

3. Komplex függvénytan gyakorlat, 2021. szeptember 29.

III. matematikus, 2021 ősz.

3.1.

$$n \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{C}, r > 0.$$

$$\int_{|z-a|=r} (z-a)^n dz = ?$$

3.2. a) $\int_{|z|=1} \frac{1+z+z^2/2}{z} dz = ?$ b) $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz = ?$

3.3. Bizonyítsuk be:

$$\left| \int_{|z|=R} \frac{1}{e^{\bar{z}}} dz \right| \leq 2\pi R e^R.$$

3.4. Határozzuk meg a $\sin z$ függvény értékészletét.

3.5. Melyik függvénynek létezik primitív függvénye az adott halmazon? Ha létezik, adjuk is meg. ($\mathbb{C}_* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$)

a) e^{2z} , $D = \mathbb{C}$ b) e^{z^2} , $D = \mathbb{C}$ c) $z^2 + \frac{1}{z^2}$, $D = \mathbb{C}_*$ d) $z + \frac{1}{z}$, $D = \mathbb{C}_*$

3.6.

(a) Legyen T a síkon egy a ill b oldalhosszúságú, koordinátatengelyekkel parhuzamos oldalú téglalap. Legyen γ a T téglalap pozitívan irányított oldala.

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz = ?$$

(b) Hogyan tudnánk általánosítani az előző feladatot? Fogalmazzunk meg egy sejtést és bizonyítsuk be.

3.7. Mutassuk meg, hogy $\operatorname{Re} z < 0$ esetén

$$|\exp(z) - 1| \leq |z|$$

3.8. Mutassuk meg, hogy a

$$\sin z = z$$

egyenlet egyetlen megoldása $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ -ben: $z = 0$.

Házi feladatok

3.9. Adjuk meg az összes megoldást:

$$\sin z = 0.$$

3.10. Határozzuk meg az $f(z) = \bar{z}$ függvény komplex vonalintegrálját az egységkörvonalon.

3.11. Melyik függvénynek létezik primitív függvénye az adott halmazon? Ha létezik, adjuk is meg.

a) \bar{z} , $D = \mathbb{C}$ b) $\operatorname{Re} z$, $D = \mathbb{C}$ c) $\frac{1}{z}$, $D = \{\operatorname{Re} z > 0\}$