8. Komplex függvénytan gyakorlat, 2021. november 10.

III. matematikus, 2021 ősz.

8.1. Hol vannak az alábbi függvényeknek izolált szingularitásai, mi a szingularitás típusa, mennyi a reziduum?

$$\frac{1}{z};\quad \frac{1}{z^2};\quad \frac{1}{z^2+1};\quad \frac{1}{\sin z};\quad \sin\frac{1}{z};\quad \frac{\cos z}{1-e^z};\quad \frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$$

8.2.

$$\int\limits_{|z|=4} \frac{\operatorname{sh} z}{\sin z} dz = ?$$

8.3. Milyen $a \in \mathbb{C}$ esetén lesz az

$$F(z) := \int\limits_1^z e^{\zeta}\left(\frac{1}{\zeta^2} + \frac{a}{\zeta^4}\right) d\zeta$$

egy egyértékű holomorf függvény $\mathbb{C} \setminus \{0\}$-ban? Milyen típusú ekkor az F függvénynek a 0-beli szingularitása? Mennyi a reziduuma?

8.4. Igazoljuk (a nagy Picard tétel felhasználása nélkül), hogy ha f-nek a-ban izolált szingularitása van, és vannak olyan $z_n \to a$, $w_n \to a$ pontsorozatok, hogy $f(z_n) \to 0$, $f(w_n) \to 1$, akkor van olyan $t_n \to a$ sorozat is, melyre $f(t_n) \to 2$.

8.5. Mutassuk meg (a nagy Picard-tétel felhasználása nélkül), hogy ha az f függvénynek lényeges szingularitása van egy z_0 pontban, akkor a z_0 tetszőleges ε sugarú környezetében az értékkészlet komplementere nem tartalmazhat szakaszt.

Házi feladatok

8.6. Határozzuk meg a reziduumot az adott pontban.

$$\frac{1}{\sin z - \cos z}, z_0 = \frac{\pi}{4};\quad \frac{\operatorname{tg} z}{z^2+1}, z_0 = \pm i$$

$$\frac{\operatorname{tg} z}{1-\cos z}, z_0 = 0;\quad \frac{e^z}{\operatorname{tg} z - \sin z}, z_0 = 0$$

8.7. Számítsuk ki az alábbi integrálokat.

(a) $\int\limits_{|z|=4} \frac{1}{\sin z} dz$ (b) $\int\limits_{|z|=8} \frac{1}{e^z-1} dz$ (c) $\int\limits_{|z|=\pi} \operatorname{tg} z dz$

8.8. Mutassuk meg, hogy ha f holomorf az a pont egy környezetében, g-nek pólusa van a-ban és $\lim\limits_{z\to a} \sqrt{|f(z)|}|g(z)| = 2$, akkor $f(a) = f'(a) = 0$.

Szorgalmi (Pirospontra beváltható) feladat, írásban beadható nov. 24-ig

Sz 8. Milyen típusú a szingularitás nullában, mennyi a reziduum?

$$\frac{1}{(1-e^{-z})^{k+1}} \quad k \in 0 \cup \mathbb{N}.$$