergenciasugara R . Tegyük fel, hogy $|z| > R$. Lehetséges-e?

a) $a_n z^n \rightarrow 0$.

b) van olyan n_0 , hogy minden $n \geq n_0$ esetén $\exp(\sqrt{n}) \leq |a_n z^n|$.

c) van olyan n_0 , hogy minden $n \geq n_0$ esetén $\exp(n^2) \leq |a_n z^n|$.

2.5. Mutassuk meg, hogy a

$$\sin z = z$$

egyenlet egyetlen megoldása $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ -ben: $z = 0$.

Házi feladatok

2.6. Adjuk meg az összes lehetséges értékét.

$$\log(3 + \sqrt{3}i).$$

2.7. Melyik értelmezhető holomorf módon? Hogyan?

(a) $\log \log z$, az 1 pont egy kis környezetében,

(b) $\frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ a 0 pont egy kis környezetében.

2.8.

(a) Hová képezi az $f(z) = \log z$ függvény a $D = \{z = x + iy : |z| < 1, x > 0\}$ halmazt?

(b) Hová képezi az $f(z) = \sin z$ függvény a $D = \{x + iy : 0 < x < \frac{\pi}{2}, y < 0\}$ halmazt?

2.9. Hol a hiba az alábbi okoskodásban? Legyen n természetes szám. Ekkor $e^{2n\pi i} = 1$, tehát $e^{1+2n\pi i} = e$.

Ezért $e = (e^{1+2n\pi i})^{1+2n\pi i} = e^{(1+2n\pi i)^2} = e^{1+4n\pi i-4n^2\pi^2}$. Azonban $e^{4n\pi i} = 1$, vagyis azt kapjuk, hogy $e^{-4n^2\pi^2} = 1$, ami ellentmondás.

Szorgalmi (Pirospontra beváltható) feladat, írásban beadható okt. 6-ig

Sz 2. $|z| < 1$, $f(z) = z + z^2 + z^4 + z^8 + z^{16} + \dots$

a) Mutassuk meg, hogy a konvergenciasugár 1. Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \infty$ (x valós!),

b) Bizonyítsuk be, hogy f egyetlen ζ , $|\zeta| = 1$ ponton keresztül sem folytatható ki holomorf módon.