Mintavizsga

1. (20 pont) Mondjuk ki és igazoljuk Poincaré tételét a golyó és a policilinder inekvivalenciájáról.

2. (10 pont)

$$D = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |zw^2| < 1 \text{ vagy } |z^2 w| < 1\}.$$

   Melyik igaz?

   (a) D holomorfan konvex

   (b) Minden $f \in \mathcal{O}(D)$ holomorfan kiterjed $\mathbb{C}^2$-re

   (c) Minden $f \in \mathcal{O}(D)$ holomorfan kiterjed az $(1, 1)$ pont egy környezetére, de van olyan $f \in \mathcal{O}(D)$, mely nem terjed ki holomorfan a $(2, 2)$ pontba.

3. (10 pont) $0 < r < 1/2$. $j, k \in \mathbb{Z}$ tetszőleges egész számok, $\mathbb{B}_r^2(j, k)$ pedig a (j, k) középpontú r sugarú golyó $\mathbb{C}^2$-ben. Legyen

$$H := \bigcup_{j,k\in\mathbb{Z}} \mathbb{B}_r^2(j, k), \quad D := \mathbb{C}^2 \setminus \bar{H}.$$

   Tegyük fel, hogy $f : D \to \mathbb{C}$ holomorf és korlátos. Igazoljuk, hogy ekkor f konstans.

4. (10 pont) $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Mutassuk meg, hogy $H^{0,1}(D) = 0$.

5. (10 pont) $D := \mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{B}_1^2(0)$ (itt $\mathbb{B}_1^2(0)$ jelöli az origó középpontú 1 sugarú golyót). Adjunk meg olyan $\varphi_1, \varphi_2 \in C^\infty(D)$ függvényeket, melyek teljesítik a kompatibilitási feltételt, de az $f'_{\bar{z}_1} = \varphi_1$, $f'_{\bar{z}_2} = \varphi_2$ inhomogén Cauchy-Riemann egyenletrendszer nem oldható meg. Igazoljuk is ezt az állítást.

Jegy: 1-14pont=1, 15-24p=2, 25-34p=3, 35-44p=4, 45-60p=5