

4. Komplex függvénytan gyakorlat, 2021. október 6.

III. matematikus, 2021 ősz.

4.1. (a) $\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z-3} dz = ?$ (b) $\int_{|z|=4} \frac{\sin z}{z-3} dz = ?$ (c) $\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} dz = ?$ (d) $\int_{|z|=2} \frac{2z}{z^2-1} dz$

4.2.

$$\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} d\theta = ?$$

4.3. Legyen $D = \{z : 1 < |z| < 2, z \notin (-2, -1)\}$. Mutassuk meg, hogy minden $f \in \mathcal{O}(D)$ holomorf függvénynek van primitív függvénye.

4.4. Legyen $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}_*)$. Mutassuk meg, hogy az

$$I(r) = \int_{|\zeta|=r} f(\zeta) d\zeta$$

integrál nem függ r -től.

4.5.

$G := \mathbb{C} \setminus [0, 1]$, $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$, γ tetszőleges G -beli szakaszonként C^1 , zárt görbe.

$$\int_{\gamma} f dz = ?$$

Házi feladatok

4.6. Legyen $r > 0$.

$$\int_{|z|=r} 2^z dz = ? \quad \int_{|z|=r} \frac{2^z}{z+1} dz = ? \quad \int_{|z+2i|=r} \frac{1}{z^2+1} dz = ?$$

4.7. $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{ikt}$ (ahol k egész szám) $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = ?$

4.8. Egy $D \subset \mathbb{C}$ nyílt halmazra jelölje $H^1(D)$ a következő faktorteret:

$$H^1(D) := \mathcal{O}(D) / \{f \in \mathcal{O}(D) : \exists F \in \mathcal{O}(D), F' = f\}.$$

Határozzuk meg $H^1(D)$ -t, ha $D = \{z : 1 < |z| < 2\}$.

Szorgalmi (Pirospontra beváltható) feladat, írásban beadható nov. 04-ig

Sz 4. Legyen $f : D \rightarrow \mathbb{C}_*$ holomorf. Tegyük fel, hogy van olyan $M \subset \mathbb{N}$ végtelen részhalmaz, hogy minden $m \in M$ -re f -nek van holomorf m -ik gyöke D -n (azaz olyan $g \in \mathcal{O}(D)$, hogy $g^m = f$). Bizonyítsuk be, hogy ekkor f -nek van holomorf logaritmus (azaz olyan $h \in \mathcal{O}(D)$, hogy $e^h = f$).