5. Komplex függvénytan gyakorlat, 2021. október 13.
III. matematikus, 2021 ősz.

5.1. Fejtsük hatványsorba a $\log(1+z)$ függvényt az origó körül. A Cauchy-Hadamard tétel felhasználása nélkül igazoljuk, hogy ennek a hatványsornak a konvergenciasugara 1.

5.2. Legyen $f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Ellenőrizzük az együtthatóformulát a $|z| = \frac{1}{2}$ körön, majd cseréljük ki az integrálban a kört egy $R > 1$ sugarú körre. Mennyi lesz az integrál értéke? Mi történik, ha $R \longrightarrow \infty$?

5.3. Van-e olyan $f \in \mathcal{O}(|z| < 1)$ függvény, melyre elég nagy $n \in \mathbb{N}$-től kezdve
(a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{2n+1}$ (b) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2n}{n+2}$ (c) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^n}$

5.4. Legyen $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ egy szakaszonként C^1 görbe és $\varphi : |\gamma| \to \mathbb{C}$ tetszőleges folytonos függvény. Mutassuk meg, hogy az

$$f(z) := \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

függvény holomorf $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$-ban és

$$f^{(k)}(z) := \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta.$$

5.5. Legyen D egy tartomány. Igazoljuk, hogy az $\mathcal{O}(D)$ gyűrű nullosztómentes.

5.6. Az $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ hatványsor konvergenciasugara 1, és minden k-ra a_k valós, $a_k \geq 0$. Mutassuk meg, hogy az 1 pont szinguláris pontja az f függvénynek.

Házi feladatok

5.7. (a) Mutassuk meg, hogy az $f(z) = z^\alpha$ függvény pontosan akkor értelmezhető holomorf módon az origó egy környezetében, ha $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$.

(b) Fejtsük hatványsorba az origó körül az $(1+z)^\alpha$ függvényt. A Cauchy-Hadamard tétel felhasználása nélkül igazoljuk, hogy ennek a hatványsornak a konvergenciasugara $\alpha \neq 0, 1, 2, \ldots$ esetén 1.

5.8. Van-e unicitás tétel határponthoz konvergáló pontsorozatra?

5.9.

$$\int_{|z-1|=2} \frac{z^{2021}}{(z-1)^{2021}} dz = ?$$