

6. Komplex függvénytan gyakorlat, 2021. október 20.

III. matematikus, 2021 ősz.

6.1. (a) Legyen f egész függvény. Mutassuk meg, hogy $g(z) := \overline{f(\bar{z})}$ is egész.

(b) Az $f(z)$, $f(\bar{z})$ és $f(-\bar{z})$ függvények összehasonlításával igazoljuk, hogy ha az f egészfüggvény a valós és a képzetes tengelyen is csak valós értékeket vesz fel, akkor páros függvény.

6.2. Az $f(z)$ egész függvényre $\operatorname{Re} f(z) < 0$, minden $z \in \mathbb{C}$ -re. Mutassuk meg, hogy ekkor f konstans.

6.3. Az $f(z)$ egész függvényre $f(z+1) = f(z) = f(z+i)$, minden $z \in \mathbb{C}$ -re. Mutassuk meg, hogy ekkor f konstans.

Házi feladatok

6.4. Az f függvény holomorf az $1 < |z| < 2$ tartományon, és az $[1, 2]$ szakaszon csak valós értékeket vesz fel. Mutassuk meg, hogy a $[-2, -1]$ szakaszon is csak valós értékei vannak.

Miért nem működik a megoldás az $1 < |z| < 2$, $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg z < \frac{3\pi}{2} - \varepsilon$ tartománnyal?

6.5. Az $f(z)$ egészfüggvényre $|f(1/n)| = 1/n^2$, ha $n = 1, 2, \dots$, és $|f(i)| = 2$. Mekkora lehet $|f(-i)|$?

6.6. Az f függvény holomorf a $D = \{1 < |z| < 2\}$ tartományon. Legyen γ egy szakaszonként C^1 zárt görbe D -ben. Mutassuk meg, hogy minden D -n holomorf f függvényre

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = I_r n(\gamma, s),$$

ahol $1 < r < 2$, $|s| < 1$ és

$$I_r = \int_{|\zeta|=r} f(\zeta) d\zeta$$