

9. Komplex függvénytan gyakorlat, 2021. november 17.

III. matematikus, 2021 ősz.

9.1. (a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4)(x^2+9)} dx = ?$ (b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-i)(x-2i)(x-3i)(x-4i)} dx = ?$

9.2. Számítsuk ki a $\frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2 - \frac{1}{4}}$ függvény reziduumaiból a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \frac{1}{4}}$ összeget. Majd számítsuk ki ugyanezt elemien, teleszkópos összeggé alakítva a sort. Hasonlítsuk össze az eredményt.

9.3. Hány gyöke van a $p(z) = 3z^9 + 8z^6 + z^5 + 2z^3 + 1$ polinomnak
(a) az egységkörben? (b) az $\{1 < |z| < 2\}$ körgyűrűben?

9.4. Legyen f holomorf a $\{|z| \leq 1\}$ zárt körlap egy környezetében. Tegyük fel, hogy $|z| = 1$ esetén $|f(z)| < 1$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor f -nek pontosan egy fixpontja van $\{|z| < 1\}$ -ben.

9.5. f -nek 0-ban izolált szingularitása van. Milyen típusú az e^f 0-beli szingularitása?

Házi feladatok

9.6. (a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx$ (b) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$ (c) $\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^4} dx$

9.7. Hány gyöke van a $2^z + 3z^2 - z$ függvénynek az egységkörben?

9.8. (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} = ?$ (b) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k+1/4)^2} = ?$