

## 11. Komplex függvénytan gyakorlat, 2021. december 1.

III. matematikus, 2021 ősz.

11.1. Melyik függvény harmonikus az alábbiak közül? Amelyik harmonikus, az melyik (lokálisan definiált) holomorf függvény valós része?

$$(a) u(x, y) = x, \quad (b) u(x, y) = y, \quad (c) u(x, y) = x^2, \quad (d) u(x, y) = x^2 - y^2, \quad (e) u(x, y) = xy, \\ (f) u(z) = \arg z, \quad (g) u(x, y) = \log(x^2 + y^2), \quad (h) u(z) = \log |z|, \quad (i) u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

11.2.  $G$  konvex tartomány.  $D_r = \{z : |z| < r\}$ . Legyen  $f$  konform leképezés  $D_1$  és  $G$  között. Mutassuk meg, hogy ekkor minden  $0 < r < 1$ -re  $f(D_r)$  konvex.

11.3. Bizonyítsuk be, hogy  $\{0 < |z| < 1\}$  és  $\{1 < |z| < 2\}$  diffeomorfak, de nem konform ekvivalensek.

11.4.  $f \in \mathcal{O}(0 < |z| < \varepsilon)$  konform. Bizonyítsuk be, hogy ekkor  $f$ -nek nem lehet lényeges szingularitása és ha pólusa van, akkor 0 legfeljebb elsőrendű lehet.

11.5. Bizonyítsuk be, hogy egy  $f$  egész függvény injektív az egész síkon pontosan akkor, ha  $f(z) = az + b$  alakú, ahol  $a \neq 0$ .

### Házi feladatok

11.6.  $D$  tartomány,  $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Tegyük fel, hogy  $h, h^2$  harmonikus. Ekkor  $h = ?$

11.7.  $f = u + iv$  holomorf egy  $D$  tartományon. Melyik függvény harmonikus az alábbiak közül? Amelyik harmonikus, az melyik (lokálisan definiált) holomorf függvény valós része?

$$(a) \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad (b) \frac{u}{u^2 + v^2} \quad (c) \frac{u - v}{u^2 + v^2}$$

11.8.

(a) Ha  $u(x, y)$  harmonikus függvény egy  $D$  tartományon, akkor milyen egyenletet elégít ki ez a függvény polár koordinátákban, azaz  $v(r, \theta) := u(r \cos \theta, r \sin \theta)$  milyen egyenletnek lesz a megoldása?

(b) Mutassuk meg, hogy egy  $u(r, \theta) = u(r)$  (azaz  $u$  csak  $r$ -től függ) függvény harmonikus akkor és csak akkor, ha alkalmas  $a, b$  konstansokkal  $u(r) = a \log r + b$  alakú.